



<36623544260015

S

<36623544260015

Bayer. Staatsbibliothek

Mathe m . Math un 89

Mathesis. Systemata & methodi 130.

R

MATHEISIS
THEORETICA
ELEMENTARIS

ATQVE

S V B L I M I O R

IN VSVM

ACADEMICARVM PRAELECTIONVM.

AVCTORE

WENCESL. JO. GVST. KARSTEN,

PHIL. DOCT. ET LOG. PROF. P. O. IN ACAD. ROST.



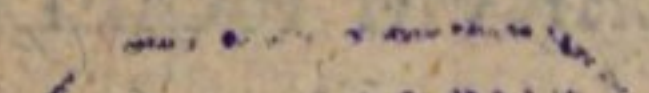
ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE,

APVD ANTON. FERDIN. RÖSEVM. 1760.

Bayer. Staats-
Bibliothek
München

THEORY
ELEMENTS

2 V B L M I O R





STATIS-
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

PRAEFATIO.

Instituti mei rationem displicere iis non posse mihi persuadeo, qui de summa hodiernae Matheseos perfectione et elegancia convicti sunt. Quo pluribus inventis novis, quo pluribus inventionum methodis novis maxima admiratione dignis indies perficitur haec scientia: eo magis necesse est, ut praestantissimae huius disciplinae studiosis opera, quam in eadem addiscenda collocant, quantum fieri potest, subleventur. Non tantum Algebrae communis praecepta, sed et immortalis memoriae virorum, LEIBNIZII et NEUTONI inventa, differentialium et integralium intelligo calculos, scitu prorsus necessaria sunt omnibus, qui Analystarum huius seculi prae caeteris eminentium scripta evolvere et practicarum huius scientiae partium vel unius solida cognitione imbui laudanda flagrant cupiditate. Unicum FAMIGERATISSIMI HUIUS Aevi MATHE-

PRAEFATIO.

MATICI, PERILL. EVLERI sufficiet testimonium. „Quod omnibus scriptis, quae sine *Analyfi sunt composita*, id potissimum Mechanicis „obtingit, ut lector, etiamsi de veritate eorum „quae proferuntur, convincatur, tamen non „fatis claram et distinctam eorum cognitionem „assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur, proprio Marte vix resolve „vere valeat, nisi ipse in *Analyfin* inquirat, „easdemque propositiones analytica methodo „evolvat.,, Quae verba leguntur in *Praefatione Tomi I. Mechanices*. Idem Summus Geometra sub finem huius praefationis postulat, ut in *Analyfi tam finitorum, quam infinitorum* satis sit exercitatus, qui omnia ab ipso explicata intelligere et sine manu ductione hoc opus perlegere velit. Sed quid opus est testimoniis, cum ipsa res negari a nemine queat, qui animum adtendit ad omnia Doctorum huius scientiae primae magnitudinis scripta, ad volumina celeberrima, quae hodie florent, Academicarum et Societatum, et quae communem impendunt operam in perficiendis tam theoreticis quam practicis huius scientiae partibus. Quis unicum ejusmodi scriptum intelliget, nisi palmariorum universae Analyticae Artis, praeceptorum imbutus jam est scientia. In numero eorum, qui in Academia nostra Mathematicam Elementarem me audierunt explicantem, semper selectiorem quendam inveni coetum ad sublimiora quoque Mathematicos praecepta adspiciantem, atque in explicanda *Analyfi Elementis*

PRÆFATIO.

tis Analyseos finitorum Perill. Segneri huc usque usus sum, cujus excellentis cursus mathematici tertium tomum frustra semper expectavi. Cum itaque idoneam et scopo meo satis facientem ad calculum differentialem et integrale manuductionem non inveni; universam Mathesin Theoreticam, tam Elementarem quam Sublimiorem, in unum systema ad discipulorum usum collegi. Compendium enim Matheos Theoreticae, omnia quae huc spectant explicans, ad hunc usque diem in vulgus non prodiit. Autores Diarii Goettingensis anni 1758. p. 138, cum Elementa Segneriana indicant, idem his verbis fatentur: *Der Nutzen dieses Werks fällt desto deutlicher in die Augen, da man in Teutschland zur Analysis kein anderes Lehrbuch als das Wolffsche hat brauchen können, das in der That zu der Zeit, da es heraus kam, vor vierzig Jahren, von der damaligen Vollkommenheit der Wissenschaft weniger entfernt war, als von der jetzigen, aber doch seit dem fast die Asymtote der analytischen Einsicht der meisten teutschen Professoren der Mathematik geblieben ist. Selbst unter den Arbeiten der Ausländer, die bey uns ohne alzugroße Schwierigkeit zu haben sind, hat keine diesen Mangel vollkommen ersetzen können, da Clairauts Algebra nur Arithmetische Aufgaben, Maclaurin nichts von der Anwendung auf die gemeine Geometrie enthält, und Neutons Arithmetica Universalis mehr eine Sammlung wohl gewählter Aufgaben, als ein Lehrbegriff ist.*

PRAEFATIO.

H. v. S. Bemühung kan den Lehrbegierigen, und denen, die sich derselben zu Vorlesungen bedienen wollen, Genüge leisten, besonders wenn die Rechnung des Unendlichen beygefüget ist. Sed Analyfin Infinitorum et Geometriam Generalem publicare Perill. Dno. Segnero nondum placuit. Scriptum Maclaurini adeo prolixum est, ut solertissimi patientiam haud parum exerceat, atque tyronibus erudiendis inservire plane nequeat. Praestantissima Analyseos inventa per tot volumina tam prolixiora quam breviora sunt dispersa, ut difficillimum sit, omnia pervolvere, atque ad consensum unius systematis colligere. Omnes inventionum methodos praecipue in differentialium & integralium calculo a me expositas esse spero, quæ ignorari debent a nemine, Recentiorum Analystarum scripta evoluturo. Nonnulla fortasse desiderari posse a iudice critico, non diffiteor, pleniorum scilicet expositionem doctrinæ serierum, inventionem termini serierum generalis et summatorii praecipue recurrentium, earum praeterea, quae ex infinitis componuntur factoribus, progressiorum. Sed angusti limites temporis praelectionibus Academicis destinati, cum collegium, quod intra unius anni terminos non finitur, a Studio raro rarissime frequentari, atque acerrimam quoque discendi ardorem valde debilitare soleat, a pluribus explicandis me coercuerunt. Ex eadem ratione in Geometria Sublimiori omnia ea, quae digna sunt notatu, explicare non potui, quorsum v.

g.

PRAEFATIO.

g. pertinent problemata de isoperimetris de linea braevissima in quavis superficie et hujus generis alia. Spero autem fore, ut is, cui omnia, quae proposui, fatis sunt familiaria, mira facilitate prolixiora volumina, quae indicatas doctrinas ex instituto proponunt, intelligere, atque in proprium usum vocare queat.

Ea, quae §. 24. et 25. *Anal. Math.* de infinite parvi et infinite magni notione explicavi, ex genuina quidem multiplicationis et divisionis notione, qua in Analyfi utimur, distincte fatis deduci possunt. Pauca tamen hoc loco explicatis addam, quae distinctius forsan et uberius explicant eum, quem de infinito mathematico mihi formo, conceptum. Series reciproca, cuius terminus generalis est $\frac{1}{x}$, ita est comparata, ut ejus termini, ponendo loco x numeros in ordine naturali progredientes, ut, 1, 2, 3, 4, 5, etc. continuo decrescant, ita quidem, ut cyphra, seu 0, sit terminus, ad quem fractio $\frac{1}{x}$ continuo quidem adpropinquat, quem tamen proprie nunquam attingit, ponendo loco x numeros quantumvis magnos. Ipse vero conceptus de hoc limite verus et realis est, nec sola forsan chimera intellectus nostri. Si denominator x certa lege crescat, ipsa fractio $\frac{1}{x}$ hunc limitem actu attingere potest, quod v. g. evenit, si x denotet tangentem, ideoque $\frac{1}{x}$ cotangentem anguli A , eo casu, quo angulus

PRAEFATIO.

A fit recto aequalis. Ipsa vero fractio $\frac{r}{x}$ limitem $= 0$ attingere non potest, nisi simul x adtingat limitem, ultra quem crescere prorsus nequit. Quodsi enim assumatur, x ulterius augeri posse, si $\frac{1}{x}$ fuerit $= 0$, etiam ipsa fractio ulterius diminui et nihilo minor evadere posset, quod prorsus impossibile est. Quantitates negativas sensu maxime improprio nihilo minores vocari, ostendit Magnus inter hodiernos Matheseos Doctores Geometra, CEL. KAESTNERVS in *Arithm.* §. 95. Quod cum ita se habeat, extra omne dubium positum est assertum, quod denominator x adtingat limitem, ultra quem crescere amplius nequit, si ipsa fractio limitem $= 0$ adtingat. Atque ex his concludo sequentes infinite parvi et infinite magni notiones. Infinite parvum est limes, ad quem quantitas decrescendo perpetuo adpropinquat, quem vero non adtingit, quamdiu est determinata et assignabilis quantitas, sed quocum quantitas esse definit. Infinite magnum est limes, ad quem quantitas continuo crescendo perpetuo adpropinquat, quem vero non adtingit, quamdiu manet quantitas determinata, sed quocum assignabilis esse definit.

Caeterum scientiae hujus dogmata mihi repetenda erant ex ipsis fontibus et scriptis originalibus tam VETERVM, quam RECEN-
TIORVM immortalis memoriae Geometra-
rum, EVCLIDIS, ARCHIMEDIS, APOLLO-
NII,

PRÆFATIO.

NII, THEODOSII, HAVSENI, SEGNERI, NEVTONI, EVLERI, KÆSTNERI, BERNOVLLIORVM, F. ÆPINI, CRAMERI, MACLAVRINI, D'ALEMBERT, aliorumque, qui horum inventa partim collegerunt, partim ipsi novis inventis et inventionum methodis hanc scientiam amplificarunt: „Praeparandus ad optimorum lectionem per Institutiones animus juvenilis est: quod admodum inepte fit, si postquam vix prima principia, tanquam distans aliquod lumen obscure perspexit, a doctore deferetur. „ Ita PERILL. SEGNERVS in Praef. ad *Analysin Finitorum*. Hanc ob causam omni studio in id incubui, ut omnes inventionum methodi, quantum possibile erat, complete exponerentur, praesertim in integralium calculo, quo abstrusissimae quaestiones et problemata omnium intricatissima adeo felici solvuntur successu, et quo fere solo scientiae Physico-Mathematicae ad tantum evectae sunt perfectionis fastigium, ut excelsis hisce coloribus

- - - - Er übersteigt das Ziel erschaffner Geister,

Findt die Natur im Werk, und scheint des Weltbaus Meister,

Er wiegt die inre Kraft, die sich in Körpern regt,

Den einen sinken macht, und den im Kreis bewegt.

Er schlägt die Tafeln auf von ewigen Gesetzen,

PRAEFATIO.

*Die die Natur gemacht, und nimmer wird
verletzen.*

pingatur Mathematicus a seculi nostri poëta, qui nominis sui gloriam monumentis consecravit amplissimis. Sed quamvis tanta calculus integralis recludat mysteria; tamen hoc solum non sufficit, si integrare quis noverit formulam $ax^n dx$, quod problema in omnibus fere apud nos usitatis Compendiis universum calculum absolvit integralem. Basis quidem totius calculi hoc problema est. Sed cui prodest fundus absque aedificio eidem superstruendo. Integrum quidem hujus calculi systema secundum scopum mihi propositum condere et omnia, quae huc spectant, inventa nova explicare non potui. Sed ea saltem cuncta tali, qua fieri poterat, brevitate et perspicuitate exposita sunt, quae genuinas complectuntur inventionum methodos.

Analyfin finitorum ab analysi infinitorum separare, et utramque figillatim tanquam peculiare scientias pertractare, ut vulgo fieri solet, consultum esse non putavi. Sat multa Analyseos, ut dicitur, finitorum, dogmata hac via vel debita universalitate et evidentia demonstrari prorsus nequeunt, vel adeo prolixo calculo et tantis ambagibus erui debent, ut patientissimum fatigent. Methodum meam non improbabat, qui animum advertet ad sententiam KÆSTNERI optimi hujus rei judicis in Progr. *Theorema Binomiale universaliter demonstratum*, Götting. 1758, p. 5. - - „judicabunt

PRAEFATIO.

„bunt ex specimine hoc idonei arbitri, annon
„in tanta discendorum copia proficuum fit, ana-
„lysin infinitorum, quamprimum ejus princi-
„pia demonstrari possunt, ad contrahendas de-
„monstrationes multo alias prolixiores adhibe-
„re. „Neque offendere debet haec quae
„videtur Analyseos finitorum et infinitorum
„commixtio; nam infiniti consideratione, ne-
„quidem in elementari geometria carere nos
„posse recte monuit EVLERVS., His adde-
re mihi liceat eam rationem, quod utraque sci-
entia prorsus iisdem utatur principiis, a primis
universae Matheseos axiomatibus pendentibus,
quod praeterea utraque scientia non nisi in
quantitatibus finitis earumque ad se invicem
relationibus inveniendis occupata sit. Falsum
enim est, quod Analysis finitorum sola quanti-
tates finitas consideret, Analysis autem infinito-
rum quantitatibus infinite parvis vel infinite
magnis inveniendis interserviat. Nec infinite
magna nec infinite parva sunt Matheseos ob-
jectum, nisi quatenus ad quantitates finitas ea-
rumque ad se invicem relationes investigandas
conducunt, quod methodo satis evidenti a me
demonstratum esse credo in *Anal. Math. Sect. VI.*
Continet haec tractatio vera et genuina differen-
tialis et integralis calculi principia, potissimum,
si dicamus quod res est, NEUTONO debita,
taliam quidem, quae sola Analyfi sunt domestica,
atque ex ipsis calculi principiis repetenda.
CELEB. MACLAURIN alique inter Anglos
Geometrae, quando haec omnia ad mensuras ce-
leri-

PRAEFATIO.

leritatum, quibus continuum crescit, vel decrescit, revocare coeperunt, non tantum principia minus domestica in Analysin introducunt; sed et eidem simul omnem concinnitatem, quae in methodi brevitatem consistit, eripiunt.

Quia denique errores omnes evitare, etiam maxime circumspecto valde est difficile; si Benignus Lector observaverit, me humani aliquid passum esse, satis confido ipsius aequitati, ut potius excusaverit, quam valde carperit errorem, qui oculis forsan meis se non subduxisset, si omnia, postquam typis excusa erant, attente perlegere potuissem. Mathematica scripta in regionibus nostris perquam raro typis excudi solent. Atque haec causa est, cur durante typothetae opera cum litterarum minuscularum, tum signorum defectu subinde laboraverit officina, ne dicam quod ipsi typothetae hoc genus scriptionis valde fuerit inconvetum. Quare ab omnibus mendis purgare hoc opusculum fere impossibile fuit, quamvis omnis eum in finem cura adhibita sit. Sub calcem hujus libri quasdam annotavi, integrum autem librum debita attentione perlegere non potui.

Vale B. L. mihi que fave. Scribam Rostochii
Mense Martio MDCCLX.



INDEX

INDEX CONTENTORVM.

Geometria Elementaris.

Seçtio I.

De lineis rectis et angulis planis rectilineis.

Seçtio II.

De figurarum planarum et in specie circuli perimetro generatim.

Seçtio III.

De triangulis planis rectilineis et rectis parallelis.

Seçtio. IV.

De parallelogrammis eorumque comparatione et inter se, et cum triangulis planis.

Seçtio V.

De lineis rectis et angulis planis ad circulum relatis et circuli proprietatibus, quae inde pendent.

Seçtio VI.

De comparatione extensorum geometrica generatim.

Seçtio VII.

De figurarum planarum rectilinearum similitudine.

Seçtio VIII.

De comparatione figurarum planarum, et quae hinc pendent, problematum planorum constructionibus.

Seçtio XI.

De planorum atque rectarum linearum in respectu ad diversa plana situ.

Seçtio X.

De planis ad superficiem sphaerae relatis et sphaerae proprietatibus, quae inde pendent.

Seçtio XI.

De angulis solidis generatim et in specie de triangulis solidis.

Seçtio XII.

De figuris solidis earumque superficiebus.

Arithmetica Elementaris.

Seçtio I.

De numeris eorumque signis generatim.

Seçtio II.

Sectio II.

Algorithmus numerorum integrorum et fractionum decimalium.

Sectio III.

Algorithmus fractionum.

Sectio IV.

De problematum quorundam arithmetico-numericorum, quae proportionum theoria nituntur, solutione.

Sectio V.

Brevis introductio in Arithmeticae practicae.

Calculus extensorum.

Sectio I.

De mensuratione longitudinum et angulorum planorum rectilineorum, vulgo, de longimetria et trigonometria plana.

Sectio II.

De mensuratione superficierum et solidorum, vulgo de planimetria et stereometria.

Analysis Mathematica.

Sectio I.

De algorithmo specioso.

Sectio II.

De solutione problematum simplicium.

Sectio III.

De calculo analytico-trigonometrico.

Sectio IV.

De aequationibus non simplicibus puris.

Sectio V.

De aequationibus quadraticis non puris.

Sectio VI.

De quantis variabilibus et limitibus rationum.

Sectio VII.

De proprietatibus radicum in aequationibus, quae sunt quadratica altiores.

Sectio VIII.

De solutione problematum determinatorum secundo ordine altiorum arithmetica.

Sectio IX.

De functionum, quae unam vel plures involvunt variables, palmariis quibusdam proprietatibus.

Sectio X.

Seçtio X.

De solutione problematum indeterminatorum et doctrinae serierum principiis.

Seçtio XI.

De solutione problematum indeterminatorum geometrica.

Seçtio XII.

De solutione problematum non simplicium determinatorum geometrica.

Seçtio XIII.

De sectionibus angulorum et arcuum circularium.

Seçtio XIV.

De investigatione radicum aequationis impossibilium.

Seçtio XV.

De calculo differentiali functionum unius variabilis algebraicarum.

Seçtio XVI.

De usu Calculi differentialis in doctrina serierum.

Seçtio XVII.

De maximis et minimis functionum unius variabilis.

Seçtio XVIII.

De usu calculi differentialis in aequationibus resolvendis.

Seçtio XIX.

De methodo tangentium directa.

Seçtio XX.

De integratione differentialium unius variabilis algebraicorum incomplexorum et usu serierum in calculo integrali.

Seçtio XXI.

De logarithmis et quantis exponentialibus.

Seçtio XXII.

De quantis transcendentibus, quae a circulo pendent.

Seçtio XXIII.

De reductione integralium ad hyperbolae et circuli quadraturam.

Seçtio XXIV.

De integratione differentialium algebraicorum unius variabilis complexorum.

Seçtio XXV.

De integratione functionum unius variabilis transcendentium.

Seçtio XXVI.

De calculo differentiali functionum, quae una plures involvunt variables.

Seçtio XXVII.

De aequationibus differentialibus.

Seçtio XXVIII.

Sectio XXVIII.

De integratione functionum plurium variabilium et aequationum differentialium.

Sectio XXIX.

De integratione aequationum differentialium secundi et altiorum ordinum.

Sectio XXX.

De methodis quibusdam integrandi, quae ad aequationes differentiales primi et altiorum ordinum pari cum successu adplicantur.

Geometria Sublimior.

Sectio I.

De ramis curvarum in infinitum extensis eorumque asymptotis.

Sectio II.

De diversis linearum tertii ordinis speciebus.

Sectio III.

De figuris curvarum in spatio finito.

Sectio IV.

De tangentibus et punctis multiplicibus curvarum.

Sectio V.

De curvatura curvarum.

Sectio VI.

De similitudine, diametris et centrīs curvarum.

Sectio VII.

De investigatione curvarum ex datis proprietatibus.

Sectio VIII.

De curvis transcendentibus.

Sectio IX.

De evolutione curvarum.

Sectio X.

De superficiebus, solidis rotundis et curvis duplicis curvaturae.



GEOME.



GEOMETRIA ELEMENTARIS.

SECTIO I.

DE

LINEIS RECTIS ET ANGVLIS PLANIS
RECTILINEIS.



§. I.

Spacium quaquaversum extensum dicitur *Solidum* sive *Corpus Geometricum*. *Superficies Geometrica* est extensio solidorum ad terminos suos. Extensio autem superficierum ad terminos suos *Linea Geometrica* adpellatur.

§. 2.

Locus in extenso simplicissimus, in quo ne mentem quidem partes distingui possunt, est *Punctum Geometricum*.

COR. Termini linearum sunt puncta, non autem lineæ ex ejusmodi punctis sunt compositæ, nec superficies ex lineis, vel solida ex superficieribus; licet in linea, superficie et solido ubique puncta concipi possint.

§. 3.

Linea, quæ ubique secundum eandem directionem extenditur, *Recta* est: Linea autem, cujus nulla pars est recta, *Curva* vocatur.

A

COR.

COR. Quaelibet pars extensa lineæ rectæ iterum est lineæ recta. Atque si data sit directio unius partis lineæ rectæ, simul determinata est directio omnium ejusdem rectæ partium reliquarum, et totius rectæ quousque continuatæ.

§. 4.

Postulatur, *inter duo quaecunque puncta data rectam duci, et ductam utcunque prolongari posse.*

§. 5.

Si in superficie utcunque sumantur duo puncta, et recta, quae illa puncta connectit, tota cadat in superficiem, quousque prolongetur, idque semper eodem modo contingat, ubicunque illa puncta sumantur; *Superficies* vocatur *Plana*, sive *Planum* simpliciter: *Curva* autem superficies dicitur, cujus nulla pars plana est.

§. 6.

Superficies planae curvis sunt simpliciores: ideo illae in Geometria prius considerandae veniunt, quam curvae. Hinc omnes lineae sive rectae sive curvae in posterum ducendae in eodem plano erunt concipiendae, donec expresse contrarium indicabitur.

§. 7.

Inter duo puncta data non nisi unica duci potest recta: et recta quaevis unico tantum modo versus eandem partem prolongari potest. (§. 3. cum Cor.).

COR. Hinc per duo puncta data situs lineae rectae determinatur ita, ut pluribus rectis quocunque numero per eadem duo puncta ductis illae omnes in unam coincident.

§. 8.

F. I. Duae rectae AB et AC diversae in eodem plano ita duci possunt, ut idem punctum A sit communis utriusque terminus. Situs duarum ejusmodi rectarum erga se invicem, quae idem punctum tanquam communem terminum agnoscunt, *Angulus planus rectilineus*, punctum A vero, quod communis rectarum AB et AC terminus est,

ET ANGVLIS PLANIS RECTILINEIS. 3

est, *Apex* five *Vertex* hujus anguli dici solet. Ipsae rectae AB et AC vocantur *Crura* five *Latera* anguli.

§. 9.

Designatur ejusmodi angulus tribus litteris, quarum media apici adponitur, extremae autem lateribus, quae angulum comprehendunt. Saepe etiam una tantum littera indicatur apici adposita.

§. 10.

Intelligentur crura anguli BAC prolongari versus oppositas partes ad D et E, quo facto sese intersecant circa A ibique *communis eorum intersecctio non est nisi unicum punctum*. (§. 7. Cor.). Quaevis vero recta ut EC planum in quo ducta est dividit in duas partes oppositas. Atque si in una earum partium sumatur punctum quoddam D, in altera vero opposita punctum B; recta BD, quae haec puncta connectit, priorem EC, si opus est, productam certo in puncto quodam A secabit.

§. 11.

Res, quae pluribus partibus homogeneis constat, dicitur *Quantum* five *Magnitudo*.

COR. Omnis generis extensa, solidum nimirum, superficies et linea, sunt quanta. Punctum autem Geometricum omnis magnitudinis est expers.

§. 12.

Quanta dicuntur *aequalia*, quae quoad multitudinem partium pro se invicem possunt substitui; quae vero quoad multitudinem partium pro se invicem non possunt substitui, *inaequalia* vocantur. Aequalia esse quanta hoc signo $=$ indicatur collocato inter eadem sequenti modo $A = B$.

§. 13.

Quodlibet quantum est sibi ipsi aequale.

COR. I. Totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

COR. II. Aequalia eidem tertio, ut et aequalia aequalibus, inter se sunt aequalia.

A 2

§. 14.

4 SECTIO I. DE LINEIS RECTIS

§. 14.

Extensa congruere dicuntur, quorum extrema, per quae terminantur, omnia coincidunt; quae proinde tota inter hos terminos coincidentes continentur.

F. 2. COR. I. Linea recta CD congruet ipsi AB, si puncto C puncto A imposito et tota recta CD in rectam AB cadente punctum D coincidat cum puncto B.

F. 3. COR. II. Angulus CAD congruit angulo EBF, si apice A apici B imposito et crure AD in crus BF cadente crus AC cadat in BE. Congruit angulus CAD angulo EBF, licet crura AD et BF, AC et BE sibi non congruant.

§. 15.

Extensa, quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia.

COR. Recta CD, quae congruit rectae AB, eidem est aequalis. Angulus CAD angulo EBF, cui congruit, aequalis est.

§. 16.

Lineae rectae et anguli plani sibi non congruentes sunt quanta inaequalia.

F. 2. COR. I. Recta CD congruens parti AB rectae EB eidem est inaequalis. Angulus EBF inaequalis est angulo

F. 3. lo GAD, si ejus parti CAD congruit.

COR. II. Angulus CAD angulo EBF aequalis est, si eidem congruit. Congruit autem angulus CAD angulo EBF, licet crura sibi imposita invicem non congruant (§. 14. Cor. 2.). Hinc duo anguli aequales esse possunt, licet eorum crura sint inaequalia; et proinde magnitudo anguli non dependet a magnitudine laterum.

§. 17.

Lineae rectae et anguli plani, si aequales sunt, congruunt inter se.

F. 2., COR. I. Si recta CD rectae AB est aequalis, et punctum C puncto A ipsa CD autem rectae AB imponatur, punctum D necessario cadit in B.

COR. II.

ET ANGLIS PLANIS RECTILINEIS. 5

COR. II. Si angulus EBF angulo CAD est aequalis, F. 3.
apice B apici A imposito, et crure BF cruri AD, necessa-
rio crus alterum BE cadit in AC.

§. 18.

Quantum, cujus pars alteri cuidam quanto toti ae-
qualis est, dicitur *majus*, et hoc, quod totum parti alte-
rius est aequale, eodem *minus*. Duo quanta esse inae-
qualia indicatur hoc signo, $>$, cujus apex versus quan-
tum minus et apertura versus quantum majus spectare
debet.

COR. I. Recta CD congruens parti AB rectae EB F. 2.
eadem minor est. Angulus EBF minor est angulo GAD,
si ejus parti CAD congruit. F. 3.

COR. II. Pars minor est toto et totum qualibet sua
parte majus est.

COR. III. Majus vel minus uno aequalium etiam ma-
jus vel minus est altero; et tanto magis, quod majus est
majore inaequalium, etiam majus est minore, et quod
minus est minore inaequalium, minus est majore.

§. 19.

Differentiam duorum quantorum inaequalium hoc
loco vocabimus eam partem, qua majus quantum exce-
dit quantum minus: quantum vero, quod duobus aliis
A et B simul sumtis aequale est, *Summa* quantorum A
et B appellabitur.

COR. I. Recta EB est summa rectarum EA et AB vel F. 2.
CD, recta vero EA est differentia rectarum EB et AB
vel CD.

COR. II. Angulus DAC est summa angulorum DAB F. 4
et BAC, et angulus DAB differentia angulorum DAC et
BAC, prouti BAC est differentia angulorum DAC et BAD.

§. 20.

Unum quantum alteri *Addere* est invenire eorum
summam. *Subtrahere* unum ab altero est invenire eo-
rum differentiam. Addenda est quanta A et B signo $+$

indicatur collocato inter eadem hoc modo $A \mp B$.
 Quanto autem B ab alio A subtrahendo praefigitur signum
 $-$ sequenti ratione $A - B$.

COR. Quantum, a quo idem aliud subtrahitur, quod
 eidem ante fuerat additum, non mutatur; pariter ac illud
 quantum idem manet, cui idem aliud additur, quod ab
 eodem ante fuerat subtractum.

§. 21.

*Aequalibus quantis additis aequalibus vel ab iisdem
 subtractis inveniuntur summae vel differentiae aequales.*

COR. Hinc et aequalium quantorum dupla tripla etc.
 sunt aequalia.

§. 22.

*Si aequalibus addantur inaequalia, majus est, quod
 per additionem majoris provenit eo, quod post minoris addi-
 tionem invenitur.*

COR. I. Hic tanto magis summa additione majoris ad
 majus inventa major est ea, quae invenitur additione
 minoris ad minus.

COR. II. Quanti majoris duplum triplum etc. majus
 est duplo, triplo, etc. minoris quanti.

COR. III. Aequalium quantorum partes dimidia,
 tertia etc. sunt aequales. Si vero quanto sunt inaequa-
 lia; pars dimidia, tertia etc. majoris major est parte di-
 midia tertia etc. minoris.

§. 23.

*Si ab inaequalibus aequalia subtrahantur, majus est id,
 quod relinquitur post subtractionem a majori eo, quod post
 subtractionem a minori relinquitur. Si vero ab aequalibus
 inaequalia subtrahantur, minus relinquitur subtractione ma-
 joris eo, quod subtractione minoris relinquitur.*

DEM. I.) Si fuerit $A > B$ et $C = D$, erit aut $A - C <$
 $B - D$, aut $A - C = B - D$, aut $A - C > B - D$.
 Priori casu foret $A - C + C < B - D + D$ (§. 22.) id
 est $A < B$ (§. 20. Cor.) et secundo casu esset $A - C + C = B$

ET ANGLIS PLANIS RECTILINEIS. 7

$-D + D$ (§. 21.) id est $A = B$; utrum *contra hyp.* 2) Si vero sit $A = B$ et $C > D$, erit aut $A - C > B - D$ aut $A - C = B - D$, aut $A - C < B - D$. Priori casu esset $A - C + C > B - D + D$ (§. 22. Cor. 1.) i. e. $A > B$, et secundo casu idem sequeretur ex §. 22. Utrumque vero iterum est *contra hypotesin*.

§. 24.

Duo anguli DAB et CAB, vel plures quocunque numero, quibus crus unum AB et apex A communis est, vocantur *anguli contigui*. Quod si crura AD et AC angulis contiguis non communia in eadem directione jacent, ita ut CD sit linea recta; (quod brevibus indicatur dicendo, AD et AB *jacere in directum*) anguli DAB et CAB dicuntur *contigui super eadem recta*.

COR. Cum sit BAC summa angulorum BAE et EAC, hincque $BAC = BAE + EAC$, porro angulus DAC summa angulorum BAC et DAB, erit et DAC summa angulorum DAB + BAE + EAC. Hinc omnium angulorum contiguorum, quotcunque sint numero, summa est angulus, quem duo crura extrema ipsis non communia comprehendunt.

§. 25.

Anguli contigui DBA et ABC super eadem recta DC inter se aequales vocantur *Anguli Recti*, et recta AB, crus eorum commune, rectae DC *perpendicularis* esse dicitur. Anguli recto inaequales vocantur *obliqui*, quorum quidem illi, qui recto sunt majores, *obtusi*, qui autem recto sunt minores, *acuti* appellantur. Angulus rectus in sequentibus brevitatis gratia littera R denotabitur. Differentia anguli acuti ab angulo recto (conf. §. 19. Cor. 2.) illius *Complementum ad angulum rectum* vocari solet.

COR. Angulus, cujus crura in directum jacent, duobus angulis rectis aequalis est. (§. 24. Cor.)

8 SECTIO I. DE LINEIS RECTIS

§. 26.

Omnes anguli recti inter se aequales sunt.

DEM. Si anguli ABC et EBF sunt recti; producantur crura BD et BF versus D et G. Tum vero crus BF imponatur cruri BC, ut puncta B coincident, atque BG cadit in BD et BE aut cum BA coincidit, aut non. Si posterius statuatur, erit $ABC = ABD$, $ABC > EBC$, ergo $ABD > EBC$. Cum igitur $EBC = EBD$, foret $ABD > EBD$, quod impossibile est. Prius igitur statui debet, et proinde anguli ABC et EBF sibi congruunt (§. 14.) et æquales sunt (§. 15.).

COR. Per idem punctum B in recta DC datum non nisi unica duci potest eidem rectae perpendicularis (§. 18.).

§. 27.

P. 6. *Anguli contigui super eadem recta, quotcunque sint numero et quantumvis sint inaequales, simul sumti duobus angulis rectis aequales sunt.*

DEM. Omnium ejusmodi angulorum DAF, FAE, EAG, GAC, summa est angulus DAC, (§. 25. Cor.) qui duobus angulis rectis aequalis est. (§. 25. Cor.).

COR. I. Ex suppositione contrarii patet, duorum vel plurium angulorum configuorum crura extrema in directum jacere, si eorum simul sumtorum summa duobus angulis rectis aequalis sit. Quodsi enim fuerit $EAC + EAD = 2R$, atque AC et AD non in directum; producatur CA versus A usque ad M ut non CAD sed CAM fit linea recta, eritque $EAC + EAD + EAM = 2R = EAC + EAD$, et proinde $EAD + EAM = EAD$, quod contra (§. 18. Cor. 2).

P. 6. COR. II. Ducta recta AM, erit angulus MAC summa angulorum MAD et DAC, hinc quia $DAC = 2R$, erit angulus MAC, quem crura AM et AC ad partes figurae superiores comprehendunt, duobus angulis rectis major.

COR. III.

ET ANGVLIS PLANIS RECTILINEIS. 9

COR. III. Tres igitur sunt classes angulorum obtusorum. Dantur anguli obtusi duobus angulis rectis minores, maiores, ut et iisdem aequales.

§. 28.

Differentia anguli duobus rectis minoris ab angulo duobus rectis aequali dicitur ejus *complementum ad duos rectos*.

§. 29.

Invenire anguli dati duobus rectis minoris complementum ad duos rectos

SOL. Si detur angulus EAC, producat unum ipsius crurium AC versus plagam eidem ad alteram apicis partem oppositam in D, (§. 4.) eritque angulus EAD quaesitum complementum. F. 6.

DEM. Angulus EAD est differentia anguli EAC ab angulo DAC (§. 19. Cor. 2.) et angulus DAC duobus rectis aequalis est (§. 25. Cor.) ideo EAD est complementum anguli EAC ad duos rectos. (§. 28.)

§. 30.

Si ex eodem puncto A quaquaversum (sed in eodem plano, quod perpetuo subintelligitur §. 6.) ducantur rectae AB, AC, AD, AE, AF, quotcunque; omnes anguli circa punctum A simul sumti quatuor angulis rectis aequales sunt. F. 7.

DEM. Prolongata una earum versus partem oppositam in G sunt $GAF + FAE + EAD = 2R$ et $GAB + BAC + CAD = 2R$ (§. 27.) hinc summa omnium $= 4R$ (§. 21.) $= FAB + BAC + CAD + EAD + FAE$, ob $GAF + GAB = FAB$.

COR. Hinc angulo plano rectilineo cuicunque ad verticem opponitur alius, qui est prioris differentia a quatuor rectis (§. 19.) qui ideo vocatur ejus *complementum ad quatuor rectos*. Dato igitur angulo quocunque ejus complementum ad quatuor rectos simul est cognitum.

IO SECTIO I. DE LINEIS RECTIS ETC.

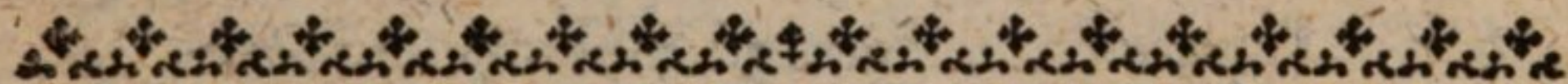
§. 31.

Si recta secet aliam rectam, anguli ad verticem oppositi aequales sunt.

P. I. DEM. Si recta BD secet rectam CE in puncto A, est $DAC + CAB = 2R$ et $CAB + BAE = 2R$ (§. 27.) ideo $DAC + CAB = CAB + BAE$ (§. 13. Cor. 2.) et $DAC = BAE$. (§. 21.)

COR. I. Si unus angulorum circa A est rectus, quilibet trium reliquorum est rectus: generaliter dato uno ex quatuor his angulis data est magnitudo cujuslibet reliquorum.

COR. II. Si ad aliquam rectam lineam EC, atque ad ejus punctum A duae rectae lineae DA, AB non ad eadem partes sunt angulos ad verticem DAE et CAB aequales fecerint, ipsae rectae lineae AD et AB erunt in directum. Nam $DAE + DAC = 2R = DAC + CAB$, ergo AD et AB sunt in directum (§. 27. Cor. 1.)



SECTIO II.

DE

FIGVRARVM PLANARVM ET IN SPECIE CIRCULI PRIMETRO GENERATIM.

§. 32.

Lineae plures concurrere et superficiem quandam planam undique terminare possunt. Omne extensum undique terminatum sensu generaliori dicitur *Figura*: superficies autem plana, undique terminata, *Figura plana* sive *Figura* simpliciter, quia de figuris solidis et non planis sermo non erit, donec contrarium indicabitur. Magnitudo figurae planae ipsius *Area* vocari solet.

§. 33.

§. 33.

Termini figurarum sunt lineae, (§. 1.) quae vocantur *figurae latera*: et latera figurae simul sumpta constituunt ejus *perimetrum* sive *peripheriam*.

§. 34.

Figura plana, cujus perimeter unica tantum vel duabus lineis rectis constat, est impossibilis: figura autem plana vel unica curva terminata possibilis est.

§. 35.

Figura plana solis lineis rectis terminata vocatur *rectilinea*; quae autem linea quadam curva vel pluribus curvis terminatur, *curvilinea*. Figura plana, cujus perimeter nec solis rectis, nec solis curvis constat, *mixtilinea* dici solet.

§. 36.

Figurae planae rectilineae perimeter tot constat angulis, quot sunt latera, quae figuram undique terminant.

§. 37.

Figurae planae generatim et speciatim rectilineae nomina sortiuntur a numero laterum vel angulorum, quibus terminantur. Sic dicuntur figurae *trilaterae*, *quadrilaterae* etc. vel *triangulares*, *quadrangulares* etc. vel uno nomine *triangula*, *tetragona*, *pentagona*, *hexagona*, *heptagona*, etc. prouti tribus quatuor, quinque, sex, septem &c. lateribus terminantur.

§. 38.

Figurae planae rectilineae plurium quam quatuor laterum generali nomine dicuntur *Polygona*. Figura plana rectilinea quatuor laterum vocatur *Quadrilaterum planum rectilineum* sive *Quadrilaterum simpliciter*. *Triangulum planum rectilineum* vel *Triangulum simpliciter* est figura plana rectilinea trium laterum.

§. 39.

Figurae planae rectilineae perimeter pluribus quam duabus constat lineis rectis, quarum quaelibet cum adiacente efficit angulum quendam planum et rectilineum.

Inte-

12 SECTIO II. DE FIGVR. PLANAR. ET IN SPECIE

Integra autem perimeter ejusmodi figurae considerari potest tanquam unica linea in se rediens, (§. 1.) quae cum proprie non sit linea curva, nec recta, *linea fracta* vocari potest.

COR. Hinc quoque quaelibet pars perimetri figurae rectilineae, si non sit unicum latus, vel pars unici lateris ejusmodi linea fracta est: et generaliter plures lineae rectae sub angulis quibuscunque ad puncta sua extrema connexae, licet non terminent undique superficiem quandam, efficiunt lineam fractam.

§. 40.

Figura plana mixtilinea duo saltem habet latera, quorum unum est linea recta, et alterum curva. Quotcunque autem et hujusmodi figurae sint latera, iterum perimeter figurae integra, ut una considerari potest linea (§. 1.) quae cum nec linea recta, nec curva, nec fracta sit, sed ex rectis et curvis simul tanquam partibus constet, *linea mixta*, vocari sicque a reliquis discerni potest.

COR. Eisdem ob rationes etiam quaelibet pars perimetri figurae mixtilineae, nisi sit unicum latus, vel ejus pars, vel ex folis constet rectis, ad linearum mixtarum classem referenda est.

§. 41.

Quaelibet linea recta per aliquod punctum intra figuram planam quamcunque ducta si, quoad opus est, producat, in duobus ad minimum punctis figurae perimetrum secat.

COR. Si igitur figura illa est rectilinea, recta descripto modo ducta duo saltem ipsius latera interfecat (§. 10.). Atque si figura fuerit triangulum eademque recta transeat per apicem unius anguli, ea necessario latus huic angulo oppositum, quoad opus est producta, secabit.

§. 42.

Distantia puncti a puncto est recta, quae puncta illa connectit. *Distantia puncti a recta* est linea ex puncto ad

ad rectam perpendicularis. *Distantia rectae a recta* est distantia alicujus puncti prioris rectae a posteriori.

§. 43.

Circulus est planum unica linea curva ABD termina- F. 8.
tum, in quo assignari potest punctum C ab omnibus punctis curvae illud terminantis aequaliter distans. Punctum C dicitur *Centrum* non tantum ipsius plani sed et curvae illud ambientis. Ipsa enim haec curva quoque *Circulus* dici solet. Adcuratius autem *Linea circularis* sive *Peripheria stricte*, et planum quod ambit, *Planum circularis* diceretur; brevitatis tamen gratia in posterum ad utrumque denotandum nomen generale retinebitur. *Arcus* circuli est pars quaecunque peripheriae: recta vero duo quaecunque peripheriae puncta A et B connectens dicitur *chorda* circuli, et quilibet eorum arcuum ADB et AEB, in quos peripheriam dividit, arcus illius chordae vocatur.

§. 44.

Recta quaevis a centro circuli ad peripheriam ducta ejus *Radius* et chorda per centrum circuli transiens ejus *Diameter* vocatur.

COR. I. Diameter circuli est radii duplum. Hinc radius quoque *Semidiameter* vocatur.

COR. II. Omnes radii et omnes diametri ejusdem circuli aequales sunt.

COR. III. Omne punctum, cujus distantia a centro circuli minor est radio, cadit intra circulum; et omne punctum cujus distantia a centro est radio major extra eundem situm est.

§. 45.

Postulatur dato centro et radio circulum describi posse.

§. 46.

A dato quodam puncto C positione arbitraria ducere F. 8.
rectam datae aequalem.

SOL. et DEM. Data recta EF pro radio et puncto dato C pro centro assumpto describatur circulus (§. 45.).

Tum

14 SECTIO II. DE FIGVR. PLANAR. ET IN SPECIE

Tum vero ex C ad peripheriae punctum quoddam D pro lubitu assumptum ducatur recta CD (§. 4.), quae recta CD erit rectae EF aequalis (§. 41. Cor. I.).

§. 47.

Datae lineae rectae aliam rectam addere vel hanc ab illa subtrahere.

P. 9. SOL. Si datae rectae CD alia AB ad partes C est addenda, vel ab eadem subtrahenda, centro C et radio AB describatur circulus, qui rectam datam DC secabit in G, eritque DG differentia rectarum DC et AB quaesita. Producat DC versus F (§. 4.) eaque peripheriam denuo secabit in F (§. 41.) quo facto erit DF summa rectarum DC et AB quaesita.

DEM. Quia $DC + CF = DF$ (§. 19. Cor. I.) et $CF = AB$ (§. 44. Cor. 2.) erit $DC + AB = DF$. Deinde quia $DC - CG = DG$ (§. 19. Cor. I.) et $CG = AB$ (§. 44. Cor. 2.), est $DC - AB = DG$.

COR. Eadem operatione quaelibet recta data AB alteri DE ex puncto dato C imponitur, ita ut sit CG vel $CF = AB$.

§. 48.

Perimeter figurae planae perimetrum alterius figurae planae *secare* dicitur, si eidem ita occurrit, ut partes quaedam prioris intra et reliquae ipsius partes extra posteriorem perimetrum cadant.

COR. Perimeter igitur unius figurae perimetrum alterius secat, si transit per punctum quoddam intra alteram et per punctum extra eandem situm.

§. 49.

Si duae figurarum planarum perimetri sese secant, in duobus ad minimum punctis concurrere debent, ita ut duo ista puncta utrique perimetro sint communia.

COR. Hinc circulus transiens per punctum intra alium circulum et per aliud punctum extra eundem assumptum (conf. §. 44. Cor. 2.) in duobus ad minimum punctis eundem secat.

§. 50.

§. 50.

Plana circularia, quorum radii aequales sunt, ipsa sunt aequalia, et eorum peripheriae.

DEM. Centro enim unius centro alterius imposito ipsa plana et peripheriae sibi mutuo congruunt.

COR. I. Congruentia ejusmodi circulorum non tollitur, utcunque etiam circa centrum commune gyrari concipiantur. Hinc circuli curvatura in omnibus suis partibus est eadem.

COR. II. Circuli commune centrum et unum tantum in peripheriis punctum commune habentes prorsus coincidunt.

§. 51.

Diversi circuli, quorum peripheriae non coincidunt, punctum tamen aliquod commune habent, non idem habent centrum.

DEM. Si idem centrum haberent, peripheriae eorum non essent diversae, sed prorsus coincidentes (§. 50. Cor. 2.) quod *contra hyp.*

§. 52.

Circuli diversi idem habentes centrum, nunquam possunt concurrere.

DEM. Si enim concurrerent, non essent circuli diversi (§. 50. Cor. 2.)

§. 53.

Circulus cum alio concurrens sed ita ut eundem non fecet, illum *tangere* dicitur. Circulus igitur alium tangit, si cum eodem concurrens aut totus intra eundem cadat, aut totus extra eundem. Si prius circulus alium *intus tangere*, si vero posterius, eum *extus tangere* dicitur.

COR. Circuli se mutuo secantes, vel tangentes, non habent idem centrum (§. 52.).

§. 54.

Circuli qui idem centrum habent, *Concentrici* vocantur: *Excentrici* vero, quorum centra sunt diversa.

COR. I.

16 SECTIO II. DE FIGVR. PLANAR. ET IN SPECIE

COR. I. Circuli se mutuo secantes vel tangentes sunt excentrici. (§. 50. Cor.)

P. 10. COR. II. Circuli concentrici diversi, ut AD et BE, sese nec secare nec tangere possunt: alias enim essent excentrici, *contra hyp.* Ideo ejusmodi circuli vocantur *Circuli Paralleli*; plani vero circuli majoris differentia a plano minoris, inter peripherias AD et BE contenta *Annulus*, a quibusdam VETERVM *Corona* dici solet.

COR. III. Ducto radio CA majoris circuli, pars ejusdem BA, quae cadit intra annulum, est magnitudinis constantis.

§. 55.

GEOMETRIA est scientia inveniendi mutuam dependentiam unius extensi ab alio, omniumque dependentiam ab extensis quibusdam simplicissimis. Omnium extensorum simplicissimum absque dubio est linea recta, hinc genesis lineae rectae in universa GEOMETRIA postulatur. (§. 4.)

§. 56.

Curvarum omnium simplicissimam esse circulum jam VETERES GEOMETRAE censuerunt, tam ob descriptionis in plano quocunque facilitatem, quam ob plurimas ipsius proprietates menti facile capiendas. Ideo quoque genesis circuli dato centro et radio postularunt. (§. 45.). Praeter circulum vero dantur innumerabiles aliae curvae, quae omnes una cum areis atque solidis inde genitis sunt GEOMETRIAE objecta. Ea GEOMETRIAE pars, quae non nisi genesis lineae rectae et circuli nec ullius aliae curvae postulat, et proinde genesis figurarum et solidorum ex combinatione lineae rectae cum circulo docet, dicitur GEOMETRIA ELEMENTARIS. Altera pars, explicans genesis extensorum, quae folius rectae et circuli combinatione generari nequeunt, GEOMETRIA SVBLIMIOR vocata est.

COR. Figurarum igitur planarum non aliae pertinent ad Geometriam Elementarem, nisi rectilineae omnes, plana

plana circularia et curvilineae omnes, quae solis arcubus circularibus terminantur. Denique et figurae mixtilineae, sed illae tantum, quarum termini sunt rectae et arcus circulares. Incipiamus a rectilineis quarum simplicissimae sunt triangula.



SECTIO III.

D E

TRIANGVLIS PLANIS RECTILINEIS ET RECTIS PARALLELIS.

§. 57.

Dato angulo datisque duobus lateribus construere ejusmodi triangulum, in quo latera data datum angulum includunt.

SOL. et DEM. Sit angulus datus ABC latera data D et E. Uni cruri AB ipsius ABC imponatur ex apice B unum datorum laterum $BF = D$: alteri vero cruri BC (quolibet horum crurium, si opus est, producto (§. 4.) imponatur ex apice B alterum datorum laterum $BG = E$. (§. 47. Cor.). Ducatur recta FG et triangulum FBG erit secundum praecepta data constructum. F. II.

§. 58.

Perinde est, quanta sint latera D et E in praecedente problemate. Si duo illa latera sumantur aequalia, triangulum, quod oritur, duo latera aequalia habet, et triangulum *aequicrurum* vocatur, cujus *crura* nominantur duo latera ipsius aequalia, et tertium latus ejus *basis*. Si latera FB et BG sunt aequalia, quantitas tertii FG a quantitate anguli oppositi B pendet. Si hoc quoque reliquis fiat aequale, orietur triangulum, cujus omnia latera sunt

B

aequa-

aequalia, quod vocatur triangulum *aequilaterum*. Triangulum cujus omnia latera sunt inaequalia, dicitur *scalenum*.

§. 59.

Triangula, quae aliquem angulum aequalem habent, et duo latera eum angulum comprehendentia aequalia, ipsa sunt aequalia, et reliqua eorundem latera, et anguli, qui ab aequalibus lateribus comprehenduntur.

F. 12. DEM. Angulus A trianguli ABC fit aequalis angulo D trianguli DEF et latus $AB = DE$, pariterque $AC = DF$. Impositus concipiatur apex anguli A apici anguli D ita ut AC cadat in DF, quo facto quoque AB cadet in DE (§. 17. Cor. 2.) punctum B vero in E et punctum C in F (§. 17. Cor. 1.) ideoque et recta BC in EF (§. 7.). Latus igitur BC lateri EF, angulus B angulo E, angulus C angulo F et triangulum ABC triangulo DEF congruunt (§. 14.). Est igitur $BC = EF$, $B = E$, $C = F$, et triangulum $ABC = DEF$ (§. 15.).

§. 60.

In omni triangulo aequicruro anguli lateribus aequalibus oppositi aequales sunt.

F. 13. DEM. Producantur crura AB et AC trianguli aequicruri ABC ultra basin, et sumto puncto D pro lubitu in parte producta unius AB centro A et radio AD describatur circulus, qui alterum crus AC productum secabit in E ita ut jam fit $AD = AE$ (§. 44. Cor. 2.). Ducantur rectae CD et BE, quo facto in triangulis ADC et ABE est $AB = AC$ et $AD = AE$, angulus A autem in utroque triangulo a lateribus aequalibus comprehensus sibi ipsi aequalis (§. 13.). Est igitur $\angle ABE = \angle ACD$, $\angle AEB = \angle ADC$ et $BE = CD$ (§. 59.), hincque porro in triangulis BDC et BCE latus $BE = CD$ (Dem.), latus $BD = CE$ (§. 22.) et angulus comprehensus $\angle ADC = \angle AEB$ (Dem.), quare et angulus $\angle EBC = \angle DCB$, unde $\angle ABE - \angle EBC = \angle ACD - \angle DCB$ (§. 21.) hoc est $\angle ABC = \angle ACB$.

COR.

COR. Omne triangulum aequilaterum simul est aequicrurum, quare ejus anguli omnes inter se aequales sunt.

§. 61.

Si in triangulo quodam duo anguli aequales sunt; latera angulis aequalibus opposita sunt aequalia. P. 14.

DEM. In triangulo ABC fit $\angle ABC = \angle ACB$, ergo erit aut $AB = AC$, aut $AB < AC$, aut $AB > AC$. Ponamus secundum, et producat AB versus D , donec fit $BD = AC$. Hoc facto ducatur CD , et in triangulis BDC et ABC erit $BD = AC$ (constr.) $BC = BC$ et $\angle DBC = \angle ACB$ (hyp.), ideo triangulum $ABC = DBC$, contra §. 18. Cor. 2. Ponamus tertium, et pars ipsius AB erit lateri AC toti aequalis. Quaecunque autem pars ut BE pro tali sumatur erit iterum $BE = AC$ (hyp.) $BC = BC$ et $\angle ABC = \angle ACB$ (hyp.) hincque triangulum $ABC = EBC$ contra §. 18. Cor. 2. Primum igitur verum est.

COR. Triangulum in quo omnes anguli aequales sunt, est aequilaterum.

§. 62.

Recta bisecans basin trianguli aequicruri ducta per apicem anguli basi oppositi simul bisecat angulum basi oppositum, totum triangulum, et insuper basi est perpendicularis.

DEM. In triangulo aequicruro ACB per apicem anguli C basi oppositi transeat recta CD ita ut sit $AD = DB$, erit praeterea $CA = CB$ hyp. et $\angle A = \angle B$, (§. 60.) ideo triangulum CAD congruit triangulo CBD ita ut sit $\angle ACD = \angle DCB$, et $\angle ADC = \angle BDC$ (§. 59.) hincque CD ipsi AB perpendicularis. P. 15.

§. 63.

Recta circuli chordam AB bifariam secans atque per centrum transiens eidem chordae perpendicularis est et bisecat angulum a radiis ad chordae extrema ductis comprehensum.

DEM. In circulo $AFBG$, cujus centrum est C ducta sit chorda AB , atque recta CG bisecet chordam AB in puncto D . Ducantur radii CA et CB ad extrema chordae AB puncta A et B fietque triangulum CAB ae-

quicrurum, quia $CA = CB$ (§. 44. Cor. 2.), cujus basis est chorda AB. Proinde recta CD non tantum chordae AB est perpendicularis; sed bifecat simul angulum ACB a radiis CA et CB comprehensum (§. 62.).

§. 64.

Recta quae basin trianguli aequicruri bifecat eique perpendicularis est, transit per apicem anguli basi oppositi, atque hunc angulum bifecat.

DEM. Si recta DE basin bifecans ponatur eidem basi esse perpendicularis non autem transire per apicem anguli basi oppositi, potest tamen per medium baseos punctum alia duci recta DC simul per apicem hujus anguli transiens. Sed haec perpendicularis est basi (§. 62.) ad idem punctum D cum recta DE contra §. 26. Cor. Transit igitur recta basin perpendiculariter bifecans per apicem anguli ACB et proinde eundem simul bifecat. (§. 62.).

COR. Recta quae chordam circuli bifecat eique perpendicularis est, per centrum transit et bifecat angulum a radiis ad chordae extrema ductis comprehensum.

§. 65.

Circulus alium circulum non nisi in duobus punctis secare potest.

F. 16. DEM. Circuli sese secantes certo duo puncta habent communia (§. 49.). Sint puncta ista A et B, atque ponatur et tertium aliquod punctum D ipsis commune esse. Ducantur chordae AB et BD, quibus bifariam sectis in E et F perpendiculares per E et F transeunt per centrum utriusque circuli, quod igitur unicum est §. 10. quare circuli essent concentrici contra §. 53. Cor.

COR. Per data tria puncta determinatur situs et magnitudo circuli.

§. 66.

Recta bifecans angulum trianguli aequicruri basi oppositi

positum simul bisecat basin et ipsum triangulum, atque ad basin est perpendicularis.

DEM. Recta CD bisecet angulum C basi trianguli aequicruri ABC oppositum, eritque in triangulis ACD et DCB latus $AC = BC$, $CD = CD$ et praeterea anguli apud C aequales, (hyp.) ideo triangu- la ADC et DBC sibi congruunt, ita ut sit $DB = AD$, et anguli apud D aequales (§. 59.) proinde CD ipsi AB perpendicularis (§. 25.).

§. 67.

Producto latere quovis trianguli angulus extra triangulum a latere producto et adjacente comprehensus major est utrolibet angulorum in triangulo eidem oppositorum.

DEM. Latus BC trianguli ABC productum sit ver-
sus D. Bisectum intelligatur latus AC in E et BC in F. F. 17.
Ducantur BE et AF, eaeque producantur donec sit $EG = EB$ et $FH = FA$. Ducantur CG et CH, quo facto in triangulis ABE et EGC est $AE = EC$, $BE = EG$ (constr.) $\angle AEB = \angle GEC$ (§. 31.) quare angulus $\angle ACG = \angle BAC$ (§. 59.). Sed est $\angle ACD > \angle ACG$ (§. 18. Cor. 2.) ergo et $\angle ACD > \angle BAC$ (§. 18. Cor. 3.). Deinde in triangulis ABF et FCH ex pari ratione est angulus $\angle BCH = \angle CBA$, quare producto quoque latere AC versus I, cum si $\angle BCI > \angle BCH$, erit quoque $\angle BCI > \angle CBA$. Quia autem $\angle BCI = \angle ACD$, erit $\angle ACD > \angle CBA$.

§. 68.

*In omni triangulo major angulus opponitur lateri F. 18.
majori.*

DEM. In triangulo ABC sit $AC > AB$, ideo pars quaedam lateris AC, quae sit AD, aequalis erit lateri AB (§. 18.). Ducatur recta BD, quo facto est $\angle ABC > \angle ABD$, sed $\angle ABD = \angle ADB$ (§. 60.) hincque $\angle ABC > \angle ADB$. Sed $\angle ADB > \angle C$ (§. 67.) ergo et $\angle ABC > \angle C$.

§. 69.

In omni triangulo majus latus opponitur angulo majori.

P. 18. DEM. In triangulo ABC sit angulus $B > C$, eritque aut $AC = AB$, aut $AC < AB$, aut $AC > AB$. Si primum sumatur, foret $B = C$ (§. 60.) si secundum; foret $C > B$ (§. 68.) utrumque contra hypothesin. Ergo ultimum est verum.

§. 70.

Duo quaevis trianguli latera sunt tertio maiora.

P. 19. DEM. Producaturs latus unum AB trianguli ABC donec sit $AD = AC$, et erit angulus $D = ACD$ (§. 60.), ideoque $BCD > D$ (§. 18. Cor. 3.), quare $DB = AB + AC > BC$ (§. 69.).

COR. In omni triangulo aequicruro crus unum dimidio basis majus est.

§. 71.

Si super trianguli ABC uno latere BC a punctis extremis interius constitutae fuerint duae lineae rectae BD, CD in puncto D intra terminos trianguli ABC concurrentes, haec rectae reliquis duobus trianguli lateribus minores erunt, maiorem vero quam illae angulum comprehendunt.

P. 20. DEM. Producaturs una harum rectarum BD in E, atque erit $CE + ED > CD$ (§. 70.), proinde $CE + ED + BD > CD + BD$, id est $CE + EB > CD + BD$. Praeterea $BA + AE > BE$, et ideo $BA + AE + EC > BE + EC$, id est $BA + AC > BE + EC$. Cum igitur erat $BE + EC > CD + BD$, fiet $BA + AC > CD + BD$. Quod erat primum. Deinde est angulus $BDC > DEC$, et $DEC > A$, proinde $BDC > A$.

§. 72.

Si duorum triangulorum ABC, DEF, unum duo latera AB, AC, duobus lateribus alterius DE, DF aequalia habet, angulum vero A ab aequalibus lateribus comprehensum maiorem angulo EDF; etiam tertium latus BC prioris majus erit tertio latere EF posterioris angulo minori opposito.

P. 21. DEM. Sit angulus $EDG = A$, et $DG = DF = AC$, tumque ducanturs EG et FG. Quodsi jam
1) EG

1) EG cadit supra EF, ob $AB = DE$, $AC = DG$ et $A = EDG$ erit $BC = EG$, (§. 59.). Quia vero $DF = DG$, erit angulus $DFG = DGF$, et quia $EGF < DGF$, erit quoque $EGF < DFG$. Ideo ob $EFG > DFG$ fiet angulus $EFG > EGF$ et proinde EG vel $BC > EF$. Quodsi 2) EF cadat in EG, per se manifestum est fore EG vel $BC > EF$. Si denique 3.) EG ca- F. 22.
dat infra EF, erit $DG + GE > DF + FE$ (§. 71.). Quia vero $DG = DF$, aequalibus hisce utrinque subtractis relinquitur GE vel $BC > EF$.

§. 73.

Si duo triangula ABC et DEF duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, aequalia habuerint, latus BC vero majus sit latere EF, angulus A majori lateri oppositus major erit angulo EDF alterius trianguli ab aequalibus cum priore lateribus comprehenso et minori lateri opposito.

DEM. Non enim est angulus $A = EDF$, quia F. 22.
foret $BC = EF$; nec $A < EDF$, quia foret $BC < EF$ (§. 71.) utrumque contra hyp. Proinde est $A > EDF$.

§. 74.

Datis tribus lateribus, quorum duo quaevis sunt tertio majora, triangulum construere.

SOL. et DEM. Sint data latera AB, C et D. F. 23
Ex unius datorum laterum AB uno extremo A tanquam centro radio alterutro reliquorum C aequali describatur peripheria GEH; ex altero extremo ipsius AB, nempe puncto B tanquam centro radio alteri laterum D aequali describatur peripheria GFL, quae priorem secabit et quidem in duobus tantum punctis G et M. (§. 65.). Quodsi ducantur rectae AG et BG, vel AM et BM, erit triangulum AGB, vel AMB secundum praecepta constructum. (§. 44. Cor. 2.).

COR. I. Si $C = D$, triangulum AGB erit aequicrurum. Dato autem C hoc casu simul datur D, ideo triangulum

24 SECTIO III. DE TRIANGVLIS PLANIS

aequicrurum super data qualibet basi construitur dato crure dimidio basis maiore.

COR. II. Si $C = D = AB$, triangulum ABG est aequilaterum. Ideo triangulum aequilaterum super data qualibet recta construitur, quia uno laterum dato dantur omnia.

§. 75.

Si duorum triangulorum tria latera sigillatim sumpta aequalia fuerint, et ipsa triangula aequalia erunt, et anguli aequalibus lateribus iuteriacentes.

F. 24. DEM. In triangulis ABC et ABD sit $AC = AD$,
et 25. $BC = BD$ et $AB = AB$. Crus unum alterutrius trianguli, quodcunque libuerit, ut AB imponatur cruri alterius AB ipsi aequali, ita vero ut angulus D huius trianguli opponatur angulo C prioris. Hoc facto latera AC et AB aut jacent in directum aut non. Sit prius, atque triangulum CDB erit aequicrurum, proinde angulus $C = D$ et ideo ex (§. 59.) constat propositum. Si AC et AD non jacent in directum, ducatur recta CD, quo facto ob ACD et BCD triangula aequicrura erit $ACD = ADC$, et $BCD = BDC$, hincque $BCD + ACD = BDC + ADC$ (fig. 24) et $BCD - ACD = BDC - ADC$ (fig. 25.) hoc est angulus $ACB = ADB$, ideoque triangulum $ACB = ADB$, ang. $CAB = DAB$ et $CBA = DBA$ (§. 59.).

COR. Datis ergo tribus lateribus determinantur et anguli trianguli, et ipsum triangulum, nec super eadem recta ex iisdem lateribus eodem modo positis construuntur plura uno triangulo.

§. 76.

Ad datam lineam rectam datumque in ea punctum angulum constituere dato aequalem.

P. 26. SOL. et DEM. Ad punctum A rectae datae AB constituendus sit angulus dato C aequalis. Sumantur in cruribus anguli dati C utcunque puncta D et E ductaque recta ED compleatur triangulum CDE (§. 57.). Fiat $AF = CD$ et super AF construatur triangulum AGF,
in

in quo $AG = CE$ et $FG = DE$ (§. 74.) eritque angulus $A = C$ (§. 75.).

COR. Eadem operatione invenitur summa duorum vel plurium angulorum datorum ut et duorum differentia.

§. 77.

Datum angulum in duos angulos aequales secare.

SOL. In cruribus dati anguli ABC sumatur $BD = BE$ F. 27. BE ducaturque recta DE . Supra hac DE construatur triangulum aequicrurum DEF (§. 74. Cor. i.) sumta magnitudine cruris arbitraria dummodo sit majus dimidio basis. Ex apice anguli F ad apicem B anguli dati ducatur recta FB , quae angulum ABC in duos angulos aequales fecabit.

DEM. Quia $BD = BE$ et $DF = EF$ (constr.) $BF = BF$, est angulus $DBF = EBF$. (§. 75.).

§. 78.

Per punctum in recta datum ducere aliam rectam priori perpendicularem.

SOL. et DEM. Data sit recta AB in eaque punctum C. Sumto puncto D utcunque in recta AB fiat $CD = CE$, tum vero supra DE construatur triangulum aequicrurum DEF , quo facto recta per puncta C et F ducta ipsi AB erit perpendicularis (§. 62.). F. 28.

§. 79.

Datam lineam rectam in duas partes aequales secare recta eidem perpendiculari.

SOL. et DEM. Super data recta AB construatur triangulum aequicrurum ACB , (§. 74. Cor. i.) angulus C dividatur in duas partes aequales recta CD , (§. 77.) eadem et rectam AB in D bifariam secabit eique perpendicularis erit (§. 66.). F. 15.

§. 80.

In quovis triangulo summa duorum angulorum duobus angulis rectis minor est.

DEM. In triangulo ABC summa duorum angulorum quorumcunque ut $CAB + ABC < 2R$. F. 29.

B 5

enim

enim latere angulis illis interjacente in D est $CAB < CBD$ (§. 67.) ideoque $CAB + ABC < CBD + ABC$ (§. 22.) cum autem sit $CBD + ABC = 2R$ (§. 27.), est $CAB + ABC < 2R$ (§. 18. Cor. 3.).

COR. I. In triangulo plures uno, anguli recti, vel plures uno anguli obtusi, vel unus angulus rectus et unus obtusus simul, inesse nequeunt.

COR. II. Si linea recta CA cum alia recta AD angulos inaequales faciat unum CAD acutum, et alterum CAF obtusum perpendicularis CE ex quovis ejus puncto C ad aliam illam AD demissa cadet ad partes anguli acuti CAD.

COR. III. Omnes anguli trianguli aequilateri et duo anguli ad basin trianguli aequicruri acuti sunt.

COR. IV. Ab eodem puncto C extra rectum AD sito ad eandem AD non nisi unica duci potest perpendicularis. Si enim CA et CE forent duae perpendiculares, in triangulo CAE duo anguli forent recti.

§. 81.

Triangulum, in quo unus angulus est rectus, vocatur *rectangulum*; tale, in quo angulus quidam est obtusus, *obtusangulum*. Triangulum in quo nec angulus rectus nec obtusus habetur, cujus igitur anguli omnes sunt acuti, vocatur *acutangulum*. Obtusangula et acutangula triangula quoque generatim dicuntur *obliquangula*. In triangulo rectangulo latus angulo recto oppositum vocatur *hypothenufa*, reliqua autem angulum rectum comprehendunt *catheti* dicuntur, quorum unum plerumque sumitur pro *base* trianguli.

COR. In triangulo rectangulo hypothenufa est latus maximum et in triangulo obtusangulo id, quod angulo obtuso opponitur (§. 69. et 80. Cor. I.).

§. 82.

Si ab eodem puncto extra lineam rectam utcunque assumpto ducantur ad eandem plures aliae rectae, quotcunque libet.

libuerit; earum omnium minima est perpendicularis, et reliquae eo majores sunt, quo magis a perpendiculari recedunt.

DEM. Si rectae CD recta AB est perpendicularis, et ex eodem puncto A ad CD ducatur alia recta quaecunque AE, erit triangulum ABE rectangulum, in quo $AE > AB$ (§. 81. Cor.). Ducatur quaecunque alia AF magis a perpendiculari AB recedens, et triangulum AEF erit obtusangulum, quia $\angle AEF > \angle ABF$ (§. 67.) quare est $AF > AE$ (§. 81. Cor.). F. 30.

COR. Praeter unicam rectam AE nulla alia ex A duci potest ad CD ad eandem partem perpendiculari AB prius ductae AE aequalis. Quae enim intra crura anguli BAE cadunt, omnes rectae AF sunt minores, quae cadunt extra eundem angulum, sunt rectae AE majores.

§. 83.

Si ab eodem puncto extra lineam rectam assumpto ducantur ad eandem una recta perpendicularis, et alia quaedam sub angulo quocunque obliquo; ad alteram perpendiculari partem duci potest tertia priori obliquae aequalis.

DEM. Ex puncto A ad rectam CD cadat perpendicularis AB et alia AE obliqua. Fiat $BG = BE$ et ducta AG erunt triangula ABG et ABE, ob angulos apud B aequales et latera comprehendentia aequalia, sibi congruentia, et $AE = AG$. (§. 59.)

COR. I. Praeter hanc AG nulla alia ad eandem perpendiculari partem ex A ad CD duci potest recta priori AG aequalis (§. 82. Cor.). Hinc generaliter plures duabus rectae inter se aequales ad rectam CD ex eodem puncto A duci nequeunt.

COR. II. Ad eandem partem rectae obliquae AE duci possunt duae aliae invicem aequales et recta AE minores, quarum quidem una cadet intra angulum BAE, altera vero ad alteram perpendiculari partem intra angulum BAG.

COR. III.

COR. III. Ad eandem partem rectae obliquae AE *duci non possunt duae aliae rectae invicem aequales et recta AE majores*, quae enim inter angulum EAB cadunt rectae omnes eadem AE sunt minores, et ideo quoque omnes, quae intra angulum BAG cadunt. Earum autem, quae magis a perpendicularo recedunt, et ideo recta AE majores sunt, si una sumatur, ut AF, altera huic aequalis cadit ad alteram perpendiculari partem versus C, et proinde quoque ad alteram rectae AE partem.

§. 84.

Recta per punctum quoddam intra circulum ducta si producat non nisi in duobus punctis peripheriae occurrit.

F. 31. DEM. In circulo cujus centrum est D ducta sit ejusmodi recta GF, concurrens cum peripheria in punctis G et F (§. 41.) eadem producta denuo concurrat cum peripheria in tertio puncto E, ducatur recta DE, quae erit radius, ideoque $DF = DG = DE$, contra §. 83. Cor. I.

COR. I. Si ex puncto D radio DF majore perpendicularo ex D ad EF describatur peripheria, eadem secabit rectam EF non nisi in duobus punctis G et F, quorum utrumque ad eandem rectae DE partem cadit, si $DF < DE$: si vero $DF > DE$ ad eandem rectae DE partem unum tantum horum punctorum cadere potest.

§. 85.

A puncto D extra rectam EF dato ad eandem ducere rectam perpendicularem.

F. 31. SOL. et DEM. Ex dato puncto D ad rectam EF ducatur DG obliqua quaecunque atque radio DG descripto circulo, qui datam EF praeter G in F secat (§. 84.), ducatur DF. Angulus GDF bisecetur recta DA, quae ipsi EF erit perpendicularis (§. 66.)

§. 86.

Dato angulo datisque duobus lateribus inaequalibus triangulum construere, in quo laterum datorum majus sit angulo dato oppositum.

SOL.

SOL. et DEM. Datus sit angulus A , et praeterea latera B et C . Ad rectam indefinitam EF et punctum E in eadem pro lubitu assumptum constituatur angulus $= A$ (§. 76.) in cuius uno crure sumatur pars ED aequalis lateri minori B (§. 47. Cor.) tum vero centro D et radio C describatur peripheria, quae rectam EF , si opus est productam, in duobus punctis quidem secabit, sed eorum unicum tantum ad eandem cruris ED partem in F cadet (§. 83. Cor. 3.). Ducatur recta DF , quo facto EDF erit triangulum quaesitum.

COR. I. Si sumatur $ED > DF$, duo illa puncta F et G intersectionis peripheriae cum recta EF ad eandem rectae DE partem cadunt. Ductis igitur DF et DG ex iisdem datis non determinatur triangulum unicum, sed indifferenter duo triangula diversa DEG vel DEF . His autem factis triangulum DGF est aequicrurum, ideoque $DGF = F$ (§. 60.). Sed est $DGE + DGF = 2R$, hinc quoque $DGE + F = 2R$. In duobus igitur hisce triangulis est quilibet angulorum illorum, quorum apices non concidunt, alterius complementum ad duos rectos. Hinc unus necessario acutus et alter obtusus est. Si enim unus foret rectus et alter rectus esset, quod contra §. 80. Cor. 4.

COR. II. Hinc porro concludi potest, si recta DF sumatur aequalis perpendiculari ex D ad EF , iterum unum tantum determinari triangulum ita ut in eo casu duo puncta G et F in unum coalescant. Sumta autem DF isto perpendiculo minore solutio fit impossibilis, eo quod DF non attinget rectam EF , quia perpendicularis est brevissima.

§. 87.

Duo triangula, quae unum angulum aequalem et praeterea duo latera angulum aequalem non comprehendentia aequalia habent, tota sunt aequalia, ut et reliqui anguli et tertium latus, si latus angulo aequali oppositum majus est adjacente.

DEM.

F. 33. DEM. Habeant triangula ABC et AEF ista requisita, ut sit angulus $B = E$, latus $AB = AE$, et $AC = AF$. Ponatur ABC in AEF ita ut punctum B in E et BC in EF cadat, quo facto latus BA in EA et punctum A in A cadere debet (§. 17. Cor. 1. 2.) praeterea vero aut AC cadit in AF aut minus. Posteriori casu ad eandem rectae AE partem ex A ad EF ductae sunt duae rectae diversae AC et AF recta AE maiores et simul aequales contra §. 83. Cor. 3. Prius igitur est statuendum, quare est angulus $BAC = EAF$, ideoque triangula sibi congruunt, et angulus $ACB = AFE$, latus $BC = EF$ (§. 59.).

COR. Omnia triangula rectangula, ut et obtusangula in quibus anguli obtusi aequales sunt, si praeterea duo latera angulos rectos vel obtusos non comprehendentia aequalia habent, sibi congruunt, ita ut et reliqui eorum anguli aequales sint, et reliquum latus aequale.

§. 88.

Si duae rectae lineae AB et CD secentur a tertia quadam ita, ut angulus externus EGB interno EHD aequalis sit; recta AB cum recta CD, licet versus utramque partem quousque libuerit producantur, concurrere nequit.

F. 34. DEM. Quia est $EGB = EHD$, erit simul $EGA = EHC$. Concurrant igitur hae rectae vel versus B et D, vel versus A et C productae, atque orietur triangulum, in quo angulus externus lateri HG versus E producto adjacens aequalis est interno opposito, quod est contra §. 67. Proinde nec versus B et D, nec versus A et C, productae concurrere possunt.

§. 89.

Rectae in eodem plano ductae, quae non concurrere possunt, utcunque producantur, dicuntur *Rectae Parallelae*.

COR. I. Si EF secet rectas AB et CD ita, ut angulus externus EGB interno EHD aequalis sit, rectae AB et CD

CD sunt parallelæ (§. 86.). Duæ igitur rectæ eidem tertiæ perpendiculares parallelæ sunt.

COR. II. Per punctum G extra rectam CD datum ducitur alia AB ipsi CD parallela, sumto puncto H quocunque in D et ducta HG, ad quam versus E productam construatur angulus EGB angulo EHD æqualis.

§. 90.

Si recta EF secet rectas AB et CD ita ut 1) anguli alterni AGF et EHD æquales sint, vel 2) summa angulorum internorum EHD + BGF = 2R; rectæ AB et CD sunt parallelæ.

DEM. Si primo $AGF = EHD$, erit ob $AGF =$ F. 34. EGB , simul $EHD = EGB$, ex quo patet, rectas AB et CD esse parallelas. (§. 89. Cor. 1.). Quodsi secundo sit $EHD + BGF = 2R$, quia etiam $BGF + AGF = 2R$, erit $EHD + BGF = BGF + AGF$, et proinde $EHD = AGF$, atque rectæ AB et CD parallelæ (per cas. 1.).

§. 91.

Quodsi a puncto quodam A rectæ EC ad rectam FD, quæ cum EC in eodem est plano, ducatur perpendicularis AB ita ut angulus ABD sit rectus, atque hoc facto angulus BAC acutus et proinde BAE obtusus sit: omnes perpendiculares, quæ a recta EC ad rectam FD duci possunt, erunt inæquales, et quidem versus partes anguli acuti BAC decrescent, versus partes vero anguli obtusi BAE crescent, quo magis a perpendiculari AB decedunt.

DEM. Quia est BAC angulus acutus, recta BG ex F. 25. puncto B ad rectam EC perpendicularis ad partem hujus anguli acuti cadit, ita ut sit GBD angulus acutus. Proinde et recta ex G ad FD perpendicularis ad partes anguli acuti GBD cadit (§. 80. Cor. 2.) atque hanc GH ipsa AB minorem esse ultro patet, Quia enim $AB > BG$, et $BG > GH$ (§. 81. Cor.) erit et $AB > GH$ (§. 18. Cor. 3.). Sumatur jam punctum aliquod Q, quod cadit intra puncta

cta A et G in recta EC et ducatur QR ad FD perpendicularis, erit $QR < AB$ et $QR > GH$. Ductis enim rectis BQ et RG erit $AQB > AGB$ proinde obtusus et hinc $AB > BQ$, deinde $BQ > QR$, hincque $AB > QR$. Præterea cum et angulus QGR obtusus sit, erit $QR > RG$, $RG > GH$, proinde $QR > GH$. Simili modo patet, rectam AB maiorem esse, quacunque alia normali qr inter AB et GH cadente, si punctum q puncto A quantumvis propinquum sit. Tum vero iterum simili prorsus ratione patet, ipsam qr maiorem esse sequente normali QR, si etiam punctum Q puncto q quantumvis propinquum sit. Ducta enim recta rQ, ea rectam BG secabit in p, ut pQG fiat triangulum apud G rectangulum. Proinde est pQG angulus acutus et pQA obtusus. Hinc $qr > rQ$, $rQ > QR$, proinde $qr > QR$. Cum igitur sic pergere liceat usque ad GH, haec ipsa GH omnium earum, quae a termino A usque G ad rectam FD cadunt perpendiculares, minima est.

Quia recta ex G ad FD perpendicularis ad partes anguli acuti GBD cadit, iterum angulus HGC acutus erit. Si igitur denuo ex H ad EC ducatur normalis HI, ea ad partes anguli acuti HGC cadit et angulus IHD erit acutus. Perpendicularis itaque ex I ad FD, nimirum IK, ad partes anguli acuti IHD cadit, et angulum KIC acutum efficit. Ita pergendo duci possunt perpendiculares KC, CD, etc. quae omnes ab AB magis recedent. Erit vero $GH > HI$, $HI > IK$ proinde $GH > IK$. Porro $IK > KC$, $KC > CD$, proinde $IK > CD$. Sic argumentando quousque lubet pergere licet, atque tum eodem modo ut ante demonstratur, omnes, quae cadunt inter GH et IK ex AC ad BD perpendiculares, sibi invicem inæquales et eo minores esse, quo magis ad IK accedunt, ita ut IK omnium minor sit. Idem argumentandi modus adplicatur ad perpendiculares inter IK et CD atque sequentes omnes. Ex his igitur patet veritas

rim 12

primae partis illius, quae demonstranda erat, propositionis.

Quod attinet ad perpendiculares, quae ex EC ad FD F. 36. ad partes anguli obtusi EAB cadunt; sic ratiocinandum erit. Ex puncto A ad rectam EC erigatur perpendicularis, AL, quae intra crura anguli EAB cadet, atque rectam BF vel secabit, vel non. Si prius contingat, et intersectionis punctum sit L, ex puncto L super FB erigatur perpendicularis, quae iterum rectam AE in puncto quodam M secabit aut non. Contingat intersectio, atque ex puncto M supra AE erigatur perpendicularis MN. Sic ratiocinando pergatur, atque per N ducatur ad EB normalis NO, per O ad AE normalis OP, per P normalis PE, per E normalis EF etc. ubi semper supponitur, hasce normales utramque rectam EA et FB in punctis N, O, P, E, F etc. secare. Id quod si perpetuo contingat, fiet $AL > AB$, $ML > AL$, proinde $ML > AB$. Porro $MN > ML$, $ON > MN$, ergo $ON > ML$: simili modo $OP > ON$, $EP > OP$, proinde $EP > ON$, etc.

Jam sumatur punctum aliquod V puncto M valde contiguum atque ab eodem ducatur VX ipsi FB perpendicularis, et ducatur LV; erit $MVL > MAL$, proinde $ML > VL$, $VL > VX$, hincque $ML > VX$. Porro sumatur aliud punctum S ipsi V quatumvis contiguum, et ex eodem ad FB ducatur perpendicularis ST; si jam ducatur SX, quae rectam AL in puncto quodam Z secabit; erit angulus ZSA acutus et hinc ZSM obtusus. Proinde $VX > SX$, $SX > ST$, ideo $VX > ST$. Quoniam ita pergere licet, usque ad AB, haec ipsa AB earum perpendicularium, quae inter ML et AB cadunt, minima, ML vero maxima erit. Idem argumentandi modus adplicari potest ad perpendicula inter ON et ML, inter EP et ON, et sic porro cadentia.

Quodsi vero (quod in antecedentibus fieri supponitur) F. 37. recta AL ad AE in A perpendicularis alteram BF non secet; sumatur punctum S ipsi A utcunque contiguum,
C um,

um, atque ad BF ducatur perpendicularis ST et hoc facto etiam recta TA. Dico, angulum SAT necessario esse obtusum. Quodsi enim SAT foret acutus, ipsa AL caderet inter AT et AB et ideo producta rectam BF secare posset, quia peripheriam trianguli ATB secat in apice A anguli TAB (§. 41. Cor.) quod contra hypothefin est. Pari ex ratione angulus SAT nequidem rectus esse potest, quia alias AT in AL caderet, et producta rectam BF secaret contra hypothefin. Est igitur SAT obtusus, et proinde $ST > AT$, $AT > AB$, hincque $ST > AB$. Sumatur nunc aliud punctum V ab A magis quidem quam S remotum, ipsi vero quantumvis contiguum, atque ducatur VX ipsi BF normalis; erit ducta SX angulus VSX iterum obtusus. Si enim VSX foret rectus, recta AL rectam BX secare posset, quia sita est in figura quadrilatera SABX, cujus perimetrum secat in A, quod punctum tam in AS, quam in AB situm est, proinde AL cum hisce rectis denuo non concurrit, neque etiam cum SX, quia posita sub hypothefi cum eadem est parallela. Ergo AL producta secare debet BX, (§. 41. cum Cor.) quod est contra hypothefin. Si angulus VSX foret acutus, fiet ASX obtusus, et proinde nec hoc casu AL cum SX concurreret (§. 80. Cor. 1.) ideo et hoc casu rectam BX secare posset, contra hypothefin. Angulus igitur VSX obtusus est. Proinde $VX > SX$, $SX > ST$, hincque $VX > ST$. Sic ratiocinando progredi licet. Capiatur enim tertium perpendicularum YZ atque ducta VZ erit angulus YVZ obtusus, quod eodem modo ut ante de angulo VSX demonstratur. Proinde $YZ > VZ$, $VZ > VX$, ergo $YZ > VX$.

F. 36.

Quodsi AL quidem apud L secaret rectam BF, sed vero LM cum AE non concurreret; omnia perpendiculara ST, VX, etc. quae ex AE ad BF duci possent, inter puncta B et L cadere deberent. Quodsi enim unum eorum ut ON rectam BF in alio puncto N, extra interval-

lum

lum BL cadente, fecet; oriretur quadrilaterum ABNO, in
cujus terminis LM sita secaret latus BN et proinde adhuc
aliud latus, quod esse deberet AE, quia ipsis AB et NO
parallela est. Hoc autem assumpto contrarium est. Omnia
igitur perpendiculara, quae ex AE ad BF duci possunt, in-
ter puncta B et L cadunt, et proinde ducto perpendicu-
lo ST quocunque ipsi AB propinquo, atque recta TA,
fit SAT angulus obtusus, et ideo $ST > AT$, $AT > AB$,
proinde $ST > AB$. Capiatur punctum S magis ab A di-
stans ab eoque ad BF ducatur perpendicularum sequens
VX, atque recta XS secabit rectam AL apud Z, ut fiat ZSA
triangulum apud A rectangulum, in quo ZSA acutus ideo-
que ZSM obtusus est. Ex quo erit $VX > SX$, $SX > ST$,
proinde $VX > ST$. Similia ratiocinia adplicari possent
ad omnia reliqua perpendiculara, si LM non secaret rectam
AE. Quod si jam recta LM secaret rectam AE apud M,
perpendicularum vero MN non secaret rectam BF; vel
MN secaret quidem BF, NO autem non fecet rectam
AE, eodem prorsus modo ut ante demonstrari posset,
perpendiculara versus hanc anguli obtusi CAB partem per-
petuo crescere, quo magis ab ML decedunt. Sicque
etiam secunda propositionis demonstrandae pars evi-
cta est.

§. 92.

*Quod si supra rectam AB erigantur duo perpendiculara
aequalia AC et BD, atque eorum puncta extrema C et D
connectantur recta CD, erunt anguli C et D recti.*

DE M. Angulus C nec acutus nec obtusus est. Si r. 33.
enim C foret acutus, foret $BD < AC$; si C foret obtu-
sus, esset $BD > AC$, utrumque contra hypothesein. Pro-
inde C angulus rectus est. Pari ex ratione etiam D nec
acutus est, nec obtusus. Si enim D sit acutus, foret AC
 $< BD$; si D obtusus, esset $AC > BD$, quod utrum-
que contra hypothesein est. Proinde et D angulus re-
ctus est.

§. 93.

In quovis triangulo rectangulo summa duorum angulorum acutorum angulo recto aequalis est.

DEM. Si triangulum ABC fuerit apud A rectangulum, ex puncto B ad latus AB erigatur perpendicularum BD, quod fiat $= AC$. Ducatur CD, erit angulus $D = R = ACD$. Et quia in triangulis ABC et DBC apud A et D rectangulis habetur $BC = BC$, $BD = AC$, erit angulus $ACB = CBD$, $ABC = BCD$ (§. 87. Cor.). Sed $ABC + CBD = R$, proinde et $ABC + ACB = R$.

COR. I. Hinc summa omnium angulorum trianguli rectanguli duobus angulis rectis aequalis est.

F. 39. COR. II. Quodcunque triangulum obliquangulum ABC in duo dividitur rectangula ABD et BDC, si ex apice anguli obtusi B, si sit obtusangulum, vel cujuscunque pro arbitrio sumti, si sit acutangulum, ad latus oppositum AC ducatur perpendicularis BD (§. 80. Cor. 2.). Quia jam $A + ABD = R$, et $C + DBC = R$ erit $A + C + ABD + DBC = 2R$, id est $A + C + ABC = 2R$. In quovis igitur triangulo summa omnium angulorum duobus angulis rectis aequalis est.

COR. III. Si latus quodcunque trianguli producat, erit angulus triangulo externus, quem latus productum cum adjacente comprehendit, aequalis summae duorum internorum eidem in triangulo oppositorum.

COR. IV. Si detur summa duorum trianguli angulorum $A + B$, erit tertius $C = 2R - (A + B)$.

COR. V. Tres anguli cujusvis trianguli simul sumti aequales sunt tribus angulis simul sumtis cujuscunque trianguli alterius.

COR. VI. Quodsi igitur in uno triangulo duo anguli aequales sint duobus angulis in altero triangulo, etiam reliquus reliquo aequalis est. Atque si duo triangula unum angulum aequalem habent, reliquorum summae aequantur.

COR. VII.

COR. VII. In omni figura rectilinea summa omnium angulorum aequalis est bis tot angulis rectis, quot sunt figurae latera, demtis quatuor rectis. Intra figuram enim sumi potest punctum quodcunque, a quo si ad omnium figurae angulorum apices ducantur rectae, obtinebuntur tot triangula, quod figura habet latera, ideoque bis tot anguli recti, a quibus autem auferri debet summa angulorum circa punctum in figura assumtum, quippe qui ad figuram non pertinent.

COR. VIII. In omnibus figuris rectilineis, quorum numerus laterum idem est, summa omnium angulorum ejusdem est magnitudinis.

§. 94.

Triangula, quae unum latus aequale habent, et duos angulos, tota sunt aequalia, atque reliqua latera aequalia habent et reliquos angulos.

DEM. Si in duobus triangulis ABC et DEF duo anguli unius aequales sint duobus angulis alterius, singuli singulis; etiam tertius prioris tertio alterius aequalis est (§ 93. Cor. 6.). Quod si igitur fuerit latus $BC = EF$, angulus $B = E$, et $F = C$, erit $A = D$. Jam dico, etiam fore latus $BA = ED$. Ponatur enim BA in $= ED$, erit aut $BA > ED$, aut $BA < ED$. Si prius, erit $DE =$ parti ipsius BA , quae sit BG ducaturque CG , et triangulum GBC congruet triangulo DEF (§. 59.) ita ut sit $GCB = F = ACB$, quod contra §. 18. Cor. 2. Si posterius, erit $BA =$ parti ipsius ED , ideo recta BA producta tandem fit $= ED$. Ponatur itaque $BH = ED$, ducaturque CH , iterum erit triangulum $HBC = DEF$ (§. 59.) et $HCB = F = ACB$ contra §. 18. Cor. 2. Ideo non potest non esse $BA = ED$, et proinde triangulum ABC triangulo DEF congruens (§. 59.).

COR. I. Quod si duo triangula ABC et GEF apud B et E rectangula cathetos BC et EF aequales habeant, angulus vero GFE major sit angulo C, erit cathetus $GE >$

38 SECTIO III. DE TRIANGVLIS PLANIS

AB. Ad latus enim EF et punctum F construi potest angulus $DFE = C$, cujus crus DF cadit intra crura FE et FG anguli GFE proinde intra terminos trianguli GFE, ideoque productum fecat latus GE (§. 41. Cor.) in puncto quodam D intra G et E sito, ut sit $DE < GE$. Ob triangula vero ABC et DEF congruentia est $AB = DE$, proinde $AB < GE$.

F. 15. COR. II. Recta CD, quae ex apice C ducitur ad basin AB trianguli aequicruri ABC perpendicularis, eandem bifecat. Quia enim in triangulis ACD et BCD anguli apud D aequales sunt, et praeterea anguli A et B (§. 60.) latus $CA = CB$; triangula ACD et BCD sibi congruunt.

COR. III. Recta per circuli centrum ducta, quae chordae ejusdem circuli perpendicularis est, eandem bifecat.

§. 95.

F. 81. Si quantum aliquod DF minus fuerit alio quanto AB, atque quantum DF continuo sibi ipsi addatur; tandem quantitatem ut DE, quae quanto AB major sit, produci posse, postulamus.

§. 96.

Duae rectae, quae a tertia quadam ita secantur, ut anguli interni ad eandem hujus rectae secantis partem positi summam duobus rectis minorem efficiant, concurrunt ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores, si quoad opus est producantur.

F. 41. DEM. Quodsi recta AB secet duas alias AC et BD, atque sit $CAB + ABD < 2R$, vel unus horum angulorum rectus erit, vel non. Sit primo unus eorum ut ABD rectus, eritque alter CAB acutus. In recta AC sumatur punctum E quodcunque, ab eoque ad AB ducatur normalis EF. Fiat $FG = AF$, $GH = AG$, $HI = AH$, sicque pergatur, donec inveniatur $AI > AB$, quod semper possibile erit (§. 95.). Deinde in recta AC fiat $EK = AE$, $KL = AK$, $LC = AC$, sicque pergatur, donec in AC tot habeantur partes, quot sunt in AI. Ducantur rectae

ctae KG, LH, CI, etc. exque una cum FE producantur donec sit $EM = EF$, $KN = GK$, $LO = HL$, etc. tum vero ducantur MK, NL, OC etc. atque triangu-
 la AFE et EMK, AGK et NKL, AHL et OLC etc. erunt congruentia ob angulos apud E, K, L, etc. aequales et latera comprehendentia aequalia. Proinde est $MK = AF = FG$, $NL = AG = GH$, $CO = AH = HI$ et ita porro. Cum igitur anguli apud F et M sint recti, et $FG = MK$; erunt et anguli G et MKG recti. Quia praeterea anguli G et N sunt recti et $GH = NL$, etiam H et NLH recti sunt, atque ob H et O rectos et $HI = OC$ fiunt quoque I et OCI anguli recti (§. 92.). Oritur itaque trian-
 gulum AIC apud I rectangulum, intra quod cadit re-
 cta BD, quae proinde producta duo saltem hujus trian-
 guli latera secabit. Quare cum ea latus AI secet, et la-
 tus IC ipsi parallelum (§. 89. Cor. 1.) secare non possit, se-
 care debet rectam AC.

Quodsi jam neuter angulorum CAB et ABD sit re- P. 42.
 ctus; unus saltem eorum debet esse acutus quia si uter-
 que obtusus esset, eorum summa duobus rectis major
 esset, quod assumpto est contrarium. Sit igitur ABD
 acutus, atque BAC vel acutus vel obtusus erit. Et quia
 $ABD + BAC < 2R$ et $ABD + DBE = 2R$, erit $ABD +$
 $BAC < ABD + DBE$, ideoque $BAC < DBE$. Ad BA
 in puncto A construatur angulus $BAF = DBE$, atque AF
 supra AC cadet ob $BAF > BAC$, et recta AF ipsi BD ob
 angulum externum DBE aequalem interno BAF erit pa-
 rallela. Ex A ad BD ducatur normalis AG, quae cadet
 ad partes anguli acuti ABD, atque angulus GAF sit re-
 ctus. Si enim GAF foret acutus, recta AF cum GD
 concurrere posset (*per dem. cas. 1.*) cum qua tamen paral-
 lela est. Si GAF esset obtusus, GAH foret acutus at-
 que FH concurreret cum DB versus H et B, quae rectae
 vero sunt parallelæ. Proinde angulus GAF non potest
 non esse rectus. Cum igitur $CAG < GAF$, erit CAG angu-
 lus acutus, et proinde hoc quoque casu AC producta

40 SECTIO III. DE TRIANGVLIS PLANIS

cum recta GD concurrit. Quod si AC non inter AF et AG, sed inter AG et AB caderet, producta secaret rectam BG (§. 41. Cor.) proinde et hoc casu veritas propositionis constat.

§. 97.

Dato latere datisque duobus angulis, quorum summa duobus rectis minor sit, construere ejusmodi triangulum, in quo anguli dati dato lateri adjacent.

P. 43. SOL. Si detur latus AB et anguli C et D, ad punctum A rectae datae ponatur angulus $A = C$, et ad punctum B angulus $B = D$. Producantur erura donec sese in E secent.

DEM. Est enim $A = C$ et $B = D$ (constr.), cumque $C + D < 2R$ (hyp.) etiam erit $A + B < 2R$, quare rectae AE et BE sese secando (§. 96.) triangulum quaesitum terminabunt.

§. 98.

Dato latere et duobus angulis, quorum summa duobus rectis minor sit, triangulum construere, in quo unum datorum angulorum lateri dato adjacet, alterum vero eidem opponitur.

P. 44. SOL. Si detur latus AC et anguli D et F, quacatur summa angulorum D et F (§. 76. Cor.) hujusque complementum ad duos rectos (§. 29). Inventum complementum $2R - (D + F) = E$ constituatur ad C (§. 76.), ad punctum A vero angulus D. Producantur latera, donec sese secent in B.

DEM. Quia est $(D + F) < 2R$ et $2R - (D + F) = E$ (constr.) erit $E + D + F = 2R$, et $E + D < 2R$ quare rectae AB et CB sese secabunt, (§. 96.) ac terminabunt triangulum ABC in quo $A = D$ (constr.) et $B = 2R - (A + C)$ (§. 93. Cor. 4.) $= 2R - (D + E) = F$.

§. 99.

Si duae rectae parallelae AB et CD secentur a tertia recta EF; erit summa angulorum internorum EHD et BGF ad easdem partes rectae secantis positorum aequalis duobus angu-

angulis rectis; externus angulus EGB erit interno EHD, et AGF alterne posito EHD aequalis.

DEM. Si foret $EHD + BGF < 2R$, rectae AB et CD ad partes B et D productae concurrerent et proinde non essent parallelae. Si vero sit $EHD + BGF > 2R$, ob $EHD + BGF + AGF + EHC = 4R$, foret $AGF + EHC < 2R$, atque AB et CD versus A et D productae concurrerent, ideoque iterum non essent parallelae, contra hypothesein. Est igitur summa $EHD + BGF = 2R$. Praeterea quoque habemus $AGF + BGF = 2R$, ideo $AGF + BGF = EHD + BGF$, et $AGF = EHD$. Ex quo patet, ob $AGF = EGB$, fore etiam $EGB = EHD$. F. 34.

COR. I. Per idem punctum G extra rectam CD datum non nisi unica duci potest recta AB ipsi CD parallela. Quodsi enim praeter AB per G ducta foret IK ipsi CD parallela foret $KGF + EHD = 2R$ et $BGF + EHD = 2R$, proinde $KGF + EHD = BGF + EHD$, et $KGF = BGF$, pars aequalis toti, quod impossibile est.

COR. II. Hinc recta secans unam duarum parallelarum etiam secat alteram. Si enim AB fuerit ipsi CD parallela et EF secet rectam AB in atque eadem producta non secat rectam CD, per idem punctum G ductae forent duae rectae diversae eidem CD parallelae contra Cor. I.

COR. III. Recta igitur, uni duarum parallelarum perpendicularis, si producat quoad opus est, etiam alteri perpendicularis erit.

§. 100.

Si duae lineae rectae AB et CD ducantur in eodem plano eidem tertiae EF parallelae, eadem et inter se parallelae erunt.

DEM. Recta GH quae secat rectam EF in I, etiam secat ipsi parallelam CD in K, ut et alteram AB ipsi EF parallelam in L, (§. 99. Cor. 2.) ita quidem ut sit $GLB = GIF$, et $GKD = GIF$ (§. 99.) ex quo apparet, esse $GLB = GKD$, et proinde rectam AB ipsi CD parallelam. F. 45.

§. 101.

Rectarum parallelarum distantiae a se mutuo omnes aequales sunt.

DE M. Si rectae AB et CD sint parallelae atque EG fuerit distantia rectae AB in puncto E a recta CD, erit quaevis alia ipsius AB a CD distantia ut FH ipsi EG aequalis: Ducta enim recta EH, quia EG et FH quoque sunt parallelae (§. 89. Cor. 1.) erit angulus HEG = EHF et FEH = EHG (§. 99.) quare triangula EHF et EHG sibi mutuo congruunt, (§. 94.) estque EG = FH.

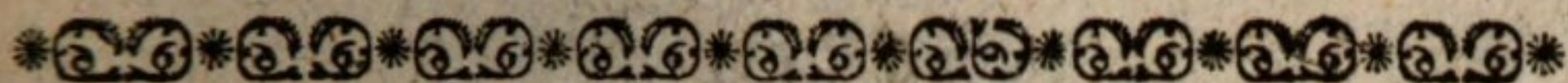
COR. I. Si duae distantiae EG et FH unius rectae AB ab alia CD in eodem plano ducta aequales sunt, reliquae omnes aequales sunt. Tum enim sunt anguli FEG + EGH = 2R (§. 92.) et proinde AB et CD parallelae, hinc et omnes eorum distantiae aequales.

E. 47. COR. II. Si duae distantiae EF et GH unius rectae AB ab altera CD sunt inaequales, reliquae omnes sunt inaequales, atque rectae si producantur concurrunt ad eas partes ubi est distantia minor GH. Est enim angulus GEF non obtusus, quia alias esset GH > EF (§. 91.) nec rectus, quia tum foret GH = EF, utrumque contra hyp. Proinde angulus GEF est acutus et ideo rectae versus B et D concurrunt.

E. 48. COR. III. Omnia puncta E, F, G, quae ab aliqua recta aequaliter distant, sunt in eadem recta. Si enim per duo eorum E et F ducatur recta AB, ea secabit distantiam GH tertii a CD vel in puncto G, vel in alio I. Si posterius sit, foret IH = FK = GH, quod imp.



SECT.



SECTIO IV.

DE

PARALLELOGRAMMIS EORVMQVE COMPARATIONE ET INTER SE, ET CVM TRIANGVLIS PLANIS.

§. 102.

Si duae rectae AB et DC parallelae et aequales fuerint, atque earum puncta extrema connectantur rectis AD et BC, haec rectae AD et BC sunt parallelae.

DEM. Ducta enim AC fiunt triangula ABC et ADC F. 49. congruentia ob angulum $BAC = ACD$ et latera comprehendentia aequalia. Ideo fiunt anguli ACB et DAC aequales, proinde rectae AD et BC parallelae (§. 90.).

§. 103.

Ideo possibilis est figura quadrilatera, cujus duo quaecvis latera opposita sunt parallelae. Ejusmodi quadrilaterum *Parallelogrammum* vocatur.

COR. Quadrilaterum igitur in quo duo latera sibi opposita aequalia sunt et parallelae est parallelogrammum.

§. 104.

In omni parallelogrammo duo quilibet anguli eidem lateri adjacentes simul sumti duobus angulis rectis aequales sunt. (§. 99.).

§. 105.

In omni parallelogrammo anguli oppositi aequales sunt.

DEM. Sit figura BD parallelogrammum, et erit A F. 49. $+ B = 2R = A + D$ (§. 104.) hincque $B = D$.

COR. Si unus angulorum parallelogrammi est rectus; quilibet reliquorum est rectus. Si vero unus parallelogrammi angulus obliquus est; et reliqui omnes sunt obliqui.

§. 106.

44 SECTIO IV. DE COMPARATIONE PARALLELO

§. 106.

Parallelogrammum, in quo omnes anguli sunt recti, vocatur *rectangulum*, cujus anguli autem obliqui sunt, *obliquangulum* dicitur.

§. 107.

In omni parallelogrammo latera opposita sunt aequalia.

DEM. In parallelogrammo BD ducta diagonali AC erit angulus $BAC = ACD$ et $BCA = CAD$ (§. 99.). Ideo triangula ABC et ADC sibi congruunt ita ut sit $AD = BC$ et $AB = DC$. (§. 94.).

COR. Omne parallelogrammum a recta diagonali in duo triangula congruentia dividitur.

§. 108.

Dato angulo et duobus lateribus, quae angulum illum comprehendunt, construere parallelogrammum.

SOL. Datus sit angulus D et praeterea latera E et F. Fiat $DA = E$ et $DC = F$ et ducta recta AC super eadem construatur triangulum ABC, in quo $AB = DC$ et $BC = AD$, quo facto erit quadrilaterum BD quaesitum parallelogrammum.

DEM. Triangula ADC et ABC sibi congruunt ita ut sit angulus $BAC = ACD$ et $BCA = CAD$ (§. 75.) quare latera AB et CD, AD et BC sibi sunt parallela. (§. 90.).

COR. I. Ex demonstratione simul patet veritas hujus propositionis: Omne quadrilaterum, cujus latera opposita aequalia sunt, parallelogrammum est.

COR. II. Si angulus D fuerit rectus, eadem operatione construetur parallelogrammum rectangulum, (§. 105. Cor. et §. 106.).

COR. III. Si vero latera data E et F sunt aequalia, construetur parallelogrammum aequalium laterum.

§. 109.

Parallelogrammum aequalium laterum et rectangulum vocatur *Quadratum*. *Rhombus* autem est parallelogram-

grammum aequalium laterum obliquangulum. Parallelogrammum obliquangulum inaequalium laterum vocatur *Rhomboides*, et parallelogrammum rectangulum inaequalium laterum simpliciter *Rectangulum* dici solet.

COR. Constructio Quadrati ex dato latere, Rectanguli ex datis duobus lateribus, Rhombi ex dato latere et angulo, et Rhomboidis ex dato angulo et duobus lateribus eum angulum comprehendentibus absolvitur ope §phi 108. coll. cum §. 78.

§. 110.

Parallelogramma omnia, in quibus aequales anguli comprehenduntur a lateribus aequalibus, sunt aequalia,

DEM. Congruunt enim inter se.

COR. I. Omnia Rectangula, in quibus duo latera angulum rectum comprehendunt aequalia sunt, et omnia quadrata aequalium laterum sunt aequalia.

COR. II. Quadrata inaequalium laterum sunt inaequalia, ita ut quadratum sit minus, cujus latera lateribus alterius minora, majus vero, cujus latera alterius lateribus majora sunt.

COR. III. Aequalium quadratorum aequalia sunt latera. Duorum autem quadratorum inaequalium majoris latera sunt majora, et minoris minora.

§. 111.

Altitudo parallelogrammi est distantia unius ejus laterum ab opposito. *Altitudo trianguli* est distantia apicis unius ejus angulorum a latere ei angulo opposito. Latera, ad quas altitudines referuntur, *bases* dicuntur parallelogrammorum vel triangulorum.

COR. I. Si in rectangulo aliquod laterum sumatur pro basi, latus eidem adjacens erit altitudo (§. 101.): in quadrato autem, quodcunque latus pro basi sumatur, altitudo basi aequalis erit.

COR. II. Omnia rectangula, quorum bases et altitudines aequales sunt, ipsa sunt aequalia.

COR. III.

46 SECTIO IV. DE COMPARATIONE PARALLELO

COR. III. Si triangula, quorum bases sitae sunt in eadem recta, aequales habeant altitudines, recta quae tranfit per apices angulorum basibus oppositorum, illi rectae, in qua bases triangulorum sitae sunt, parallela est. (§. 101. Cor. 1.).

§. 112.

Quodlibet parallelogrammum obliquangulum aequale est rectangulo aequalis basis et altitudinis.

F. 50. DEM. A punctis extremis B et C baseos parallelogrammi obliquanguli BD erigantur perpendiculares BE et CF, atque producantur, donec basin oppositam AD pariter productam secant in punctis E et F, eritque BF rectangulum (§. 105. 106.) ejusdem cum AC basis et altitudinis, cujus latus BE aut latus DC parallelogrammi AC

F. 51. fecabit, aut non. Si *posterius* erit $BE = CF$ et $AB = DC$ (§. 105.) ideoque triangulum rectangulum ABE alteri DCF aequale, quare triangulo ABE subtracto ab AC et ejus loco addito DCF, erit rectangulum $BF = AC$. (§. 21.). Si *prius*, iterum est $BE = CF$ et $AB = DC$, hincque et triangulum $ABE = DCF$, quare utrinque ablato triangulo DGF. et ejus loco BGC addito, hoc quoque casu erit $BF = AC$ (§. 21.).

§. 113.

Parallelogramma quaecunque aequalium basium et altitudinum sunt aequalia.

F. 52. DEM. Si parallelogramma sunt rectangula, propositio patet ex §. 111. Cor. 2. Si unum est rectangulum et alterum obliquangulum, propositio vera est ex §. 112. Si denique proposita fuerint duo parallelogramma obliquangula, AC et HK aequalium basium et altitudinum, atque ex punctis extremis B et C basis unius illorum erigantur perpendiculares BE et CF oppositae basi AD si opus est productae occurrentes in punctis E et F; terminabunt haec rectae parallelogrammum rectangulum BF, cui parallelogrammum AC aequale est. Quare cum et

HK eidem BF aequale sit (§. 112.), erit etiam $AC = HK$.

COR. I. Si parallelogramma quaecunque super eadem vel aequalibus basibus in eadem recta sitis constituta fuerint, et in eisdem parallelis ita, ut latera eorundem basibus opposita cadant in rectam basibus parallelam, erit et altitudo eorundem aequalis (§. 101. et 111.) proinde ipsa erunt aequalia.

COR. II. Dato parallelogrammo obliquangulo facile construitur rectangulum, vel aliud quodcunque parallelogrammum sub dato angulo ejusdem cum dato basis et altitudinis, proinde dato aequale.

COR. III. Parallelogrammorum, si aequales habent altitudines, summa aequalis est parallelogrammo ejusdem illius altitudinis, et cujus basis est basium priorum summa.

§. 114.

Triangula aequalium basium et altitudinum aequalia sunt.

DEM. Si triangula ABC et DEF habent conditiones indicatas, lateribus AB et BC et angulo B comprehenso compleatur pgr. BG, atque lateribus ED et EF et angulo E comprehenso pgr. EH (§. 108.) erit pgr. $BG = EH$. Sed $ABC = \frac{1}{2}BG$ et $DEF = \frac{1}{2}EH$ (§. 105. Cor.) proinde est $ABC = DEF$ (§. 22. Cor. 3.).

COR. I. Idem de triangulis, quae super eadem vel aequalibus basibus constituta sunt intra easdem parallelas verum est (§. 101. et 111.).

COR. II. Dato triangulo facile construitur aliud ejusdem basis altitudinis sub angulo dato vel pro arbitrio sumto quod dato proinde aequale fiet.

COR. III. Si triangula aequales habent altitudines et inaequales bases, triangulum, cujus basis major est, majus est eo, cujus basis est minor: triangulorum vero, quae aequales bases et altitudines inaequales habent, illud majus est, cujus altitudo est major. Si denique duo da-

48 SECTIO IV. DE COMPARATIONE PARALLELO

ta sint triangula, quorum unius basis major est base alterius et simul altitudo major altitudine hujus; prius triangulum posteriore majus est. Hinc triangula aequalia aequalium basium aequales habent altitudines.

COR. IV. Triangulorum aequalium altitudinum summa aequalis est triangulo ejusdem illius altitudinis, et cujus basis est basium priorum summa.

§. 115.

Si parallelogrammum et triangulum eandem habuerint basin, eandemque altitudinem, parallelogrammum trianguli duplum erit.

P. 54. DEM. Si parallelogrammum BD et triangulum EFG eandem habeant basin et altitudinem, ducatur in BD diagonalis AC, eritque $BCA = ACD$ (§. 105.) ideoque $BD = 2ABC$. Verum altitudo trianguli ABC est aequalis altitudini parallelogrammi BD, cujus altitudo aequalis est altitudini trianguli EFG, hinc et altitudo triangulorum ABC et EFG est aequalis, ex quo sequitur esse triang. $ABC = EFG$ (§. 112.) ergo est $BD = 2EFG$.

COR. Si triangulum cum parallelogrammo super eadem vel aequalibus basibus constitutum fuerit inter easdem parallelas, idem sequitur (§. 101. et 111.).

§. 116.

Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum construere sub dato angulo D.

P. 55. SOL. Per verticem A trianguli dati ducatur AG basi BC parallela (§. 89. Cor. 2.). Bifecetur BC in E atque ad EC in puncto E constituatur angulus FEC dato D aequalis (§. 76.). Per C ducatur CG ipsi EF parallela, erit factum, quod quaerebatur.

DEM. Est FC parallelogrammum (§. 103.) $= 2AEC$ (§. 115. Cor.) et triang. $ABC = 2AEC$ (§. 112. cum Cor. 4.). Ergo est $FC = ABC$. Praeterea angulus $FEC = D$ (constr.).

§. 117.

§. 117.

Si in parallelogrammo BD ducatur diagonalis AC, et per punctum in eadem quodvis G rectae EF et HI lateribus parallelae, erit figura FI aequalis figurae GB.

DEM. Nam triangula $ACD = ACB$, $CGH = F. 56.$
 CGF , atque $AGE = AGI$ (§. 107. Cor.). Hinc aequalibus ab aequalibus subtractis relinquuntur figurae FI et GB aequales.

§. 118.

Ad datam rectam A constituere parallelogrammum aequale triangulo dato ABC sub angulo D dato.

SOL. Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum FC in dato angulo D construatur (§. 116.). Basis EC parallelogrammi inventi producaturs versus H, et fiat $CH = A$. Per H ducatur recta lateri GC parallela, quae lateri FG producto occurret in I. Ducatur IC et producaturs, donec cum latere FE pariter producto in K concurrat. Per K ducatur KL ipsi EH parallela, erit CL parallelogrammum, quod quaeritur. F. 57.

DEM. Est enim $CL = FC$ (§. 117.) = ABC (constr.) $CH = A$ (constr.) et $GML = FKL = FEC$ (§. 99.) = D (constr.).

COR. Hinc dato cuilibet triangulo aequale rectangulum construitur super qualibet recta data AB, sumendo angulum $FEC = D$ recto aequalem (§. 105. Cor.).

§. 119.

Ad datam rectam lineam FG construere parallelogrammum FL aequale cuivis figurae rectilineae datae ABCD sub angulo E vel dato vel pro arbitrio sumto.

SOL. et DEM. Data figura rectilinea resolvatur F. 58. in triangula BAD, BCD. Fiat Pgr. $FH = BAD$ ita ut ang. $F = E$. Producta FI ad HI applicetur Pgr. $IL = BCD$ sub eodem angulo E, erit Pgr. $FL = FH + IL$ (§. 113. Cor. 3.) = ABCD.

§. 120.

In triangulo rectangulo quadratum hypotenuse aequale est quadratis cathetorum simul sumtis.

r. 59.

DEM. Singulorum laterum trianguli ABC ad A rectanguli construuntur quadrata. Cum jam angulus BAC sit rectus et BAK rectus, CA et AK jacent in directum (§. 27. Cor. 1.) et ob eandem rationem BA et AH cadunt in directum. Iungantur LC, AD, et per A ducatur AF ipsi BD parallela. Iam comparando triangula LBC et ABD, est $AB = BL$, $BC = BD$ nec non $ABD = ABC + R = LBC$, quare triangulum $ABC = LBC$. Sed $ABD = \frac{1}{2}BGFD$ et $LBC = \frac{1}{2}LBAK$ (§. 115. Cor.) quare $BGFD = LBAK$. Eodem modo junctis BE, AI et conferendo triangula BCE, ACI, ostenditur $ACEH = GCIF$, hincque $BDIC = BGFD + GCIF = LBAK + ACEH$ (§. 21.).

COR. In triangulo rectangulo quadratum unius cathetorum aequale est differentiae quadrati alterius a quadrato hypotenuse.

§. 121.

Si in triangulo quadratum unius lateris aequale est quadratis reliquorum simul sumtis, angulus huic lateri oppositus est rectus.

r. 60.

DEM. In triangulo ABC fit $BCq = ABq + ACq$. Ducatur recta AD ipsi AC perpendicularis, et fiat $AD = AB$, ducta igitur CD erit $CDq = ADq + ACq$ (§. 120.) $= ACq + ABq = BCq$ (hyp.). Ergo est $CDq = CBq$ et proinde $CD = CB$ (§. 110. Cor. 3.) quare triangula BAC et DAC sibi congruunt, estque angulus $BAC = DAC$ (§. 75.) $= R$. (constr.).

§. 122.

Datis quocunque quadratis unum omnibus aequale construere.

r. 61.

SOL. et DEM. Dentur quadrata tria quorum latera sint AB, BC, CE. Ducantur duae rectae FB et BH ad angulos rectos sese secantes in B. Cruribus anguli

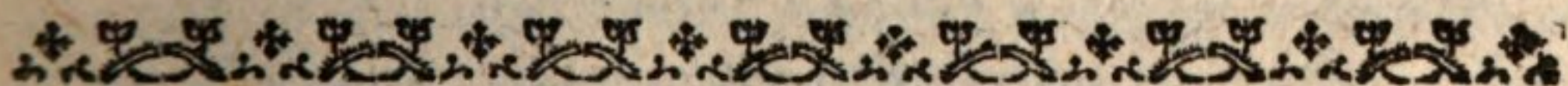
guli recti B imponantur duo datorum laterum AB et BC, quaecunque sint, et ducatur AC, erit $ACq = ABq + BCq$. Tum latus quadrati AC jam inventum transferatur ex B in G, et CE tertium latus datum ex B in E, quo facto, si ducatur EG, erit $EGq = EBq$ (vel CEq) $+ BGq$ (vel ACq) $= CEq + ABq + BCq$.

§. 123.

Datis duabus rectis inaequalibus invenire quadratum, quo quadratum maioris excedit quadratum minoris.

SOL. Datae sint AB et BC, quarum major sit AB. **F. 62.** Centro B intervallo BA describatur circulus. Producat^r AB, cui ad alteras centri B partes imponatur altera datorum rectarum BC. Ex C erigatur perpendicularis CE occurrens peripheriae in E, erit CE latus quadrati quaesiti.

DEM. Ducatur enim BE, erit $BE = BA$ (§. 44. Cor. 2.) hincque $BEq = BAq = BCq + CEq$ (120.) et ideo $BAq - BCq = CEq$.



SECTIO V.

DE

LINEIS RECTIS ET ANGVLIS PLANIS
AD CIRCVLVM RELATIS, ET CIRCULI
PROPRIETATIBVS, QVAE INDE
PENDENT.

§. 124.

Quaecunque linea recta ita circulo occurrens, ut eadem utrinque producta pars ejus intra circulum cadat, dicitur *Secans circuli*. Recta autem circulo occurrens, sed ita ut eundem non secet, *Tangens circuli* vocata est.

D 2

COR.

52 SECTIO V. DE LINEIS RECTIS ET ANGLIS

COR. Recta circulum secans non nisi duo cum circuli peripheria puncta communia habet (§. 84.); hinc circuli peripheria per tria puncta in eadem recta posita transire nequit.

§. 125.

Si recta quaecunque duo puncta cum circuli peripheria communia habet, pars ejus inter duo ista puncta intercepta tota cadit intra circulum.

r. 15.

DEM. Sit AB ejusmodi recta ejusque duo puncta A et B sint in peripheria circuli. In parte istius rectae, quae cadit intra puncta A et B, sumatur punctum quodcunque H et ducatur recta CH, praeterea quoque AC et CB, quo facto erit angulus $\text{CHB} > \text{CAB}$ (§. 67.) sed $\text{CAB} = \text{CBA}$ (§. 60.) hincque $\text{CHB} > \text{CBA}$ (§. 18. Cor. 3.) quare $\text{CB} > \text{CH}$ (§. 69.). Punctum igitur H cadit intra peripheriam circuli (§. 44. Cor. 3.).

COR. Omnis igitur recta, quae duo puncta cum circulo communia habet, est secans circuli, et chorda quaevis tota intra circulum cadit. Hinc recta circulum tangens, tangit in unico puncto.

§. 126.

Per data tria puncta non in eadem recta sita describere peripheriam circuli.

r. 63.

SOL. Data sint tria puncta A, B, C. Ducantur rectae AB et BC. Bissecentur eadem rectis ipsis perpendicularibus DE et DF, (§. 79.) quartum punctum intersectionis D erit circuli quaesiti centrum, et distantia hujus puncti a quolibet datorum punctorum ejus radius.

DEM. Ductis rectis DA, DB, DC oriuntur triangula ADE et BDE, in quibus $\text{AD} = \text{BD}$; praeterea triangula DBF et DCF, in quibus $\text{DB} = \text{DC}$ (§. 59.). Ideo et $\text{AD} = \text{DC}$. Peripheria igitur centro D et distantia ejusdem ab uno datorum punctorum descripta, per data tria puncta transit.

§. 127.

§. 127.

Dati circuli diametrum et centrum invenire.

SOL. et DEM. Ducta chorda quacunque eaque recta eidem perpendiculari bissecta (§. 79.) habetur diameter, si haec recta producat, donec ad utramque ipsius partem peripheriae occurrat, Reperta hoc modo circuli diametro habetur centrum diametro bissecta.

§. 128.

Duae circuli chordae sese secantes, si non utraque tranfit per circuli centrum, sese mutuo non bissecabunt.

DEM. Ducantur primo duae ejusmodi chordae F.64. AB et CD, quorum una CD per centrum transeat, non vero altera AB et manifestum est, fore $CF = FD$. Si nec CD transeat per centrum, ducatur recta EF per circuli centrum ad intersectionis punctum F. Quod si jam esset $AF = FB$ et $CF = FD$, foret $EFD = R$ et $EFB = R$ (§. 63.) quod contra §. 26. Cor.

§. 129.

Si in diametro circuli sumatur punctum quodpiam a centro diversum, ab eoque ducantur rectae quotcunque usque ad peripheriam; omnium earum maxima est ea pars diametri, in qua est circuli centrum, minima vero altera diametri pars. Reliquae omnes eo majores sunt, quo maximae propiores sunt, et eo minores, quo ab eadem sunt remotiores.

DEM. In diametro AB sumatur punctum D a centro C diversum. Ducta sit DE et praeterea radius CE F.65. eritque $DC + CA = DC + CE > DE$ (§. 70.). Eodem modo ostenditur rectam DA majorem esse reliquis omnibus.

Deinde quoque ducta sit DF, radius CF, ut et chorda EF, quo facto erit angulus $CEF = CFE$ (§. 60.) ideoque $DFE > CEF$; et cum $CEF > DEF$ erit $DFE > DEF$. Hinc $DE > DF$ (§. 69.) quare DB est minima omnium.

§. 130.

Si duo circuli sese intus contingant; recta, quae cadit inter eorum centra, producta in contactum circulorum cadit.

F. 66. DEM. Duo circuli ADE et ABC quorum centra sunt F et G sese intus contingant, et recta FG centra illa jungens producta fecet circulos extra contactum, sic ut non FGA sed FGDB sit linea recta. Ducatur ex G recta GA ad contactum, quo facto erit $GB < GA$, (§. 129.) sed $GA = GD$, est igitur $GB < GD$, quod imp.

§. 131.

Si duo circuli sese extus contingant, recta eorum centra connectens per contactum transit.

DEM. Si AB jungens centra circulorum sese extus tangentium per contactum non transit, cadere debet contactus extra AB, e. gr. circa C. Ducantur rectae AC et BC, quo facto erit $AC + CB = AE + BD < AE + ED + BD$ hincque $AC + CB < AB$ contra §. 70.

§. 132.

F. 66. *Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam in unico, sive intus sive extus eum tangat.*

DEM. Circulus ADE interior tangat circulum ABC et punctum A sit in contactu. Quodsi ponatur praeter A dari adhuc aliud punctum contactus, hoc ita erit comparatum, ut, ducta recta GR per centra, ea cadat in punctum contactus A, ut et in aliud, quod praeter hoc assumitur (§. 130.). Sit igitur hoc alterum punctum E vel C, ita ut puncta E et C coincidant, eritque $CE > FE$, $FE = FA$ ideo $GF > FA$; sed $GE = GA$, hincque $GA > FA$ quod imp.

Si circulus HIK extus tangat circulum ABC in duobus punctis H et I, ducaturque chorda HI ea in utroque circulo erit, quare circuli sese secant (§. 48.) contra hyp.

§. 133.

§. 133.

In eodem circulo aequales chordae a centro circuli aequaliter distant: et chordae a centro in circulo eodem aequaliter distantes aequales sunt.

DEM. Ex centro circuli E ducantur chordis AC f. 68. et BD perpendiculares EF et EG, quo facto erit AF = FC et BG = GD. Ducantur praeterea radii EA et EB. Iam sumatur

1) esse AC = BD, et erit AF = BG (§. 22. Cor. 3.) sed et EA = EB. Ergo FEq = EAq - AFq = EBq - BGq = EGq (§. 120. Cor.) quare est EF = EG. (§. 110. Cor. 3.)

2) esse EF = EG; ergo est AFq = EAq - EFq = EBq - EGq = GBq, et AF = GB (§. cit.) proinde AC = BD (§. 21. Cor.).

§. 134.

Diameter est circuli chorda maxima.

DEM. In circulo ducta sit diameter AD et praeter- f. 69. ea chorda alia quaecunque BC, ad cuius extrema B et C si ducantur radii GB, GC erit GB + GC = AD > BC (§. 70.).

§. 135.

Chordarum ejusdem circuli centro propinquior major est remotiore a centro.

DEM. Distantia GN chordae KL minor sit distantia GI chordae BC a centro, erit GNq < GIq (§. 110. Cor. 2.). Ductis vero GK et GB erit GKq = GBq (§. 44. Cor. 2. et §. 110. Cor. 1.) ideo GKq - GNq > GBq - GIq (§. 23.) id est KNq > BIq (§. 120. Cor.) ex quo porro sequitur, esse KN > BI (§. 110. Cor. 3.) proinde KL > BC (§. 194. Cor. 3. et 22. Cor. 2.). f. 69.

§. 136.

Chordarum ejusdem circuli major minori intervallo a centro distat, quam chorda minor.

DEM. Chorda KL sit major chorda BC, et ducantur f. 69. distantiae GN, et GI, erit KN > BI (§. 94. Cor. 3. et §. 22.

Cor. 2.) $KNq > BIq$ (§. 110. Cor. 2.). Ductis vero radiis GK et GB, est $GKq = GBq$ (§. 44. et 110. Cor. 1.) proinde $GKq - KNq < GBq - BIq$ (§. 23.) id est $GNq < GIq$ (§. 120. Cor.) et $GN < GI$ (§. 110. Cor. 3.).

§. 137.

P. 15. Chorda AB circuli planum dividit in duas partes, quarum quaelibet, ut AFB vel AGB inter chordam et ejus arcum intercepta dicitur *Segmentum* circuli. Ductis vero duobus radiis CA, CB, pars plani circularis inter eosdem et arcum AGB vel AFB intercepta circuli *Sector* vocatur.

§. 138.

Ejusdem vel aequalium circulorum sectores, quorum radii aequales comprehendunt angulos, ipsi sunt aequales, et arcus, quibus terminantur.

P. 70. DEM. In circulis aequalibus dati sint sectores ABC et DEF, quorum anguli apud centrum BAC et D aequales. Imponatur sector DEF sectori ABC ita ut punctum D in A et recta DF in AC cadat, quo facto cadet DE in AB, punctum E in A et F in C (§. 17. cum Cor.). Si jam arcus EKF non cadat in arcum BGC, sed aliter in BHC, ducto radio AH, foret $AH = AB = AG$ (§. 44. Cor. 2.) quod impossibile. Congruit igitur sector sectori et arcus arcui.

COR. I. Duae ejusdem circuli diametri quarum una alteri est perpendicularis, circuli planum ut et ejus peripheriam in quatuor partes aequales secant, quae *quadrantes* vocantur. Arcus igitur inter crura anguli recti radio quocunque ex ejus apice tanquam centro descriptus quadrans est.

COR. II. Diameter circuli peripheriam et ipsum planum circulare in duas partes aequales dividit: et, si peripheria in duas partes aequales divisa sit, recta divisionis puncta connectens, est diameter.

COR. III. Angulo in quocunque partes aequales diviso productisque lineis eum dividantibus, in totidem partes

tes aequales fecatur arcus inter ejusdem crura ex apice tanquam centro radio quocunque descriptus.

§. 139

Arcum circuli quomcunque datum in duas partes aequales secare

SOL. Ducatur chorda AB arcus dati AGB, eaque F.15. bifariam dividatur perpendiculari FD (§. 79.) quae producta et arcum in G bifariam secabit.

DEM. Recta FD transit per centrum C, et bise-cat angulum ACB (§. 64. Cor.) hinc, et arcum AGB (§. 138. Cor. 3.).

COR. I. Recta ex centro chordae perpendicularis bise-cat arcum chordae utrumque.

COR. II. Ejusdem circuli arcus inter chordas paralle- F.69. las intercepti sunt aequales. Si enim chordae KL et BC sunt parallelae, recta GN ex centro uni KL perpendicularis producta etiam alteri BC in I perpendicularis est (§. 99. Cor. 3.). Bise-cat igitur arcum utriusque chordae, ita ut sit $KM = ML$ et $BM = MC$, proinde $KM - BM = ML - MC$ (§. 21.) id est $KB = LC$.

§. 140.

Sectores aequalium circulorum, quorum anguli ad centrum sunt inaequales, ipsi sunt inaequales, et eorum arcus ita quidem, ut sector vel arcus sectoris, in quo angulus ad centrum est major, quoque major sit sectore vel arcu sectoris, in quo angulus ad centrum est minor.

DEM. Si angulus A in sectore IACG major est an- F.70. gulo D in sectore EDFK, ad radium AC in puncto A constituatur angulus BAC angulo D aequalis (§. 76.) hic erit pars anguli IAC (§. 18.). Crus igitur BA hujus anguli cadet intra crura anguli IAC, et punctum B, in quo arcus IGC ab hoc crure fecatur, cadere debet intra puncta I et C, hincque sector BACG est pars sectoris IACG et arcus BGC pars arcus IGC. Sed vero sector EDFK aequalis est sectori BACG et arcus BGC arcui EKF, (§. 138.)

138.) proinde est sector EDFK minor sectore IACG, et arcus EKF minor arcu IGC (§. 18. Cor. 3.).

COR. I. Arcus inter crura anguli obtusi radio quocunque ex ejus apice descriptus quadrante major est, et arcus inter crura anguli acuti quadrante minor (§. 138. Cor. 1.).

COR. II. Si arcus inter crura anguli plani ex ejus apice descriptus quadrans est, angulus est rectus, si major quadrante, obtusus, si minor, acutus.

COR. III. In aequalibus circulis sectorum aequalium anguli apud centrum sunt aequales et eorum arcus.

COR. IV. Si arcus sectorum aequalium circulorum aequales sunt, etiam anguli sectorum apud centrum sunt aequales, et ipsi sectores: si vero arcus sunt inaequales, angulus ad centrum illius sectoris, cujus arcus est major, quoque major est angulo ad centrum alterius sectoris, cujus arcus minor est.

COR. V. Arcu inter crura anguli plani ex ejus apice radio quocunque descripto, eoque in partes aequales quocunque numero diviso, si a punctis divisionis ad anguli apicem ducantur rectae, in totidem partes aequales secatur angulus.

F. 53. COR. VI. Recta GF bisecans arcum circuli quemcunque AGB et transiens per centrum simul bisecat chordam AB hujus arcus eique est perpendicularis. Ductis enim radiis CA et CB bisecat angulum ACB, ideo quoque chordam AB et quidem ad angulos rectos (§. 66.).

§. 141.

Aequales chordae eisdem vel aequales circulos eorumque peripherias dividunt in aequalia segmenta et aequales arcus.

F. 70. DEM. In circulis aequalibus chordae BC et EF sint aequales. Ducantur radii AB, AC, DE, DF, quo facto erit angulus BAC = EDF (§. 75.) hinc arcus BGC = EKF et sector BACG = sectori EDFK (§. 138.), proinde

inde demtis utrinque triangulis aequalibus erunt segmen-
ta BGC et EKF aequalia. Quare et segmentum BMC
aequale segmento ELF atque arcus prioris arcu postero-
ris (§. 21.).

§. 142.

*Dato circulo EFL accommodare chordam EF aequa-
lem rectae cuidam BC datae, quae circuli diametro non
major est.*

SOL. et DEM. Puncto E in circuli dati EFL pe-
ripheria vel dato vel pro arbitrio assumpto, ducatur dia-
meter EP . Fiat $EQ = BC$, tum vero puncto E tan-
quam centro et radio $EQ = BC$ describatur circulus,
qui datum circulum secabit in F et N (§. 65.). Ducatur
 EF vel EN , quae erit chorda quaesita (§. 44. Cor. 2.).

COR. Hinc a data peripheria EFL auferri potest arcus
 EF aequalis dato arcui ejusdem peripheriae, vel periphe-
riae BCM datae aequalis, ducta chorda BC arcus BGC
dati et peripheriae EFL accommodata chorda FE chor-
dae BC aequali.

§. 143.

*In aequalibus circulis chordae aequalium arcuum sunt
aequales.*

DEM. Si arcus BGC et EKF sunt aequales, du-
cantur eorum chordae BC et EF , ut et radii AB , AC ,
 DE , DF , quibus factis erit angulus BAC angulo EDF
aequalis (§. 140. Cor. 4.) proinde et $BC = EF$. (§. 59.).

§. 144.

*Duorum inaequalium arcuum ejusdem vel aequalium
circularum, si uterque semiperipheria minor sit, majoris
chorda major est chorda minoris.*

DEM. Si in circulis BMC et ELF arcus IGC ma-
jor est arcu EKF , etiam angulus IAC major est angulo
 EDF (§. 140. Cor. 4.) praeterea est $AI = DE$, et $AC =$
 DE , ductis igitur chordis IC et EF erit $IC > EF$
(§. 72.).

Cor. I.

60 SECTIO V. DE LINEIS RECTIS ET ANGLIS

COR. I. Chorda igitur majoris arcus minori intervallo a centro circuli distat quam chorda arcus minoris (§. 136.) si uterque arcus semiperipheria minor sit.

COR. II. Arcus chordae majoris major est arcu chordae minoris, si intelligantur arcus semiperipheria minores (§. 140. Cor. 4. coll. cum §. 73.).

§. 145.

Si in eodem circulo duae chordae comprehendant angulum, cujus apex sit punctum in peripheria, et duo radii alium angulum, cujus apex sit centrum circuli, praeterea vero anguli ipsi aequales sint; arcus inter crura anguli ad peripheriam interceptus duplum est arcus, cui angulus ad centrum insistit.

F. 71.

DEM. Si in circulo AMH angulus MDN = BAC; ducantur diametri EF, GH, cruribus AB, AC, anguli BAC parallelae, eritque figura AD parallelogrammum. Angulus igitur FDH = GDE (§. 31.) = BAC (§. 105.) = MDN (§. 13. Cor. 2.) et arcus FH = MN (§. 138.). Praeterea quoque FH = GE (§. cit.) et $2FH = FH + GE$, (§. 21.) sed $GE = GA + AE$, $GA = HC$, et $AD = BF$ (§. 139. Cor. 2.), proinde $2FH$ vel $2MN = FH + HC + BF =$ arcui BFNHC.

§. 146.

Angulus ad centrum aequalis est angulo ad peripheriam, qui insistit arcui duplo majore eo, cui angulus ad centrum insistit.

F. 72.

DEM. Si arcus BEFC cui angulus ad peripheriam BAC insistit est = $2EF$, quod est duplum arcus, cui angulus ad centrum EDF insistit, et angulus EDF inaequalis angulo BAC; ponatur alius angulus EDG ad centrum aequalis angulo BAC. Hoc posito erit BEFC = $2EG$ (§. 145.) et BEFC = $2EF$, (hyp.) hincque $2EG = 2EF$ et $EG = EF$, quod impossibile. Est igitur angulus EDF = BAC.

COR. I. Si angulus ad centrum et angulus ad peripheriam eidem arcui insistent; ille hoc, duplo major est.

COR. II.

COR. II. Anguli ad peripheriam eidem arcui insistentes *aequales* sunt, ut et anguli in aequalibus ejusdem circuli *segmentis*.

COR. III. Angulus ad peripheriam est rectus, si semicirculo, obtusus, si arcui semicirculo majori, et acutus, si arcui semicirculo minori insistit. Hinc angulus in semicirculo est rectus, angulus in segmento semicirculo majore acutus, et angulus in segmento semicirculo minore obtusus.

§. 147.

Ad punctum extremum lineae rectae datae perpendiculararem erigere.

SOL. et DEM. Ad punctum B rectae AB sit erigenda perpendicularis. Sumatur punctum C utcumque extra rectam AB et radio CB describatur peripheria, quae secabit rectam datam in D. Ducatur CD eaque producatur, donec peripheriae iterum in E occurrat. Ducatur EB, quae erit perpendicularis quaesita (§. 146. Cor. 3.). F. 73.

§. 148.

Figura aequilatera est figura rectilinea, cujus latera omnia aequalia sunt; *Figura aequiangula* dicitur figura rectilinea, cujus latera omnia aequales angulos comprehendunt. *Figura regularis* est figura aequilatera et aequiangula. Possibile igitur est triangulum, quadrilaterum, pentagonum, hexagonum etc. regulare. (conf. §. 37.).

§. 149.

Figura rectilinea *circulo inscripta* esse dicitur et *circulus eidem circumscriptus*, si apices omnium ipsius angulorum sunt puncta in peripheria circuli.

COR. Quadrilateri ABHC circulo inscripti anguli oppositi A et H vel B et C simul sumti duobus angulis rectis sunt aequales.

§. 150.

§. 150.

Dato circulo inscribere polygonum regulare dati numeri laterum, concessa indefinita peripheriae divisione.

F. 74. SOL. Inscribendum fit circulo octogonum regulare. Dividatur peripheria in tot partes aequales, quot figurae describendae sunt latera, uti hoc casu in octo. Arcuum hoc modo inventorum ducantur chordae AB, BC, CD, etc. quae polygonum desideratum terminabunt.

DEM. Latera polygoni descripti sunt chordae aequalium arcuum (*constr.*) et anguli aequalibus arcubus insistent. Est igitur polygonum regulare (§. 143. 147. Cor. 2. et §. 148.).

COR. I. Aucto numero laterum polygoni descripti in duplum latera fiunt minora, et distantia laterum a centro circuli, cui figura inscripta est, augetur (§. 144. cum Cor. I.).

COR. II. Omne polygonum circulo inscriptum minus est circulo, cui inscribitur. Duplicato autem numero laterum ipsius minuitur differentia polygoni a circulo, nimirum summa segmentorum, quae latera polygoni a circulo abscindunt; ita tamen, ut latera polygoni nunquam extra circulum cadant, nec polygonum circulo aequale evadat (§. 125. Cor.).

§. 151.

Dato circulo hexagonum regulare inscribere.

F. 75. SOL. Dati circuli ducatur diameter AD, centro D eodem radio DG describatur circulus datum secans in duobus punctis C et E (§. 65.). Per C et E ducantur diametri CF, EB et puncta ita terminata A, B, C etc. jungantur rectis AB, BC, CD etc. quae terminabunt hexagonum regulare quaesitum.

DEM. Triangula CGD et DGE sunt aequilatera et sibi congruentia. Ideo ang. CGD = DGE (§. 75.) = AGF = BGA (§. 31.) = GDC = DCG (§. 60. Cor.).

P. ae-

Praeterea $AGB + BGC + CGD = 2R = CGD + GDC + DCG$ (§. 93. Cor. 2.), ideo ob $AGB + CGD = GDC + DCG$ (§. 21.) erit quoque $BGC = CGD$ (§. 21.) $= FGE$ (§. 31.). Proinde sex anguli circa punctum G omnes aequales sunt, hinc et omnes arcus, in quos peripheria diuisa est (§. 138.), ex quo patet, hexagonum descriptum esse regulare (§. 150.).

COR. Ex demonstratione patet, latus hexagoni regularis aequale esse radio circuli, cui inscribi potest.

§. 152.

Quodlibet polygonum regulare bisecando omnes ipsius angulos in triangula aequicrura sibi mutuo congruentia dividitur.

DEM. Bisecetur angulus ABC figurae regularis recta BG, eique proximus BCD recta CG, quae rectae producantur donec se apud G interfecent. Erunt igitur anguli GBC et GCB aequales (§. 21. Cor. 2.) hincque triangulum BGC est aequicrurum. Eodem modo demonstratur, etiam quodlibet reliquorum triangulorum CGD et DGE etc., quae bisectione angulorum D, E, F, A, determinantur, fore aequicrurum. Omnia autem ista triangula bases habent aequales (§. 48.) et duos angulos aequalibus basibus adjacentes (*constr.*) proinde sibi mutuo congruunt (§. 94.).

COR. Circuli centro G per A descripti peripheria per apices omnium angulorum figurae transit. Ideo cuiuslibet figurae regulari circulus circumscribi potest, cuius centrum bisectione duorum angulorum figurae reperitur.

§. 153.

Quodlibet polygonum regulare aequale est triangulo, cuius basis aequalis est perimetro polygoni, altitudo vero distantiae laterum a centro circuli, qui polygono circumscribi potest.

DEM. Sit polygonum regulare ABCDE et F centrum circuli polygono eircumscripti. Ductis radiis AF, BF, etc. polygonum dividetur in triangula ABF, BCF, etc.

64 SECTIO V. DE LINEIS RECTIS ET ANGLIS

etc. aequalium basium (§. 152.) et altitudinum, quae sunt distantiae laterum a centro (§. 133.). Erunt ergo summa aequalia uni triangulo GHF ejusdem altitudinis, et cujus basis GH aequalis est summae basium omnium (§. 114. Cor. 4.) id est perimetro polygoni.

§. 154.

Si recta circulum tangat, radius ad punctum contactus tangenti est perpendicularis.

r. 77. DEM. Recta AD tangat circulum in D, ducaturque BD. Quodsi ea tangenti non est perpendicularis, alia tamen ut BF ex B eidem duci potest perpendicularis. Quo facto erit angulus BFD rectus, et ideo $BD > BF$ (§. 81. Cor.). Sed $BD = BE$, hinc $BE > BF$. quod imp.

§. 155.

Si ex centro ad tangentem circuli ducatur perpendicularis, ea in punctum contactus eadit.

DEM. Ex centro circuli B ad tangentem AD ducatur perpendicularis, quae si non cadat in punctum D, sed in aliud F, ducatur etiam BD, eritque haec quoque tangenti perpendicularis contra §. 80. Cor. 4.

§. 156.

Per datum punctum lineam rectam ducere, quae circulum tangat.

SOL. 1. Si in peripheria detur punctum D, ducatur radius BD, et ad ejus punctum extremum erigatur perpendicularis DA (§. 147.) quae erit tangens quaesita.

2. Si vero extra peripheriam detur punctum A ex centro B circuli dati ad A ducatur recta BA, qua in C bisecta radio $CA = CB$ describatur circulus ADB, qui secabit circulum datum in D et G. Ducatur AD vel AG, utraque circulum in D vel G continget.

DEM. Concurrit AD utroque casu cum circulo et angulus apud D vel G utroque casu est rectus (§. 146. Cor. 3.). Ducatur praeterea recta BF, eritque $BF > BD$, sed $BD = BE$ hinc $BF > BE$ et punctum F cadit extra circulum.

Cum

Cum idem de omnibus reliquis rectae AD punctis valeat, ea circulum non secat, ideoque est ejusdem tangens.

§. 157.

Figura rectilinea *circulo circumscripta* esse dicitur et *circulus eidem inscriptus*, si latera figurae sunt rectae circulum tangentes.

§. 158.

Dato circulo circumscribere polygonum regulare concessa indefinita divisione peripheriae.

SOL. Circulo centro C descripto fit circumscribendum polygonum regulare quodcunque e.g., octogonum. Dividatur peripheria in tot partes aequales, quot figura describenda habet latera. Per quodcunque divisionis punctum ducantur rectae circulum tangentes, quae sese mutuo secabunt et terminabunt polygonum quaesitum. F. 78.

DEM. Ducantur radii ad puncta contactus CO, CS, CP etc. et erunt anguli apud O, S, P, etc. recti. Ducantur praeterea rectae ex centro ad apices polygoni CB, CD etc., eruntque in triangulis CBO et CBS anguli OCB, BCS aequales, (§. 87. Cor.) i. e. $OCB = \frac{1}{2}OCS = BCS$. Eandem ob rationem est $SCD = \frac{1}{2}SCP = DCP$. Sed $OCS = SCP$ (§. 140. Cor. 4.) ideo $BCS = SCD$. Simili modo demonstratur, omnes angulos circa C aequales esse. Hinc omnia triangula rectangula in quae figura divisa est sunt congruentia. Quare omnes polygoni anguli A, B, D, etc. et omnia ejus latera sunt aequalia.

COR. I. Duplicato numero laterum polygoni circulo circumscripti, latera fiunt minora. Loco quadrati enim KLMN eidem circulo circumscribatur octogonum regulare ABDEFGHI, erit SN dimidium lateris quadrati, et SB dimidium lateris octogoni. Jam radio CO in N producto triangula rectangula NCS et BCS aequales habent bases, sed angulus $NCS > BCS$, ideo est $NS > BS$ (§. 94. Cor. 1.) et $IK > BC$.

E

COR. II.

COR. II. Duplicato numero laterum polygoni distantia punctorum, quae sunt apices angulorum polygoni, a centro minuitur. Est enim $NCq = NSq + SCq$, et $BCq = BSq + SCq$. Cum autem sit $BSq < NSq$, erit $BSq + SCq < NSq + SCq$ hincque $BCq < NCq$ et $BC < NC$ (§. 110. Cor. 3.).

COR. III. Omne polygonum circulo circumscriptum eodem majus est. Sed aucto laterum polygoni numero in duplum, minuitur ejus differentia a circulo, quia summa figurarum trilinearum, ZAO, OBS, SDP, PET, etc, quibus polygonum dupli numeri laterum a circulo differt, longe minor est summa figurarum trilinearum ZNS, SKT, TLV, VMZ, quibus polygonum simpli numeri laterum a circulo differt.

COR. Polygonum regulare circulo circumscriptum aequale est triangulo, cujus basis est perimetro polygoni et altitudo radio circuli inscripti aequalis (§. 153.).

§. 159.

Duplicato numero laterum polygoni circulo inscripti ejus differentia a circulo minuitur ultra dimidium.

F. 79. DEM. Circulo cujus centrum est A inscriptum sit quadratum, cujus latus est CB, eritque segmentum CDBR unum ex quatuor illis, quibus quadratum a circulo differt. Dividatur arcus CDB bifariam radio AD, qui simul bifariam dividet chordam CB in R, eique erit perpendicularis (§. 66. coll. §. 140. Cor. 5.). Ducantur chordae BD, DC, quae erunt latera octogoni inscripti. Per punctum D ducatur tangens, quae chordae CB erit parallela (§. 89. Cor. 1) quo facto etiam per C et B ductis ipsi RD parallelis complebitur parallelogrammum BCFE, cujus dimidium est triangulum CDB. Sed $BCFE > CSTBR$, ideo $\frac{1}{2}BCFE > \frac{1}{2}CSTBR$ (§. 22. Cor. 3.) hinc $CDB > \frac{1}{2}CSTBR$ et $4CDB > 4\frac{1}{2}CSTBR$.

§. 160.

Duplicato numero laterum polygoni regularis circulo
cir-

circumscripti ejus differentia a circulo ultra dimidium minuitur.

DEM. Circulo, cujus centrum est A, circumscriptum fit quadratum, cujus latera sunt IG, GH, circum- r. 80.
lum in K et L tangentia. Chorda LK arcus LOK dividatur bifariam recta perpendiculari, quae et arcum LOK dividet bifariam in O. Eadem haec perpendicularis producta per punctum G transit (§. 64.) quia est $LG = KG$. (per dem. §. 158.). Praeterea per punctum O ducatur tangens NM, quae erit latus octogoni circumscripti. Iam $OM = MK$, (per dem. §. 158.). $GM > OM$ (§. 81. Cor.) et ideo $GM > MK$. Hinc triang. $GOM >$ triang. MOK (§. 114. Cor. 3.) atque adeo $GOM > \frac{1}{2}GOK$. Sed trilineum $GOQKM < GOK$ et proinde $\frac{1}{2}GOQKM < \frac{1}{2}GOK$, quare et $GOM > \frac{1}{2}GOQKM$. Eadem argumentatione demonstratur, esse $GNO > \frac{1}{2}GOPLN$, hincque $GOM + GON = GNM > \frac{1}{2}GOQKM + \frac{1}{2}GOPLN = \frac{1}{2}GLPOQK$, et $4 GNM > 4 \frac{1}{2}GLPOQK$.

§. 161.

Duabus magnitudinibus inaequalibus propositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur tandem magnitudo, quae minor erit proposita minore magnitudine.

DEM. Sit recta AB major recta C. Ducatur ter- f. 81.]
tia recta indefinita, in eaque a puncto D ponatur C toties, donec producta sit recta ED majorem AB proxime excedens (§. 95.), ita ut sit $DF = FG = GE = C$. Ex AB dematur plus quam dimidium AH, et a reliquo HB plus quam dimidium HI, et sic porro, donec partes AH, HI, IB aequae multae sint partibus DF, FG, GE. Iam $DE > AB$ (constr.) ideo $\frac{1}{2}DE > \frac{1}{2}AB$. Praeterea FE non minor est, quam $\frac{1}{2}DE$, ergo $FE > \frac{1}{2}AB$, sed $\frac{1}{2}AB > HB$, hinc $FE > HB$, et $\frac{1}{2}FE > \frac{1}{2}HB$. Denique GE non minor est, quam $\frac{1}{2}FE$, ideo $GE > \frac{1}{2}HB$, proinde cum $\frac{1}{2}HB > IB$, erit $GE > IB$, id est $IB < C$.

COR. Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, et ex reliquo HB rursus dimidium HI, et ita deinceps.

§. 162.

Si sit figura plana quaecunque A circulo IB minor; inscribi potest circulo polygonum regulare, quod figura A majus est.

F. 82.

DEM. Si circulus B figura A major est, excedere debet eandem differentia quadam, quae sit aequalis figurae G, sitque adeo $A + G = B$. Inscribatur circulo B quadratum CDEF, quod si majus esset figura A, factum esset, quod desideratur: si vero sit minus eadem, differentia, qua circulus idem excedit, major esse debet figura G, dividantur arcus, CD, DE, EF, FC bifariam in H, I, K, L, ducanturque chordae CH, HD, etc, quae terminabunt octogonum regulare, quod si adhuc minus est magnitudine A, simili operatione circulo inscribatur polygonum regulare sedecim laterum, et si hoc non sufficiat, fiat polygonum triginta duorum laterum et ita deinceps. Jam vero octogoni differentia a circulo plusquam dimidio minor est differentia quadrati a circulo: differentia polygoni inscripti sexdecim laterum a circulo, cui inscribitur, plus quam dimidio minor est differentia octogoni ab eodem circulo, et ita in reliquis (§. 159.). Ideo hac operatione continuata a differentia, qua circulus excedit polygonum eidem inscriptum aufertur majus quam dimidium, ab eo, quod reliquum est, rursus detrahitur plus quam dimidium, et hoc semper fit, quamdiu numerus laterum polygoni circulo inscripti duplicatur. Proinde necesse est, ut tandem perveniatur ad polygonum, cujus differentia a circulo minor est figura G (§. 161.). Factum sit, atque si ea differentia littera Q denotetur, et polygonum, quod magnitudine Q a circulo differt, littera P, erit $P + Q = B$, erat vero et $A + G = B$, quare est $P + Q = A + G$. Est vero $Q < G$, (constr. et dem.) proinde $P > A$ (§. 23.).

§. 163.

§. 163.

Si detur figura plana A circulo B major poterit circulo circumscribi polygonum regulare, quod figura data minus est.

DEM. Si figura A major est circulo B, excedere F. 83.
debet eundem differentia quadam, quae sit aequalis figurae A, atque ideo $B + C = A$. Circulo B circumscribatur quadratum DEFG, quod quadratum si minus est figura A, factum est, quod quaeritur: Si vero adhuc majus est, differentia, qua illud excedit circulum B, major est figura C. Dividantur arcus HK, KL, LM, MH bifariam in I, N, etc, per quae puncta si ducantur tangentes OR, etc., illae terminabunt octogonum regulare circulo circumscriptum. Si et hoc octogonum majus est figura A, iterum duplicetur numerus laterum polygoni circumscripti, qua duplicatione continuo repetita tandem invenietur polygonum desideratum. Octogoni enim differentia a circulo ultra dimidium minor est differentia quadrati a circulo, idem valet comparando differentiam polygoni sexdecim laterum cum differentia octogoni a circulo, sicque deinceps (§. 160.). Proinde necesse est, ut tandem perveniatur ad polygonum, cujus differentia a circulo minor est figura C (§. 161.). Factum sit, atque denotetur ea differentia littera Q, polygonum vero, quod magnitudine Q a circulo differt, littera P, et erit $B + Q = P$. Erat vero $B + C = A$ et $Q < C$ (constr. et dem.), ideo est $B + Q < B + C$ (§. 22.), id est $P < A$.

§. 164.

Omniū linearum eodē terminos habentium minima est recta. Reliquae omnes, si ad eandem lineae rectae partem inter eodē terminos ita ductae sint, ut se invicem non secant, ad partes illius rectae cavae sint, nec habeant flexus contrarios, sunt inaequales, atque eo majores, quo magis a recta recedunt.

COR. I. Quaevis circuli chorda minor est arcu, quem subtendit; hinc perimeter polygoni regularis circulo inscripti minor est peripheria circuli.

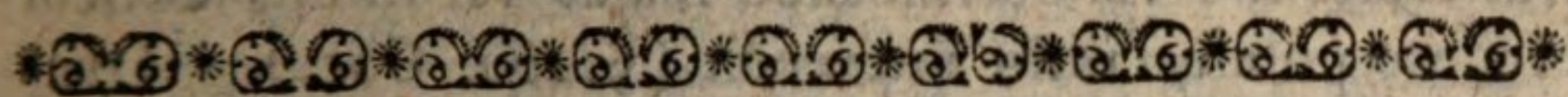
COR. II. Si ab eodem puncto G extra circulum assumpto ducantur duae rectae GL et GK circulum tangentes, (§. 156.) et inter duo contactus puncta L et K ducatur chorda LK ; duo ista contactus puncta sunt termini communes chordae LK , arcus hujus chordae LOK , et lineae fractae LGK , quam duae istae tangentes efficiunt, ultima vero cum chorda includit arcum hujus chordae, quare eodem arcu major est. Hinc perimeter polygoni circulo circumscripti major est hujus circuli peripheria.

§. 165.

84. *Circulus A aequalis est triangulo, cujus altitudo aequalis est radio AB , et basis peripheriae BCD hujus circuli.*

DEM. Triangulum illud, quod brevitatis gratia littera T denotabimus, non est majus circulo A , quia posset eidem circulo circumscribi *polygonum regulare triangulo T minus* (§. 163.) *quod tamen majus esset illo*; nempe aequale esset triangulo, cujus altitudo radius et basis perimeter polygoni circumscripti (§. 158. Cor.) quae perimeter circuli peripheria major est (§. 164. Cor. 2.) et consequenter major base trianguli T eandem altitudinem habentis, quare polygonum majus est triangulo T (§. 114. Cor. 3.). Idem igitur polygonum eodem triangulo majus et simul eodem minus foret, quod absurdum est. Porro triangulum T circulo A non est minus, quia inscribi posset circulo *polygonum regulare majus illo triangulo* (§. 162.) *et quod simul eodem minus esset* (§. 114. Cor. 3.) nempe aequale triangulo cujus altitudo esset perpendicularis ducta a centro ad latus unum, quae minor est radio (§. 125. Cor.) atque cujus basis perimeter polygoni inscripti, quae minor est circuli peripheria (§. 164. Cor. 1.). Simile igitur absurdum statui-

statuitur, si triangulum T ponitur circulo A minus esse. Proinde, cum nec majus nec minus sit circulo, eidem aequale erit.



SECTIO VI.

DE

COMPARATIONE EXTENSORVM GEOMETRICA GENERATIM.

§. 166.

Comparatio extensorum generatim absolvitur investigando eorum aequalitatem vel inaequalitatem. Haec investigatio duplici modo institui potest. Comparatio nimirum *Arithmetica*, ut vulgo dici solet, consistit in investigatione differentiae quantorum: *Geometrice* autem comparari dicuntur duo extensa A et B , si inquiratur, quatenam magnitudo uni extenso A in respectu ad alterum B sit tribuenda. Comparatio arithmetica non est hujus loci. F. 85.

COR. Comparatio geometrica duorum extensorum institui nequit, nisi eorum unum crescendo vel decrescendo alteri aequale atque tum ulterius crescendo vel decrescendo majus vel minus altero evadere potest. Quod vero si fieri possit, etiam geometrica comparatio est possibilis.

§. 167.

Ratio extensi A ad extensum B est magnitudo, quae uni extenso in respectu ad alterum est tribuenda; ipsa extensa A et B , de quorum respectiva magnitudine quaestio est, vocantur *Termini rationis*. *Ratio*, quae inter
inter

A et B intercedit, designatur hoc signo ($:$) collocato inter terminos rationis hoc modo $A : B$.

COR. I. Inter duo quaecunque extensa, quorum unum crescendo vel decrescendo alteri aequale atque tum ulterius crescendo vel decrescendo majus vel minus eodem evadere potest, ratio intercedit (§. 166. Cor.). Quare cum extensa, si sint homogenea, descriptas habeant conditiones, sequitur, inter duo quaecunque extensa homogenea rationem quandam locum invenire.

COR. II. Ratio non intercedit, nisi inter ejusmodi extensa, quorum unum crescendo vel decrescendo alteri aequale, atque tum ulterius crescendo vel decrescendo hoc altero majus vel minus evadere potest (§. 166. Cor.). Extensa autem heterogenea his requisitis carent. Proinde inter duo extensa heterogenea ratio concipi nequit.

§. 168.

Rationes iterum inter se comparari possunt. Si nimirum extenso A in respectu ad B eadem tribuenda est quantitas, quae extenso C in respectu ad D tribuitur, ratio ipsius A ad B *similis* five *aequalis* esse dicitur rationi ipsius C ad D, quae rationes opposito casu dicuntur *inaequales*. *Proportio* five *Analogia* est aequalitas duarum rationum, et termini rationum aequalium vocantur *quantia proportionalia*. Aequalitas duarum rationum indicatur signo aequalitatis ($=$) ita ut expressio $A : B = C : D$ significet, quanta A, B, C, D esse proportionalia.

COR. I. Si fuerit $A = B$, et $C = D$, proportio $A : B = C : D$ vera est; et vicissim, si vera est proportio $A : B = C : D$, atque $A = B$, debet esse $C = D$.

COR. II. Si vera est proportio $A : B = C : D$, et $A > B$, erit quoque $C > D$; si vero $A < B$, esse debet $C < D$.

COR. III. Si fuerit $A : B = C : D$, erit quoque $B : A = D : C$, vel $D : C = B : A$.

§. 169.

Quaecvis ratio sibi ipsi est aequalis ; et quanta aequalia in rationibus sibi substituta easdem non mutant.

COR. I. Proinde si in proportionem $A : B = C : D$ fuerit $B = C$, erit $A : B = B : D$, vel $A : C = C : D$; quo casu *proportio* vocatur continua, B vero vel C *terminus medius proportionalis*.

COR. II. Quodsi quanta A et B atque C et D inter se comparando, inveniatur, esse $A = C$, atque $B = D$, certo concluditur, quatuor illa quanta esse proportionalia.

§. 170.

Duae rationes eidem tertiae aequales et inter se aequales sunt.

COR. Duae rationes, quae aequalibus rationibus sunt aequales, etiam inter se aequales sunt.

§. 171.

Duarum rationum $A : B$ et $C : D$ prior dicitur posteriore *major*, est posterior priore *minor* si termino A in respectu ad terminum B major competit quantitas, quam termino C in respectu ad terminum D tribuenda est.

COR. I. Si igitur est $B = D$ est $A > C$, erit ratio $A : B$ major ratione $C : D$; atque si $A = C$, et $B < D$, iterum ratio $A : B$ ratione $C : D$ major est.

COR. II. Si proportio $A : B = C : D$ vera sit, atque $B = D$, erit quoque $A = C$. Si enim foret $A > C$, esset $A : B > C : D$ atque si $A < C$, foret ratio $B : A$ major ratione $D : C$, utrumque *contra hyp.*

COR. III. Proinde simul patet, si duarum rationum aequalium $B : A = D : C$ prioris terminus primus B aequalis sit posterioris termino primo D, simul fore prioris terminum secundum A aequalem termino secundo C posterioris.

§. 172.

Si $A : B = C : D$, et quanta A et B homogenea quantis C et D ; erit $B > D$, si $A > C$.

DEM. Si $A > C$, erit aut $B = D$, aut $B < D$ aut $B > D$. Si prius, nimirum si $B = D$, erit ratio $A : B$ major ratione $C : D$, *contra hyp.* Si $B < D$, idem sequitur. Quo minor enim fit unus rationis terminus, eo major fit alter terminus, eo major fit alter terminus respectu hujus, et ideo ipsa ratio eo major. Quare cum ratio $A : B$ jam major sit ratione $C : D$, si $B = D$, tanto magis hoc statui debet, si $B < D$. Proinde cum neque sit $B = D$ neque $B < D$, esse debet $B > D$.

COR. I. Hinc simul sequitur, si duarum rationum aequalium $C : D = A : B$ prioris terminus primus C minor fuerit posterioris termino primo A , simul fore prioris terminum secundum D minorem termino secundo B posterioris.

COR. II. Si cum his conferantur, quae §. 171. Cor. 2. et 3. sunt demonstrata, patet, in omni proportionem $A : B = C : D$ fore generaliter $B > = < D$, si sit $A > = < C$.

§. 173.

Si fuerit $A : B = M : N$, et praeterea $B : C = O : P$; magnitudo ipsi A in respectu ad C tribuenda innotescit investigando primo quantitatem, quae ipsi A competit in relatione ad B , deinde inquirendo, quae nam sit magnitudo ipsi B in relatione ad C tribuenda. Proinde ratio ipsius A ad C resolubilis erit in duas alias rationes ipsius A ad B et quanti B ad C , five quod idem est, in rationes ipsius M ad N et O ad P . Quare cum generatim id, quod in varia resolubile est, vocetur compositum; ratio inter A et C intercedens *composita* esse concipitur *ex rationibus $M : N$ et $O : P$* . Pari ratione si fuerit.

A : B

$$A : B = M : N$$

$$B : C = O : P$$

$$C : D = Q : R$$

$$D : E = S : T, \text{ etc.}$$

ratio $A : E$ dicitur *composita ex rationibus* $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$; vel quod idem est, ex rationibus $M : N$, $O : P$, $Q : R$, $S : T$; atque hoc respectu rationes componentes $M : N$, $O : P$, $Q : R$, $S : T$, concipiuntur ut *simplices*.

§. 174.

Si rationes componentes simplices sunt eadem, ita ut sit

$$A : B = M : N$$

$$B : C = M : N$$

$$C : D = M : N, \text{ etc.}$$

ratio composita $A : C$, vel $A : D$, et sic alia similis, vocatur *Multiplicata* rationis $M : N$, et quidem $A : C$ præcise *Duplicata*, quae componitur ex $M : N$ bis sumta; $A : D$ *Triplicata*, quae componitur ex $M : N$ ter sumta; ficque porro. Ratio $A : B$ etiam vocari solet *Subduplicata* respectu duplicatae suae, *Subtriplicata* respectu suae triplicatae, et ita porro, si loco rationis $A : B$ jam ipsius duplicata vel triplicata etc. ut simplex spectetur, atque generaliter ejusmodi ratio dicitur *submultiplicata* respectu multiplicatae suae. Rationem $A : B$ componi ex pluribus aliis $K : L$, $M : N$, $O : P$, etc. sequenti modo

$$\text{scribitur } A : B = \left\{ \begin{array}{l} K : L \\ M : N \\ O : P \text{ etc.} \end{array} \right\}. \quad \text{Si igitur ratio } A :$$

B est multiplicata quaevis rationis $M : N$, hoc indicari

$$\text{potest sequenti modo } A : B = \left\{ \begin{array}{l} M : N \\ M : N \\ M : N \text{ etc.} \end{array} \right\} \text{ scripta ratio-}$$

ne $M : N$ toties, quoties ad componendam rationem $A : B$ fuit assumpta.

§. 175.

§. 175.

Si fuerit $A : B = C : D$, et $B : E = D : F$ erit (ordinatim ex aequo uti Veteres loqui solent) $A : E = C : F$.

DEM. Sit ratio $A : B$ aequalis rationi $P : Q$, et ratio $B : E$ aequalis rationi $K : S$, erit $A : E = \left\{ \begin{matrix} P : Q \\ R : S \end{matrix} \right\}$

Quia vero est $A : B = C : D$, erit quoque $C : D = P : Q$, et quia $B : E = D : F$, erit $D : F = R : S$. Proinde

etiam $C : F = \left\{ \begin{matrix} P : Q \\ R : S \end{matrix} \right\}$. Quia jam ratio, quae ex duabus rationibus $P : Q$ et $R : S$ componitur, sibi ipsi est aequalis, (§. 169.) et duae rationes eidem tertiae aequales etiam inter se aequales sint (§. 170.) esse debet $A : E = C : F$.

COR. Quodsi igitur fuerit

$$A : B = G : H$$

$$B : C = H : I$$

$$C : D = I : K$$

$$D : E = K : L$$

erit primo $A : C = G : I$. Deinde quia etiam $C : D = I : K$ habetur quoque $A : D = G : K$, ex quo iterum ob $D : E = K : L$ fluit $A : E = G : L$, quae ratiocinia, quousque lubet, possunt continuari. Proinde rationes ex eodem numero rationum simplicium aequalium eodem ordine compositae sunt rationes aequales.

§. 176.

F. 88.

Si quantum aliquod C totum ex alio A aliquoties sumto componi potest, ita ut A aliquoties sumtum ipsi C fieri possit aequale; quantum A dicitur *mensura* seu *pars aliquota* seu *submultipulum* quanti C , et ipsum quantum C ipsius A *multipulum* vocatur. Pari ex ratione quantum B erit *mensura* seu *pars aliquota* sive *submultipulum* quanti D et B ipsius D *submultipulum*, si quantum B totum aliquoties positum ipsi D fieri potest aequale. Atque

que si quantum A toties sibi ipsi addendum est ad producendum quantum C, quoties B sibi ipsi debet addi, ut quanto D fiat aequalis, quanta A et B dicuntur *similes partes aliquotae* seu *aequesubmultipla* quantorum C et D, haec quae quanta C et D priorum A et B aequemultipla.

§. 177.

Si quantum aliquod ut C spectetur ut tale, quod ex pluribus partibus, quae vel aequales sunt, vel quorum inaequalitas non spectatur, compositum est, quantum illud *per numerum exprimi dicitur*. Multitudo enim earum partium, ex quibus compositum esse cogitatur, dicitur *Numerus integer* seu *Numerus simpliciter* et quaevis earum partium *Unitas* vocatur. Numeri, qui ex suis unitatibus eodem modo componuntur, vocantur *numeri aequales*. Proinde numeri possunt aequales esse, licet unitates, ex quibus componuntur, diversae sint: et quantum ut C exprimi potest per numerum scilicet integrum ex assumpta unitate A, si ex eadem aliquoties sibi addita componi potest.

§. 178.

Si duorum quantorum A et B capiantur aequemultipla C et D, ita ut A sit talis pars aliquota ipsius C, qualis pars aliquota est A ipsius D; erit $A : C = B : D$.

DEM. Quantum A toties continetur in quanto C, quoties B continetur in quanto D. Proinde magnitudo ipsius C eodem modo determinatur ex magnitudine ipsius A, quo magnitudo ipsius D ex magnitudine ipsius B determinari potest; ex quo patet, esse $A : C = B : D$ (§. 168.).

COR. I. Quantum C exprimi potest per numerum ex unitate A, atque D exprimi potest per numerum ex unitate B, qui numeri iidem erunt (§. 177.). Si igitur numerus, per quem C ex unitate A exprimitur, denotetur per *m*, etiam numerus per quem D ex unitate B exprimitur littera *m* indicari debet. Ideo erit $C = mA$ et $D = mB$.

$= mB$. Ex quo patet, hanc proportionem generaliter veram esse $A : mA = B : mB$, denotante nimirum m numerum quemcunque integrum.

COR. II. Si quantum aliquod E exprimi possit per numerum ex unitate A a numero m diversum, isque indicetur littera n , praeterea vero aliud quantum F exprimi possit per numerum ex unitate B aequalem numero n , erit quoque $A : E = B : F$, seu $A : nA = B : nB$, quae proportio eadem est cum ista $nA : A = nB : B$ (§. 168. Cor.). Si cum hac comparetur analogia prior $A : mA = B : mB$, exinde deducitur $nA : mA = nB : mB$ (§. 175.), vel $E : C = F : D$ (§. 175.), ubi n et m numeros integros denotant.

§. 179.

Duo quanta ut C et E , vel D et F , quae exprimi possunt per numerum integrum ex eadem unitate A vel B , dicuntur *commensurabiles*, quia aliquam mensuram habent communem; et ratio inter ejusmodi quanta commensurabilia dicitur *Ratio rationalis*. Quod si dentur duo quanta talia, quae nullam plane mensuram communem admittant, eadem *incommensurabilia* vocabuntur, et ratio inter ejusmodi quanta incommensurabilia *Ratio irrationalis* dicetur.

COR. I. Commensurabilia quanta inter se rationem habent, ut numerus ad numerum; seu ratio duorum quantum commensurabilium per duos numeros exprimi potest. Atque si duo quanta sint inter se ut numerus ad alium numerum, ipsa quanta erunt commensurabilia.

COR. II. Incommensurabilia quanta si dantur, eadem inter se rationem non habent, ut numerus ad numerum; atque si duo quanta inter se non habent rationem, quam numerus habet ad numerum; eadem quanta incommensurabilia erunt.

COR. III. Si quatuor quanta $A : B = C : D$ fuerint proportionalia, atque A et B sunt commensurabilia, etiam C et

C et D commensurabilia erunt. Si vero A et B sunt incommensurabilia, idem de quantis C et D verum erit.

COR. IV. In Cor. 2. §. praec. habetur criterium proportionalitatis quantorum commensurabilium.

§. 180.

Si duo quanta C et E sunt commensurabilia, atque unum eorum ut C totum non possit esse mensura alterius E, seu unitas, ex qua E ut numerus integer exprimitur; potest tamen E ex parte quadam ipsius C aliquota, ea nimirum, quae est ipsorum C et E communis mensura, aliquoties repetita componi, et proinde ut numerus ex hac communi mensura tanquam unitate exprimi, qui *numerus* dicitur *fractus* seu *fractio*, si C spectetur ut unitas, quia est multitudo partium unitatis aliquotarum, non vero multitudo ipsarum unitatum. Proinde ut fractionis obviae magnitudo cognoscatur, innotescere debet primo numerus partium aequalium, in quas unitas divisa esse concipitur, qui *Denominator* fractionis audit: deinde innotescere debet, quoties ejusmodi pars ad fractionem componendam est repetita, et numerus exprimens, quoties hoc factum sit, *Numerator* fractionis vocatur. Si litteræ alphabeticae, *a*, *b*, *c*, etc., denotent numeros integros; fractus numerus scribitur ducta linea transversa, et numeratore supra eam denominatore infra collo-

cato, hoc modo $\frac{a}{b}$. Fractio cujus numerator est

minor denominatore, dicitur *Fractio vera*. *Fractio spuria* est, cujus numerator denominatori aequalis, vel eodem major est. *Fractiones aequales* sunt, quae eodem modo ex suis unitatibus componuntur.

COR. I. Si numerus partium aliquotarum, ex quibus componitur C exprimatur littera *m*, et numerus earundem partium, ex quibus E componitur, littera *n*, nu-

merus per quem exprimitur E ex unitate C erit $\frac{n}{m}$, at-

que

que ideo ipsum quantum E erit $= \frac{n}{m} C$. Simili ex

ratione erit quantum F $= \frac{n}{m} D$ si D sumatur pro

unitate. Cum igitur sit $E : C = F : D$ (§. 176. Cor. 2.),

fiet $\frac{n}{m} C : C = \frac{n}{m} D : D$. Pari autem ex ratione,

denotante $\frac{\nu}{\mu}$ numerum fractum quemcunque ab $\frac{n}{m}$

diversum, erit $\frac{\nu}{\mu} C : C = \frac{\nu}{\mu} D : D$, vel $C :$

$\frac{\nu}{\mu} C = D : \frac{\nu}{\mu} D$; atque ex hac analogia cum prio-

ri comparata habetur $\frac{n}{m} C : \frac{\nu}{\mu} C = \frac{n}{m} D :$

$\frac{\nu}{\mu} D$.

COR. II. Si quantum A ipsi B est incommensurabile, quantum B ex A tanquam unitate nec ut numerus integer, nec ut numerus fractus poterit exprimi.

§. 181.

Quantum B divisum sit in certum numerum partium aequalium, quarum quaelibet sit a, ita ut a sit mensura quanti B. Numerus partium a, quae in B continentur, sit m. Sit aliud quantum A ipsi B incommensurabile atque ab eodem detrahatur a toties, quoties fieri potest, et residuum sit d, quod minus erit mensura a. Numerus exprimens, quoties mensura a in $A - d$ continetur, sit n; erit $A - d = na$, et $A = na + d$. Quodsi jam fuerit quantum, aliquod $F < A$; effici potest, ut fiat $na > F$.

DEM.

DEM. Si fuerit $F < A$, quantum A excedere debet quantum F differentia quadam, quae sit c , ita ut sit $F + c = A$. Praeterea est $na + d = A$, et proinde $F + c = na + d$. Jam vero semper est $d < a$, in quocunque partes aequales divisum sit B . Atque si fuerit $a > c$; quaelibet partium in B bissecetur ita ut a jam sit dimidio minor, quam ante, atque proinde et quaelibet partium in $A - d$ dimidio minor erit, quam ante. Semper vero supponitur partem a , quae est mensura quanti B , non esse mensuram quanti A , ut semper maneat $d < a$. Si adhuc fuerit $a > c$; bissectio repetatur, sicque tandem fiet $a < c$ (§. 161. Cor.). Quare cum perpetuo sit $d < a$, jam quoque erit $d < c$. Est vero semper $F + c = na + d$, quare nunc erit $na > F$.

§. 182.

Si fuerit quantum A quanto B incommensurabile, atque tertium quantum C incommensurabile quarto D ; quanta vero B et D divisa concipiantur in certum numerum partium aequalium, qui sit m , quaelibet vero partium in B sit a , et quaelibet partium in D sit b , ita ut totidem partes a sint in B , quot partes b sunt in D ; his vero positis semper sit $A > na$ et $A < (n+1)a$, atque simul $C > nb$ et $C < (n+1)b$, quemcunque numerum integrum litterae n et m denotent; littera n nimirum semper exprimente, quot partes a ipsius B actu contineantur in A , atque simul quot partes b ipsius D contineantur in C : dico, quatuor quanta B , A , D , C , vel A , B , C , D , esse proportionalia.

DEM. Quodsi proportio $B : A = D : C$ vel $ma : A = mb : C$ falsa sit, quantum C non erit quarta proportionalis ad quanta ma , A , et mb . Proinde quarta proportionalis ad ma , A , et mb esse debet vel minor vel major quanto C . Utrumque autem impossibile est.

Sit enim primo $E < C$, atque proportio $ma : A = mb : E$ supponatur vera esse. Quia est $E < C$ bissectione ipsius b effici potest, ut fiat $nb > E$ (§. 181.). Factum

F

11t,

fit, atque tum erit $na : ma = nb : mb$ (§. 178. Cor. 2.) ex qua analogia cum priori $ma : A = mb : E$ comparata fluit $na : A = nb : E$. Jam vero semper est $na < A$, proinde foret $nb < E$ (§. 168. Cor. 2.) cum tamen simul fit $nb > E$. Impossibile igitur est, ut sit quarta proportionalis ad ma , A , et mb , quanto C minor.

Secundo sit quantum $G > C$, atque sumatur proportio $ma : A = mb : G$ vera esse; dico hoc pariter impossibile esse. Primo enim statim patet per demonstrata, veram non esse proportionem $mb : C = ma : F$, si fit $F < A$. Tum vero, si fuerit H quarta proportionalis ad quanta G , C , et A , ita ut sit $G : C = A : H$; foret $H < A$, ob $C < G$. Ex duabus vero analogiis $ma : A = mb : G$ et $A : H = G : C$ consequitur $ma : H = mb : C$, vel $mb : C = ma : H$, (§. 175. et 136.). Haec vero proportio impossibilis est, quia $H < A$. Proinde et impossibile est, ut quarta proportionalis ad ma , A et mb quanto C major sit. Ipsa igitur proportio $ma : A = mb : C$, vel $B : A = D : C$ vel $A : B = C : D$ vera est.

§. 183.

Quodsi quatuor ista quanta A , B , C , D inter se comparando, quantisque B et D in m partes aequales divisus ut sit $B = ma$ et $D = mb$, inveniatur $A = na$, et $C in = nb$; vera non est proportio $A : B = C : D$.

DEM. Quodsi enim vera esset proportio $A : B = C : D$, vel $na : ma = C : mb$; etiam hæc proportio $na : ma = nb : mb$ esset vera (§. 178. Cor. 2.) ex qua cum priori collata consequeretur $C : mb = nb : mb$ (§. 179.) et proinde $C = nb$ (§. 171. Cor. 2.) quod est contra hyp.

COR. Data proportionem rationali $A : B = C : D$, atque terminis B et D in m partes aequales divisus, ut sit $B = ma$ et $D = mb$, si fuerit $A = na$; simul erit $C = nb$. Posito enim $C in = nb$, ponitur vera non esse proportio $A : B = C : D$ contra hyp.

§. 184.

§. 184.

Comparando quatuor quanta A, B, C, D inter se, atque divisis quantitibus B et D in m partes aequales, ut sit $B = ma$ et $D = mb$, si inveniatur $A > na$ et $A < (n+1)a$; C vero intra limites nb et $(n+1)b$ non contineatur: vera non est proportio $A : B = C : D$.

DEM. Quodsi C intra limites nb et $(n+1)b$ non contineatur, aliud quantum E ipsi C inaequale intra ejusmodi limites continebitur; atque hæc proportio vera esset $A : B = E : D$ (§. 182.). Posito igitur $A : B = C : D$, foret $C : D = E : D$ (§. 136.) et proinde $C = E$ (§. 171. Cor. 2.) contra hypothesein.

COR. Data proportionem irrationali $A : B = C : D$, atque terminis B et D in m partes aequales divisis, ut sit $B = ma$ et $D = mb$, si A contineatur intra limites na et $(n+1)a$ simul C intra limites nb et $(n+1)b$ continebitur. Ex opposita enim thesi fluit, proportionem $A : B = C : D$ non esse veram, contra hypothesein.

§. 185.

Si fuerit $a + b$ summa quantorum a et b, erit $n(a + b)$ hujus summae multipulum quodcunque $= na + nb$.

DEM. Quodsi enim partes a et b sibi ipsi addantur, atque ex summa $(a + b)$ toties sibi addita, quoties in numero n est unitas, componatur quantum $n(a + b)$ hoc ipsum quantum $n(a + b)$ compositum erit ex omnibus quantorum na et nb partibus simul sumtis, proinde $n(a + b)$ quantis na et nb simul sumtis erit aequale, seu quod idem est, fiet $n(a + b) = na + nb$.

COR. Quodsi fuerit $a - b$ differentia quantorum a et b, erit $(a - b) = na - nb$. Sit enim $a - b = d$, erit $a = d + b$ et $na = nd + nb$ (dem.) ex quo fit $nd = na - nb$ (§. 21.) $= n(a - b)$.

§. 186.

Si fuerit $A : B = C : D$ et quanta C et D quantis A et B homogenea; erit quoque $A \pm C : B \pm D = C : D$.

F 2

DEM.

DEM. Proportio $A : B = C : D$ vel rationalis erit, vel irrationalis. Quodsi primo fit rationalis, positis $B = ma$ et $D = mb$, existente a quantorum A et B , b vero quantorum C et D communi mensura, erit $A = na$, et simul $C = nb$, (§. 183. Cor.) proinde $na : ma = nb : mb$. Addantur jam harum rationum aequalium termini antecedentes et consequentes, vel subtrahantur C ab A et D a B , erit $A \pm C = na \pm nb$, et $B \pm D = ma \pm mb$. Quia jam est $na \pm nb = n(a \pm b)$ et $ma \pm mb = m(a \pm b)$; (§. praec.) erit $A \pm C = n(a \pm b)$, et $B \pm D = m(a \pm b)$. Ex §. 181. Cor. 2.) vero patet, esse $n(a \pm b) : m(a \pm b) =$, $na : mb$, quae proportio eadem est cum sequente $A \pm C : B \pm D = C : D$.

Si proportio $A : B = C : D$ est irrationalis, positis $B = ma$ et $D = mb$, quemcunque numerum denotat m , si $A > na$ et $A < (n+1)a$, erit simul $C > nb$ et $C < (n+1)b$ (§. 184. Cor.). Ex his deducitur $B \pm D = ma \pm mb = m(a \pm b)$, $A \pm C > na \pm nb$ et $A \pm C < (n+1)b \pm (n+1)b$, simul vero $C > nb$ et $C < (n+1)b$; id est $A \pm C > n(a \pm b)$ et $A \pm C < (n+1)(a \pm b)$, simulque $C > nb$ et $C < (n+1)b$. Ex quo iterum patet, esse $A \pm C : B \pm D = C : D$.

COR. Quodsi igitur fuerint plures analogiae huiusmodi $A : B = C : D$, $E : F = C : D$, $G : H = C : D$, $I : K = C : D$ etc, erit $A + E + G + I + \text{etc} : B + F + H + K + \text{etc} = C : D$.

§. 187.

Duorum quantorum A et B aequemultipla et aequesubmultipla sunt inter se ut ipsa quanta A et B.

DEM. 1) Quia est $A : B = A : B$ (§. 169.) erit $A + A : B + B = A : B$ (§. 186.), id est $2A : 2B = A : B$. Atque si fuerit $nA : nB = A : B$, erit quoque $(n+1)A : (n+1)B = A : B$ (§. 186.). Quia igitur est $2A : 2B = A : B$, erit quoque $3A : 3B = A : B$, et ideo porro $4A : 4B$

$4B = A : B$ sicque porro in infinitum. Quare generaliter est $nA : nB = A : B$.

2) Quodsi praeterea tam A quam B divisa fuerint in partes aequales quocunque numero m , ita ut quaelibet ha-

rum partium in A sit $\frac{1}{m} A$ et quaelibet earum partium

in B fiat $\frac{1}{m} B$; erunt A et B aequemultipla quantorum

$\frac{1}{m} A$ et $\frac{1}{m} B$, proinde *per cas. I.* est $A : B =$

$\frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B$.

COR. I. Prior Sphi propositio etiam sic exprimi potest. Si duo quanta A et B sumantur pro unitatibus, ex iisque componantur duo alia quanta nA et nB ut numeri integri, ita quidem, ut numeri illi iidem sint, haec quanta unitatibus suis erunt proportionalia.

COR. II. Ex propositione demonstrata quoque sequitur, hanc proportionem veram esse $n \frac{1}{m} A : n \frac{1}{m}$

$B = \frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B$. Proinde quia $\frac{1}{m} A : \frac{1}{m}$

$B = A : B$, exinde deducitur sequens analogia $n \frac{n}{m} A$

$: n \frac{1}{m} B = A : B$ (§. 170.). Quia igitur $n \frac{1}{m} A$ ex

A componitur ut numerus fractus ex unitate pariter ac

$n \frac{1}{m} B$ ex B , ita quidem ut suntis A et B pro unitati-

bus, $n \frac{1}{m} A$ et $n \frac{1}{m} B$ per eundem exprimantur nu-

merum fractum $\frac{n}{m}$, non tantum expressio $n \frac{1}{m}$ A, coincidit cum ea $\frac{n}{m}$ A, sed etiam ista exinde deducitur propositio. Si ex duobus quantis A et B componantur duo alia quanta $\frac{n}{m}$ A et $\frac{n}{m}$ B ut numeri fracti, ita quidem, ut numeri illi fracti iidem sint; erunt ista quanta unitatibus suis proportionalia.

COR. III. Quodsi igitur generaliter n et m denotent duos numeros diversos quoscunque, vel integros, vel fractos; erit $nA : nB = mA : mB$. Est enim $nA : nB = A : B$ et $mA : mB = A : B$, proinde $nA : nB = mA : mB$ (§. 170.).

§. 188.

In proportionem geometricam, cujus termini omnes sunt homogenei, est (permutando) terminus primus ad tertium, uti secundus ad quartum.

DEM. Si primo fuerit proportio $A : B = C : D$ rationalis, atque a quantorum A et B, b vero quantorum C et D communis mensura, ut $A : B = C : D$ eadem sit cum ista analogia $na : ma = nb : mb$; statim patet, proportionem $na : nb = ma : mb$ veram esse ex Cor. 3. §. præc. quae eadem est cum ista $A : C = B : D$. Quodsi vero proportio $A : B = C : D$ sit irrationalis, atque termini B et D divisi fuerint in partes aequales quocunque, quarum numerus sit m , ita ut fiat $B = ma$ et $D = mb$; erit $A > na$ et $A < (n+1)a$, et praeterea $C > nb$ et $C < (n+1)b$. Dico et hoc casu proportionem $A : C = B : D$, vel $A : C = ma : mb$, vel quod idem est $ma : mb = A : C$ veram esse. Si enim falsa sit, quarta proportionalis ad quanta ma , mb , et A vel major vel minor esset quanto C, quod tamen impossibile esse sic demonstro. Sit primo $E < C$, et proportio $ma : mb = A : E$ vera, atque bisse-

bissectione ipsius b continua effici potest, ut fiat $nb > E$ (§. 181.). Factum sit, eritque perpetuo $ma : mb = na : nb$ (*per dem.*), ex qua analogia cum priori $ma : mb = A : E$ collata consequitur $na : nb = A : E$. Est vero perpetuo $na < A$, proinde foret $nb < E$, quod pugnat cum hypothese $nb > E$.

Quodsi secundo fuerit $E > C$ atque proportio $ma : mb = A : E$ vera esse sumatur, simile absurdum sequitur. Primo enim patet proportionem $mb : ma = C : F$ esse falsam, si $F < A$ (*per dem.*). Deinde si quartum proportionale ad quanta E , A et C sit F , ita ut proportio $E : A = C : F$ vera sit, ob $C < E$, debet esse $F < A$. Ex hac vero analogia cum priori $ma : mb = A : E$ vel $mb : ma = E : A$ collata deducitur $mb : ma = C : F$, quam falsam esse ob $F < A$ jam demonstratum est. Quartum igitur proportionale ad quanta ma , mb et A non aliud est nisi C , et proinde proportio $ma : mb = A : C$ vel $A : C = ma : mb$, vel $A : C = B : D$ est vera.

§. 189.

Ex proportionem $A : B = C : D$ etiam sequitur proportio $nA : B = nC : D$ vel $A : nB = C : nD$, pro n scripto numero integro vel fracto quocunque.

DEM. Si fuerit $A : B = C : D$, erit quaque $A : C = B : D$, et quia $A : C = nA : nC$ (§. 118. cum Cor.): erit $nA : nC = B : D$ (§. 170.), proinde $nA : B = nC : D$ (§. 188.). Deinde quoque est $B : D = nB : nD$, hincque $A : C = nB : nD$, ergo quoque $A : nB = C : nD$ (§. 188.). Loco n etiam numerum fractum poni posse ex Cor. 3. §. 187. apparet.

COR. Ex proportionem igitur $A : B = C : D$ ista quoque consequitur $nA : mB = nC : mD$.

§. 190.

In omni proportionem $A : B = C : D$ est summa termini primi et secundi ad terminum secundum, uti summa termini tertii et quarti ad terminum quartum. Atque si fue-

rit $B < A$, et proinde quoque $D < C$; erit $A - B : B = C - D : D$.

DEM. Ex proportionem $A : B = C : D$ fluit $A : C = B : D$ (§. 188.) atque ex hac denuo $A + B : C + D = B : D$ (§. 186.) et $A - B : C - D = B : D$ (§. 186.). Proinde habetur $A + B : B = C + D : D$ et $A - B : B = C - D : D$ (§. 188.).

§. 191.

Si dentur duae proportionem $A : B = C : D$ et $E : F = G : H$, et termini earundem ordine ad se invicem addantur, vel posterioris termini a terminis prioris ordine subtrahantur; summae vel differentiae iterum sunt in proportionem geometrica.

DEM. 1) Si utraque proportio sit rationalis ut loco prioris habeatur $na : ma = nb : mb$ et loco posterioris $nc : mc = nd : md$; statim patet, esse $na \pm nc : ma \pm mc = nb \pm nd : mb \pm md$, vel $n(a \pm c) : m(a \pm c) = n(b \pm d) : m(b \pm d)$ (§. 178. Cor. 2.).

2) Si una earum est rationalis $na : ma = nb : mb$ et altera irrationalis $E : mc = G : md$; erit $A = na$ et $A < (n+1)a$, $C = nb$ et $C < (n+1)b$, $B = ma$, $F = mc$, $D = mb$, $H = md$. $E > nc$ et $E < (n+1)c$, $G > nd$ et $G < (n+1)d$. Ex his deducitur $B \pm F = ma \pm mc$ et $D \pm H = mb \pm md$. $A \pm E > na \pm nc$ et $A \pm E < (n+1)a \pm (n+1)c$. Denique $C \pm G > nb \pm nd$ et $C \pm G < (n+1)b \pm (n+1)d$. Ergo et hoc casu est $A \pm E : B \pm F = C \pm G : D \pm H$ (§. 182.).

3) Si utraque harum proportionum est irrationalis, reliquis manentibus fit $A > na$ et $A < (n+1)a$, $C > nb$ et $C < (n+1)b$, atque ideo et hoc casu est $B \pm F = ma \pm mc$, $D \pm H = mb \pm md$, $A \pm E > na + nc$, $A \pm E < (n+1)a \pm (n+1)c$, atque simul $C \pm G > nb \pm nd$, $C \pm G < (n+1)b \pm (n+1)d$. Proinde $A \pm E : B \pm F = C \pm G : D \pm H$ (§. 182.).

COR. Hinc et pluribus proportionibus datis

$$A : B = C : D$$

$$E : F = G : H$$

$$I : K = L : M, \text{ etc.}$$

habetur $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$.

§. 192.

Si fuerit ratio quaedam $A : C$ composita ex duabus rationibus $M : N$ et $O : P$; ratio, quae ex iisdem rationibus $O : P$ et $M : N$ sed inverso ordine componitur, priori $A : C$ erit aequalis.

DEM. Si fuerit $A : B = M : N$, et $B : C = O : P$, ratio $A : C$, ex rationibus $M : N$ et $O : P$ erit composita. Si praeterea fuerit $A : D = O : P$ et $D : E = M : N$, ratio $A : E$ ex iisdem simplicibus sed inverso ordine componitur. Dico rationem $A : C$ aequalem esse rationi $A : E$, quod erit demonstratum, si ostensum fuerit, esse $E = C$. Est vero ex hypothese $A : B = M : N$, et $D : E = M : N$; proinde $A : B = D : E$. Deinde $B : C = O : P$ et $A : D = O : P$, ideo $A : D = B : C$ (§. 170.) et $A : B = D : C$ (§. 188.) ex qua analogia cum priori $A : B = D : E$ collata patet, esse $D : C = D : E$, et proinde $C = E$. Ratio igitur $A : C$ rationi $A : E$ aequalis est.

COR. Ideo generaliter duae rationes ex eodem numero rationum simplicium aequalium quocunque ordine compositae sunt rationes aequales.

§. 193.

Si fuerit $A : B = M : N$ et $B : C = O : M$, erit (perturbate et ex aequo) $A : C = O : N$.

DEM. Ratio $A : C$ composita est ex rationibus $M : N$ et $O : M$, atque ratio $O : N$ ex iisdem composita est rationibus sed inverso ordine. Proinde ratio $A : C$ rationi $O : N$ aequalis erit (§. praec.).

F 5

COR. I.

COR. I. Si dentur duæ proportiones, $A : B = M : N$ et $C : B = M : O$, ita ut termini medii in utraque proportionem sint iidem, erit quoque $A : C = O : N$. Ultima enim proportio sic scribi potest $B : C = O : M$. Tum vero, ut demonstratum est, sequitur proportio $A : C = O : N$.

COR. II. Si in duabus proportionibus $B : A = N : M$ et $B : C = O : M$ termini extremi sint iidem, sequitur hæc proportio $A : C = O : N$, cujus consequentiae veritas patet, proportionis primæ terminis ita transpositis $A : B = M : N$.

§. 194.

Si fuerit ratio $A : C$ composita ex duabus rationibus $M : N$ et $O : P$; eadem ratio quoque composita erit ex rationibus $O : N$ et $M : P$, vel $M : P$ et $O : N$, quæ oriuntur terminis rationum simplicium primis vel secundis solis transpositis.

DE M. 1) Sit enim $A : B = M : N$ et $B : C = O : P$, atque erit $A : C = \left\{ \begin{matrix} M : N \\ O : P \end{matrix} \right\}$. Deinde sit $A : D = O : N$ et $D : E = M : P$, erit $A : E = \left\{ \begin{matrix} O : N \\ M : P \end{matrix} \right\}$. Jam dico esse $A : C = A : E$, quod demonstrabitur ostendendo, esse $C : E$, sic argumentando. Quia est $O : N = A : D$, et $M : N = A : B$, erit $O : N = B : D$ (§. 192. Cor. 1), ex proportionem vero $B : C = O : P$ sequitur $P : O = C : B$ (§. 168. Cor. 3.) quæ cum priori comparata dat $P : M = C : D$; atque cum hac comparata $D : E = M : P$ vel $P : M = E : D$ habetur $C : D = E : D$ (§. 107.) unde concluditur $C = E$.

2) Quodsi deinde fuerit $A : B = M : N$ et $B : C = O : P$, vel $A : C = \left\{ \begin{matrix} M : N \\ O : P \end{matrix} \right\}$, præterea $A : D = M : P$ et $D : E = O : N$, id est $A : E = \left\{ \begin{matrix} M : P \\ O : N \end{matrix} \right\}$, dico iterum

rum fore $A : C = A : E$, quod patebit demonstrando esse $C = E$ sequentem in modum. Ex analogia $A : D = M : P$ vel $P : M = D : A$ comparata cum analogia $A : B = M : N$, vel $M : N = A : B$ fluit $P : N = D : B$ (§. 192.) atque cum hac analogia si comparetur $O : P = B : C$, habemus $O : N = D : C$ (§. 192.) quare cum fit $O : N = D : E$ fiet $D : C = D : E$ (§. 170.) et proinde $C = E$ (§. 171. Cor. 3.).

COR. Si igitur generaliter fuerit $A : X = \left\{ \begin{array}{l} M : N \\ O : P \\ Q : R \\ S : T \text{ \&c.} \end{array} \right\}$;

terminis primis M, O, Q, S , et secundis N, P, R, T , utcumque inter se permutatis ratio $A : X$ non mutabitur.

SECTIO VII.

DE

FIGVRARVM PLANARVM RECTILINEARVM SIMILITVDINE.

§. 195.

Triangula aequalium altitudinum sunt in ratione basium.

DEM, Si altitudines triangulorum ABC et DEF f. 90. aequales sunt, in base majori fiat $EG = BC$ et ducatur DG , eritque $\triangle DEG = \triangle ABC$ Tum vero EG et DF erunt aut commensurabiles incommensurabiles. Si prius fit, atque EH fuerit earum communis mensura, haec EH ab E versus F ponatur toties, quoties fieri potest, atque

atque EG et EF exprimi poterunt per numerum quendam integrum ex unitate EH, ita ut sit $EG = na$ et $EF = ma$, posito $EH = a$. Ducatur DH atque triangulum DEH fiet communis mensura triangulorum DEG et DEF, quod ultro patet, si a D ad omnia puncta divisionis in EF ducantur rectae. Hoc enim facto triangulum DEG dividetur in tot triangula ipsi DEH aequalia, quot partes habet EG ipsi EH aequales, et DEF dividetur in tot triangula ipsi DEH aequalia, quot partes habet EF ipsi EH aequales, sic ut posito $DEH = b$, fiat $DEG = nb$, et $DEF = mb$. Proportionem vero $na : ma = nb : mb$, quae eadem est cum $EG : EF = DEG : DEF$, veram esse, ex §. 178. Cor. 2. patet, ex qua ob $DEG = ABC$ et $EG = BC$ fluit $BC : EF = ABC : DEF$.

Si EG et EF forent incommensurabiles, EF dividatur in partes aequales quocunque numero, qui sit m , atque EG harum partium numerum quendam n superabit, sed numero $n + 1$ earum partium minor erit, quicunque numerus sit m . Tum vero si a D ad omnia divisionis puncta in EF ducantur rectae, fiet $DEF = mDEH$, DEG vero $> nDEH$ et $< (n + 1) DEH$. Quare cum etiam perpetuo sit $EG > nEH$ et $EG < (n + 1) EH$; hoc quoque casu proportio $EG : EF = DEG : DEF$, vel $AB : EF = ABC : DEF$ obtinet (§. 182.).

P. 91. COR. I. Ideo triangula ABC et DEF aequalium basium sunt ut altitudines AG et DH. Fiat enim $GL = CB$ et $HI = EF$. Ducantur rectae AL et DI, eritque $\triangle ABC : \triangle DEF = \triangle ALG : \triangle DHI = AG : DH$.

COR. II. Parallelogramma aequalium altitudinum sunt in ratione basium et parallelogramma aequalium basium sunt in ratione altitudinum, quia sunt ejusmodi triangulorum dupla (§. 187.).

§. 196.

Si in triangulo ABC ducatur DE lateri BC parallela, erit $AD : DB = AE : EC$.

DEM.

DEM. Ductis enim rectis DC et EB fiunt trian- f. 92.
gula DBE et DEC aequalia (§. 114. Cor. 1.). Ideo est
 $ADE : DBE = ADE : DEC$ (§. 169. Cor. 2.). Praeterea
est $ADE : DBE = AD : DB$, hincque $ADE : DEC =$
 $AD : DB$. Denique et $ADE : DEC = AE : EC$ (§. 194.)
proinde $AD : DB = AE : EC$ (§. 170.).

COR. I. Hinc datis duabus rectis F et G vel tribus F,
G et H reperitur tertia vel quarta proportionalis, facien-
do angulum quemcunque BAC et capiendo $AD = F$,
 $BD = G$, atque in priori casu $AE = G$, in posteriore
vero $AE = H$, tum vero ducta recta DE et huic paral-
lela BC: quo facto erit EC quaesita.

COR. II. Ex propositione $AD : DB = AE : EC$ porro
sequitur, fore $AD + DB : DB = AE + EC : EC$ (§. 190.)
id est $AB : DB = AC : EC$. Deinde quoque $DB : AD$
 $= EC : AE$, et $DB + AD : AD = EC + AE : AE$, id
est $AB : AD = AC : AE$.

§. 197.

*Trianguli ABC lateribus AB et AC ita divisus in D et
E, ut sit $AD : DB = AE : EC$, si ducatur recta DE; ea late-
ri BC erit parallela.*

DEM. Quia $AD : DB = AE : EC$ (hypo.) et triang.
 $ADE : DBE = AD : DB$, triang. $ADE : ECD = AE$
 $: EC$, erit triang. $ADE : DBE = ADE : ECD$, ideo-
que triangulum $DBE = ECD$ (§. 171. Cor. 3.) proinde
rectae BC et DE sunt parallelae (§. 114. Cor. 3. et III.
Cor. 3.).

§. 198.

*In triangulo ABC ducta linea recta DE basi BC paralle-
la, si BD dividatur bifariam in G atque EC in H, duca-
turque tertia intermedia GH; erit haec $GH = \frac{1}{2}DE +$
 $\frac{1}{2}BC$.*

DEM. Recta DE in F atque BC in I bifariam di- f. 93.
vidatur, ducanturque rectae GF, BE, IH. Iam in
triangulo DBE est $DF : FE = DG : GB$, ergo GF et
EB sunt rectae parallelae. In triangulo CBE est $CI : IB$
 $=$

$= CH : HE$, atque adeo rectae IH et BE parallelae. Praeterea, quia est DE ipsi BC parallela, erit $AD : DB = AE : EC$, (§. 196.), $AD : \frac{1}{2}DB = AE : \frac{1}{2}EC$ (§. 189.) et ideo $AD : DG = DE : EH$. Proinde et DE et GH parallelae sunt, atque $FGKE$ est parallelogrammum, ut et $KHIB$, hincque $GK = EF = \frac{1}{2}DE$, $KH = BI = \frac{1}{2}BC$, et $GH = GK + KH = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}BC$.

§. 199.

Si trianguli ABC angulus BAC bifariam sectus sit, recta autem AD angulum secans secuerit et basin in D , segmenta basis BD et CD proportionalia sunt reliquis trianguli lateribus AB et AC : Et vice versa si basis segmenta BD et DC eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera, recta AD ex vertice ad punctum D ducta bifariam secat angulum basi oppositum.

F. 94. DEM. Producatur BA , et fiat $AE = AC$. Ducta jam recta CE , erit

1. $BAC = ACE + E$ (§. 93. Cor. 3.) $= BAD + DAC$. Est vero $ACE = E$ (§. 60.) et $BAD = DAC$ (*hyp.*) ergo $E = DAC$, (§. 21.) atque recta DA ipsi CE parallela. Proinde $BA : AE$ vel $AC = BD : DC$.

2. $BA : AC$ vel $AE = BD : DC$ (*hyp.*) hincque recta DA rectae CE parallela (§. 197.) ergo ang. $BAD = E$ (§. 99.). Praeterea est angul. $DAC = ACE$ (§. 99.) et $ACE = E$ (§. 60.) quare $DAC = BAD$ (§. 13. Cor. 2.).

§. 200.

Datam rectam AB in ea ratione jecare, in qua secta est data quaevis alia AC .

F. 95. SOL. Lineae datae AC et AB connectantur sub angulo quocunque, ducaturque recta BC . Per data divisionis puncta in AC ducantur rectae DF , EH rectae BC parallelae, quae rectam AB , ut poscitur, dividunt.

DEM. Est enim $AF : FG = AD : DE$ (§. 196.). Per punctum D ducatur DI ad AB parallela, quo tacto
erit

erit $DE : EC = DH : HI$, et quia $FG = DH$, et $GB = HI$ (§. 107.) etiam $DE : EC = FG : GB$.

COR. Simili operatione recta quaevis data in partes quotcunque aequales dividitur.

§. 201.

Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera, quae respectu angulorum aequalium eodem modo sunt posita.

DEM. Statuatur latus BC in directum lateri CE et producantur ED, BA, donec sibi mutuo in F occurrant. Quia angul. $ABC = DCE$ (hyp.) erunt DC et FA parallelae, et quia angul. $ACB = DEC$ (hyp.) etiam AC et FD parallelae erunt (§. 89. Cor. 1.) proinde est $DC = AF$, et $FD = AC$ (§. 107.). Est vero $AB : AF = BC : CE$ (§. 196.) five $AB : DC = BC : CD$ (§. 169.). Praeterea $EC : BC = ED : DF$ vel AC (§. cit.), five $AC : ED = BC : EC$ (§. 168. Cor. 3.) hincque et $AC : ED = AB : DC$.

F. 96.

§. 202.

Figurae planae rectilineae dicuntur *similes*, si aequiangularae sunt, et latera respectu aequalium angulorum eodem modo posita proportionalia habent. Geometrae sequenti signo ($\sim$) utuntur ad denotandam figurarum similitudinem.

COR. I. Figurae planae rectilineae, quae sibi mutuo congruunt, sunt figurae similes.

COR. II. Omnia triangula aequiangularia sibi sunt similia (§. 201.) et omnia polygona regularia, quorum numerus laterum idem est, quia angulus, quem duo quaevis latera eiusmodi figurarum includunt, est constantis magnitudinis. Nimirum denotante n numerum laterum polygonorum angulus ille aequalis est summae omnium angulorum $2nR - 4R$ (§. 93. Cor. 8.) in n partes aequales divisae (§. 148.). Laterum proportionalitas evidens est.

COR. III.

96 SECTIO VII. DE FIGVRARVM PLANARVM

P. 92. COR. III. Si in triangulo ABC ducatur recta DE uni lateri BC parallela, triangulum ADE, quod refecatur, erit toti ABC simile.

§. 203.

Quod si punctum quoddam A sumatur vel intra vel extra circulum atque per idem ducantur duae rectae circulum secantes, quarum una circulo in punctis B et C, altera in punctis D et E occurrat; erunt partes unius harum rectarum secantium inter punctum A et puncta intersectionis cum circulo interceptae mediae proportionales inter partes alterius interceptas inter punctum A et puncta intersectionis cum circulo.

P. 97. DEM. Ductis lineis rectis BE et DC fiunt anguli BCD et BED aequales, (§. 146. Cor. 2.). Cum ergo et triangulorum ABE et ADC anguli apud A aequales sint (§. 31. et 13.) erunt ista triangula similia (§. 203. Cor. 1. coll. cum §. 93. Cor. 3.) ideoque $AB : AD = AE : AC$.

COR. Si punctum A extra circulum fuerit assumptum, atque angulus A crescat, differentia DE mediarum inter AB et AC proportionalium decrescit, atque evanescit, quando AE degenerat in rectam circulum tangentem, punctaque D et E in idem coincidunt: quo casu AD vel AE fit media proportionalis inter AB et AC.

§. 204.

Figurae rectilineae similes eidem tertiae et inter se sunt similes.

P. 98. DEM. Si figurae ABC et DEF similes sunt figurae GHI, erit angul. $A = G = D$, angul. $C = H = E$, et angul. $B = I = F$. Deinde $AB : AC = GI : GH = DF : DE$, praeterea $AC : CB = GH : HI = DE : EF$, et denique $AB : BC = GI : IH = DF : FE$. Ergo figurae ABC et DEF sunt similes.

§. 205.

Datis duabus rectis AE, EB invenire mediam proportionalem.

SOL.

SOL. Fiat $AB = AE + EB$, atque super eadem F. 99. describatur semicirculus. Erigatur ex E perpendicularis eaque producaturs usque ad peripheriam in F, quae recta EF erit media proportionalis quaesita.

DEM. In triangulis AFE et AFB est $\angle AFB = R = \angle AEF$, $\angle A = \angle A$, hinc triang. AFE $\sim$ triang. AFB. Deinde etiam in triangulis AFB et FEB est $\angle AFB = R = \angle FEB$, $\angle B = \angle B$, ideoque triang. AFB $\sim$ triang. FEB. Proinde quoque triang. AFE $\sim$ triang. FEB (§. 204.), et $AE : EF = EF : EB$ (§. 202.).

COR. I. Si in triangulo rectangulo ex apice anguli recti ad latus oppositum ducatur perpendicularis, triangulum dividitur in duo alia et inter se et toti similia.

COR. II. Linea recta, quae in circulo a quovis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur usque ad peripheriam, media est proportionalis inter duo diametri segmenta.

§. 206.

Triangula ABC et DEF, quorum singula latera homologa sunt proportionalia, similia sunt.

DEM. Fiat $\angle FEG = B$ et $\angle EFG = C$, quo F. 100. facto erunt ABC et EFG triangula aequiangula (§. 93. Cor. 6.) hincque $AB : BC = EG : EF$, et $AC : CB = FG : EF$ (§. 202. Cor. 2.). Sed est $AB : BC = DE : EF$ et $AC : CB = DF : EF$ (hypo.) ergo $EG : EF = DE : EF$ et $FG : EF = DF : EF$ (§. 170.) proinde $EG = DE$, et $FG = DF$ (§. 171. Cor. 2. 3.). Ex hoc autem sequitur, fore $\angle DEF = \angle GEF$ et $\angle DFE = \angle EFG$ (§. 75.) ideoque per constr. $\angle DEF = \angle ABC$ atque $\angle DFE = \angle ACB$, proinde et $\angle BAC = \angle EDF$, atque triang. ABC $\sim$ triang. DEF (§. 202. Cor. 2.).

§. 207.

Triangula, quae unum angulum aequalem habent, et latera angulum aequalem comprehendentia proportionalia, sunt similia.

DEM. Si in triangulis ABC et DEF fuerit $B = DEF$

G



DEF, et $AB : BC = DE : EF$, construatur angulus $FEG = B$ et $EFG = C$, eritque $G = A$ (§. 93. Cor. 6.), praeterea vero $GE : EF = AB : BC$ (§. 202. Cor.) hincque $GE : EF = DE : EF$ (§. 170.) et $GE = DE$ (§. 171. Cor. 2.). Denique est $DEF = ABC = FEG$ (*constr.*) et $FE = FE$, proinde angulus $D = G = A$, et $DFE = EFG = C$, quare triang. $ABC \sim$ triang. DEF .

§. 208.

Triangula, quae unum angulum aequalem habent, et praeterea duo latera angulum aequalem non comprehendentia proportionalia, quorum illud, quod angulo aequali opponitur, majus est adjacente, sunt triangula similia.

F. 101.

DE M. Si in triangulis ABC et DEF est $B = DEF$, praeterea vero $AB : AC = ED : DF$, fiat angulus $DEG = B$ et $EDG = A$, eritque et $EGD = C$. Porro autem $DE : GD = AB : AC$ (§. 202. Cor. 2.) = $ED : DF$, (*hyp.*) hinc est $GD = DF$ (§. 171. Cor. 3.). Cum praeterea sit $DE = DE$, $DF > DE$ (*hyp.*) hincque et $GD > DE$, et angulus $GED = B = DEF$ (*constr.*) erit quoque $EGD = C = EFD$ et $GDE = A = FDE$ (§. 87.), ex quo sequitur, esse triangulum $ABC \sim DEF$ (§. 202. Cor. 2.).

COR. Omnia triangula rectangula et obtusangula, quae angulum obtusum aequalem habent, similia sunt, in quibus latera angulum rectum vel obtusum non comprehendentia sunt proportionalia.

§. 209.

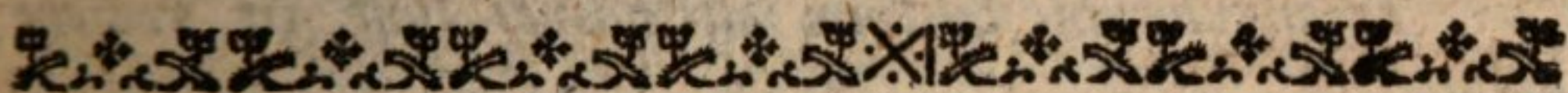
Figurae rectilineae similes resolvuntur in triangula similia, si apices angulorum aequalium eodem modo per lineas rectas connectantur.

F. 102.

DE M. Nam angulus $B = G$, et $AB : FG = BC : GH$, (*hyp.*) ideo est triang. $ABC \sim$ triang. FGH (§. 207.), ex quo fluit $BC : GH = CA : HF$. Praeterea est $BC : GH = CD : HI$, proinde $CA : HF = CD : HI$, et $BCD - BCA = ACD = GHI - GHF = FHI$, ergo triang. $ACD \sim$ triang. FHI , et $CD : HI = AD : FI$. Denique $CD :$

$CD : HI = DE : IK$, hincque $AD : FI = DE : IK$, et $CDE - CDA = HIK - HIF = ADE = FIK$. Ideo quoque triang. $ADE \sim$ triang. FIK .

COR. Si ea, quae hucusque §. §. 195 - 209. sunt explicata conferantur cum §§. 57. 74. 86. 97 et 98. ex iis sequuntur solutiones problematum: Dato triangulo vel generatim alia figura plana rectilinea construere figuram datae similem.



SECTIO II.

DE

COMPARATIONE FIGVRARVM PLANARVM, ET, QVAE HINC PENDENT, PROBLEMATVM PLANORVM CONSTRUCTIONIBVS.

§. 210.

Triangula quaevis sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum.

DEM. Si proposita fuerint duo triangula ABC et DEF , cum iis comparetur tertium triangulum GHI , cuius *altitudo* GM sit *aequalis altitudini* AK , *basis autem* HI *aequalis basi* EF , et erit $ABC : GHI = BC : (HI = EF)$, $GHI : DEF = (GM = AK) : DL$ id est $ABC :$

$$DEF = \left\{ \begin{array}{l} BC : EF \\ AK : DI \end{array} \right\} (\S. 173.).$$

COR. I. Quia est $2ABC : 2DEF = \text{Pgr. } AC : \text{Pgr. } DF = ABC : DEF$ (§. 187.), erunt quoque parallelogramma quaevis in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum.

COR. II. Si altitudines parallelogrammorum vel triangulorum fuerint ut eorum bases, parallelogramma vel triangula erunt in ratione duplicata basium vel altitudinum.

COR. III. Omnia quadrata sunt in ratione duplicata laterum hincque figurae planae quaevis, quae sunt in ratione duplicata aliquorum laterum, sunt uti quadrata eorundem laterum.

§. 211.

Triangulorum similium altitudines sunt in ratione basium.

- F.104. DEM. In triangulis similibus ABC et DEF sint anguli B et E, C et F aequales, suntisque BC et EF pro basibus erunt ad has demissae altitudines AG et DH. Jam triang. ABG $\propto$ triang. DEH et triang. AGC $\propto$ triang. DHF (§ 202. Cor. 2.) inde sequuntur analogiae BG : EH = AG : DH et GC : HF = AG : DH, unde BG + GC : EH + HF (vel BG - GC : EH - HF, si perpendiculares AG et DH cadant extra triangula) = AG : DH (§. 186.) id est BC : EF = AG : DH.

COR. I. Triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum (§. 210. Cor. 2.). Duae enim quaecunque triangulorum similium latera homologa sumi possunt pro eorundem basibus.

- F.102. COR. II. Omnes figurae rectilineae similes sunt in ratione duplicata homologorum laterum AB et FG vel diagonalium AC et FH. Divisis enim figuris in triangula similia erit ratio cujuslibet trianguli in figura ABCDE ad triangulum illi simile in figura FGHIK duplicata rationis AB : FG, vel AC : FH. Ergo et summa triangulorum in priori ad summam in posteriori figura, id est, ipsa figura prior ad posteriorem, est in eadem ratione (§. 186. Cor.).

COR. III. Figurae regulares similes circulo inscriptae sunt in ratione duplicata radiorum vel diametrorum illorum

rum circulatorum, quibus sunt inscriptae. Figurae enim regulares similes circulo inscriptae dividuntur in triangula similia, si ex centro circuli ad apices angulorum ducantur rectae, quae erunt radii ejus circuli, cui inscripta est figura. Ratio autem cujuslibet trianguli in una figura ad triangulum illi simile in altera figura erit duplicata rationis illorum radiorum. Quia praeterea ratio radiorum eadem est cum ratione diametrorum, (§. 186.) etiam duplicata ratio radiorum eadem est cum duplicata ratione diametrorum (§. 170.).

COR. IV. Sic et mutatis mutandis demonstrabitur de figuris regularibus similibus circulo circumscriptis, quod earum ratio sit duplicata radiorum vel diametrorum illorum circulatorum, quibus sunt circumscriptae. A centro enim circuli ad apices angulorum ejusmodi figurarum atque ad puncta contactus laterum cum circulo si ducantur rectae, polygona resolvuntur in bis tot triangula rectangula similia quot sunt latera polygonorum. Ratio autem cujuslibet trianguli in una figura ad triangulum in altera figura est duplicata rationis illorum radiorum vel diametrorum.

§. 212.

Parallelogrammorum BD et BF aequalium et unum angulum ABC uni EBG aequalem habentium latera, quae angulos aequales comprehendunt, sunt reciproce proportionalia: Et parallelogramma unum angulum ABC uni EBG aequalem habentia, quorum latera hunc angulum aequalem comprehendunt sunt reciproce proportionalia, aequalia sunt.

DEM. Si parallelogramma BD et BF talem habeant situm, ut latera AB et BG sint in directum, etiam BE et BC in directum jacebunt (§. 31. Cor. 2.). Producantur FG et DC donec in H concurrant et terminent parallelogrammum BH. F. 106.

1. Jam $AB : BG = BD : BH$ et $BE : BC = BF : BH$ (§. 195. Cor. 2.). Sed $BD = BF$ (*hyp.*) hinc $BE :$
 $G \quad 3 \quad BC$

$BC = BD : BH$, et $AB : BG = BE : BC$ (§. 170.).

2. $AB : BG = BD : BH$ et $BE : BC = BF : BH$ (§. 195. Cor. 2.) praeterea $AB : BG = BE : BC$, proinde $BD : BH = BF : BH$ (§. 170.) et $BD = BF$ (§. 171. Cor. 2.).

§. 213.

Triangulorum ABC et DBE aequalium, et unum angulum ABC uni DBE aequalem habentium latera, quae angulum aequalem comprehendunt, sunt reciproce proportionalia: Et triangula unum angulum ABC uni DBE aequalem habentia, quorum latera angulum aequalem comprehendunt, sunt in proportionem reciprocam, aequalia sunt.

E. 107. DEM. Latera CB, BD, circa aequales angulos statuantur sibi in directum, et ABE erit linea recta (§. 31. Cor. 2.). Ducatur CE. Jam erit $AB : BE = \text{triang. ABC} : \text{triang. CBE}$, et $DB : BC = \text{triang. DBE} : \text{triang. CBE}$. Si igitur

1. fuerit $ABC = DBE$, erit $AB : BE = DB : BC$.
Si vero

2. fuerit $AB : BE = DB : BC$, erit $ABC : CBE = DBE : CBE$ (§. 170.), hincque $ABC = DBE$ (§. 171. Cor. 2.).

COR. Triangulorum rectangulorum aequalium catheti sunt in reciproca proportionem, et triangula rectangula, quorum catheti sunt in reciproca proportionem, aequalia sunt.

§. 214.

Si quatuor lineae rectae AB, FG, EF, CB proportionales fuerint; rectangulum AC, quod sub extremis AB et CB comprehenditur, aequale est rectangulo EG, quod sub mediis EF et FG comprehenditur. Et vice versa, si fuerit rectangulum AC aequale rectangulo EG, erit $AB : FG = EF : CB$.

F. 108. DEM. Anguli B et F recti, et proinde aequales sunt (§. 26.) praeterea ex

1. hyp

1. *hyp.* est $AB : FG = EF : CB$, hincque rectang. $AC = EG$ (§. 212.).

2. *hyp.* $AC = EG$, proinde $AB : FG = EF : CB$ (§. *cit.*).

COR. Si duae mediae proportionales EF et FG aequales fuerint, quadratum lateris FG, vel EF, aequale erit rectangulo, quod sub extremis AB et CB comprehenditur. Ac si fuerit rectang. sub AB et CB = FGq, erit $AB : FG = FG : CB$.

§. 215.

Si altitudines parallelogrammorum vel triangulorum basibus reciproce proportionales fuerint, parallelogramma vel trianguia erunt aequalia: Et parallelogrammorum vel triangulorum aequalium bases altitudinibus reciproce proportionales sunt.

DEM. 1. Loco parallelogrammorum AC et FH F.109. construantur rectangula DI et LH ipsis respective aequalia (§. 113. Cor. 2.), atque si fuerit 1. $AD : EH = HM : DK$, erit rectang. $DI = LH$, hinc et Pgr. $AC = FH$. Si vero sit 2. Pgr. $AC = FA$, et ideo rectang. $DI = LH$, erit $AD : EH = HM : DK$.

2. Loco triangulorum ABC et DEF construantur F.110. trianguia rectangula AGC et DFH ipsis respective aequalia (§. 114. Cor. 2.) quo facto sit fuerit 1. $AC : DF = FH : CG$, esse debet triang. $ACG = DFH$, hinc et triang. $ABC = DEF$. Si vero fuerit 2. $ABC = DEF$, et ideo $ACG = DFH$, esse debet $AC : DF = FH : CG$.

§. 216.

Quadrare figuram planam est construere quadratum, quod datae figurae planae aequale est.

§. 217.

Quadrare rectangulum.

SOL. Datum sit rectangulum AC, 'unum ipsius F.111. laterum ut AB prolongetur versus E et fiat $BE = BC$. Super AE in G bifariam divisa describatur semicirculus

G 4

atque

atque producat^{ur} latus BC, donec semicirculo occurrat in F. Recta BF erit latus quadrati quaesiti.

DEM. Recta BF est media proportionalis inter AB et BE vel BC (§. 205. Cor. 2.) quae sunt rectanguli dati latera, proinde $BF^2 = \text{rectangulo dato AC}$ (§. 214. Cor.).

COR. Cuilibet parallelogrammo obliquangulo (§. 113. Cor. 2.) ut et triangulo (§. 116.) aequale rectangulum construui potest. Constructo igitur quadrato huic rectangulo invento aequali, habetur parallelogrammi obliquanguli vel trianguli quadratura.

§. 218.

Quadrare polygonum regulare.

P. 112. SOL. Ducatur recta CD, eaque fiat aequalis perimetro polygoni dati A, ex uno ipsius puncto extremo D erigatur DG perpendicularis, eaque fiat aequalis perpendiculari AB ex centro circuli polygono dato circumscripti ad ejus latus. Bissecetur CD in E atque lateribus ED et DG compleatur rectangulum EG (§. 108.). Construatur quadratum huic rectangulo aequale (§. 217.).

DEM. Polygonum A aequale est triangulo CGD (§. 152.) et huic triangulo aequale est rectangulum EG (§. 116.) quare polyg. $A = EG$

COR. Si CD sumatur aequalis peripheriae circuli A et perpendicularis DG aequalis radio hujus circuli, rectangulum EG erit circulo A aequale (§. 165.). Habemus igitur quadraturam circuli geometricam et exactam, sed tantum hypotheticam concessa ejus rectificatione, i. e. concessa linea recta peripheriae aequali.

§. 219.

Quadrare figuram planam rectilineam quamcunque.

SOL. et DEM. Construatur rectangulum figurae datae aequale (§. 119.). Tum vero construatur quadratum huic rectangulo aequale (§. 217.) idem et figurae datae aequale erit (§. 13. Cor. 2.).

§. 220.

§. 220.

In eodem vel aequalibus circulis anguli ad centrum sunt in ratione arcuum, quibus insistent: et sectores ejusdem vel aequalium circulorum sunt in ratione arcuum, quibus terminantur.

DEM. Si ABC et DEF fuerint sectores aequalium F.113. circulorum; in arcu majore EF fiat $EG = BC$, et ducatur DG, eritque angulus $BAC =$ angulo EDG et sector $BAC =$ sectori EDG. Generaliter in hac demonstratione tres ejusmodi litteræ tam angulum apud centrum, quam sectorem, cujus est angulus, denotabunt. Erunt vero arcus EF et EG vel commensurabiles, vel incommensurabiles. Si prius sit, atque EH eorum communis mensura, fiet $EF = mEH$, et $EG = nEH$, simul vero $EDF = mEDH$ et $EDG = nEDH$, atque ex § 178. Cor. 2. erit $nEH : mEH = nEDH : mEDH$, id est $EG : EF = EDG : EDH$, vel $BC : EF = BAC : EDF$. Si arcus EG et EF sunt incommensurabiles, arcu EF in partes aequales quocunque numero m diviso atque ad puncta divisionis omnia ductis radiis, erit $EF = mEH$ et $EDF = mEDH$. Praeterea $EG > nEH$ et $EG < (n+1)EH$, simulque $EDG > nEDH$ et $EDG < (n+1)EDH$, proinde hoc quoque casu ex §. 182. obtinet proportio $EG : EF = EDG : EDF$, vel $BC : EF = BAC : EDF$.

COR. I. In aequalibus circulis quoque anguli ad peripheriam AKB et DLE sunt in ratione arcuum quibus insistent. Est enim $ACB : DFE = \frac{1}{2}ACB : \frac{1}{2}DFE$ (§. 187.) $= AKB : DLE = AB : DE$.

COR. II. Sectores aequalium circulorum sunt ut anguli ipforum apud centrum.

COR. III. Angulus ACB ad centrum est ad $4R$ ut arcus AB ad integram peripheriam. Est enim ang. $ACB : R =$ arc. AB ad arcum quadrantem (conf. §. 138. Cor. 1.) ideo ang. $ACB : 4R =$ arcus AB ad 4 arcus quadrantes (§. 189) id est ad integram peripheriam.

COR. IV. Sector ABC est ad planum circulare, ut arcus AB ad peripheriam. Nam sector ABC est ad sectorem quadrantem, ut arcus AB ad arcum quadrantem, ideo sector ABC est ad 4 sectores quadrantes, id est ad integrum circuli planum, ut arcus AB ad 4 arcus quadrantes, id est, ad integram peripheriam.

F.114. COR. V. Inaequalium circulorum arcus AB, DE, qui aequales subtendunt angulos ad centrum, integris peripheriis sunt proportionales. Nam arc. AB : periph. = ang. ACB : $4R$, et arcus DE : periph. = (ACB vel DCE) : $4R$. Ergo arc. AB : periph. = arc. DE : periph. Duae igitur semidiametri a concentricis circulis auferunt arcus suis peripheriis proportionales.

COR. VI. quia est $DCE : 4R = DE : P$, et $4R : HCB = p : HB$, si P peripheriam circuli DEH, et p peripheriam circuli ABI denotet; erit $DCE : HCB = \left\{ \begin{matrix} DE : P \\ p : HB \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} DE : HB \\ p : P \end{matrix} \right\}$ (§. 193.), et quia $p : P = r : R$, si r indicet radium circuli ABI et R radium circuli DEH; erit $DCE : HCB = \left\{ \begin{matrix} DE : HB \\ r : R \end{matrix} \right\}$. Proinde si inter crura duorum angulorum planorum ex apice tanquam centro diversis radiis describantur arcus; erunt anguli in ratione composita ex directa arcuum et inversa radiorum.

§. 221.

Arcus circulorum, qui integris suis peripheriis sunt proportionales, vocantur *arcus similes*. *Sectores similes* et *segmenta similia* sunt, qui arcubus terminantur similibus.

F.114. COR. Sectores inaequalium circulorum, quorum anguli apud centrum aequales sunt, sunt sectores similes, (§. 220. Cor. 5.) et vicissim sectorum similium ABC et DEC anguli apud centrum sunt aequales. Est enim, si P et p denotent peripheriam, $AB : P = ACB : 4R$ et $DE : p = DCE : 4R$, praeterea $AB : P = DE : p$ (def.) hinc $ACB : 4R = DCE : 4R$ (§. 170.) atque $ACB = DCE$.

§. 222.

§. 222.

Sect̃or circuli aequalis est triangulo, cujus basis arcui sect̃oris, et altitudo radio aequalis est.

DEM. Basis FG trianguli rectanguli EFG aequalis sit peripheriae circuli ACD, et altitudo EF radio AB, eritque circulus ADC aequalis triangulo EFG (§. 165.) et $ADC : EFG = \text{periph. ACD} : \text{bas. FG}$. Praeterea fit $FH = AC$ et erit $FH : FG = AC : \text{periph. ACD}$ (§. 169. Cor. 2.). Est vero sector ACB : circ. ACDB = $AC : ACD$ (§. 220. Cor. 4.) et $EFH : EFG = FH : FG$ (§. 195.) hinc $EFH : EFG = ACB : ACDB$, et proinde $EFH = ACB$ (§. 171. Cor. 2.).

§. 223.

Circuli A et B sunt inter se ut quadrata diametrorum.

DEM. Quodsi proportio $A : B = CDq : EFq$ falsa sit, circulus B non erit quartum proportionale ad quanta CDq, EFq et A. Proinde quartum proportionale ad hæc quanta esse debet vel minus vel majus circulo B. Utrumque vero impossibile esse sic demonstro.

Sit primo figura $G < B$, atque proportio $CDq : EFq = A : G$ vera. Quia est $G < \text{circulo B}$, inscribi potest huic circulo B polygonum P majus figura G (§. 162.). Supponatur hoc factum esse, atque circulo A inscribatur polygonum p ipsi P simile; erit $CDq : EFq = p : P$ (§. 211. Cor. 3.) et proinde $p : P = A : G$. Quare cum sit $P > G$, foret $p > A$ (§. 171. Cor. 2.) quod est contra §. 150. Cor. 2.

Si deinde fuerit figura $H > B$, atque proportio $CDq : EFq = A : H$ vera, circulo B circumscribi potest polygonum P quod figura H minus est (§. 163.). Supponatur hoc factum esse, atque circulo A circumscribatur polygonum p ipsi P simile; erit iterum $CDq : EFq = p : P$ (§. 211. Cor. 4.) et proinde $p : P = A : H$; et quia $P < H$, foret $p < A$, quod contra §. 158. Cor. 3.

Quarta igitur proportionalis ad quanta CDq , EFq et circulum A nec major nec minor est circulo B , et proinde proportio $CDq : EFq = A : B$ vera.

COR. I. Cum etiam sit $CDq : EFq = \frac{CD}{CD} : \frac{EF}{EF}$, et

hinc quoque $A : B = \frac{CD}{CD} : \frac{EF}{EF}$, erunt circuli in ratione duplicata diametrorum.

COR. II. Praeterea est $CD : EF = \frac{1}{2}CD : \frac{1}{2}EF = AD : BF$, hinc quoque circuli sunt in duplicata ratione radiorum, vel ut radiorum quadrata.

COR. III. Circuli sunt inter se ut polygona regularia similia illis inscripta et circumscripta.

§. 224.

Sectores similes sunt in ratione duplicata radiorum vel diametrorum circulorum, quorum sunt sectores, et in eadem ratione sunt segmenta similia.

F. II 4. DEM. 1) Si $AFBC$ et $DGEC$ fuerint sectores similes circulorum c et C , quorum peripheriae sunt p et P , erunt anguli ACB et DCE aequales (§. 221. Cor.). Praeterea est $AFBC : c = AB : p$; $DGEC : C = DE : P$ (§. 220. Cor. 4.) et $AB : p = DE : P$ (hyp.). Proinde $AFBC : c = DGEC : C$ (§. 170. Cor.) vel $AFBC : DGEC = c : C$ (§. 188.). Cum igitur sit $c : C = ACq : DCq$ (§. 223.) erit quoque $AFBC : DGEC = ACq : DCq$ (§. 170.).

2) Praeterea si segmenta AFB et DGE sunt similia, erunt arcus AB et DE similes, hincque ductis radiis AC , BC , DC , EC , oriuntur sectores similes $AFBC$ et $DGEC$, atque praeterea triangula ABC et DEC similia. Proinde $AFBC : DGEC = ACq : DCq$ (Dem.) et triang. $ABC : \text{triang. } DEC = ACq : DCq$ (§. 211. Cor. 1.). Ideo $AFBC - ABC : DGEC - DEC = ACq : DCq$ (§. 186.) id est $AFB : DGE = ACq : DCq$.

COR. I.

COR. I. Sectors similes et segmenta similia sunt inter se ut circuli, quorum sunt sectores, vel segmenta.

COR. II. Sectors similes et segmenta similia sunt quoque in ratione duplicata chordarum, quae subtendunt eorum arcus.

§. 225.

Peripheriae et semiperipheriae circulorum sunt inter se ut radii vel ut diametri.

DEM. Trianguli rectanguli EFG basis FG sit = F. II7. ACD, et altitudo EF = AB, trianguli vero rectanguli NOP basis OP = IKM et altitudo NO = LI erit ABCD = EFG et IKLM = NOP, ergo ABCD : IKLM = EFG : NOP; est vero ABCD : IKLM = $\left\{ \begin{matrix} AB : IL \\ AB : IL \end{matrix} \right\}$,

et EFG : NOP = $\left\{ \begin{matrix} EF : NO \\ FG : OP \end{matrix} \right\}$.

Sit AB : IL = M : N

et AB : IL = N : O

erit M : O = $\left\{ \begin{matrix} AB : IL \\ AB : IL \end{matrix} \right\}$

Deinde sit FE : NO = P : Q

et FG : OP = Q : R

erit P : R = $\left\{ \begin{matrix} FE : NO \\ FG : OP \end{matrix} \right\}$

et proinde M : O = P : R

vel M : P = O : R.

Est vero AB : IL = FE : NO

et proinde M : N = P : Q

vel M : P = N : Q

ex quo concluditur O : R = N : Q

vel N : O = Q : R

et proinde AB : IL = FG : OP

vel quia ACD = FG et IKM = OP, est AB : IL = ACD : IKM = $\frac{1}{2}$ ACD : $\frac{1}{2}$ IKM = 2AB : 2IL = AP : IQ (§. 187.).

COR.

COR. Cum sectorum et segmentorum similium arcus sint ut integrae peripheriae, erunt hi quoque ut radii, vel diametri: cum praeterea radii sint ut chordae segmentorum similium, sunt quoque segmentorum similium arcus, ut eorum chordae.

§. 226.

Quodsi latera trianguli rectanguli ABC fuerint chordae segmentorum similium AEB, BCD, AFC, vel latera figurarum rectilinearum similium homologa; erit figura hypothenuae adscripta aequalis summae figurarum reliquarum.

F.118. DEM. Est enim $ACq = ABq + BCq$, et $ABq : BCq = AEB : BDC$ (§. 211. Cor. 2. et 224. Cor. 2.), vel $ABq + BCq : BCq = AEB + BDC : BDC$. i. e. $ACq : BCq = AEB + BDC : BDC$. Porro est $ACq : BCq = AFC : BDC$. §. cit. hinc $AEB + BDC : BDC = AFC : BDC$ (§. 170.) et proinde $AEB + BDC = AFC$ (§. 171. Cor. 3.).

COR. I. Semicirculi sunt segmenta similia. Semicirculus igitur super hypothenusam trianguli rectanguli aequalis est summae semicirculorum super cathetos descriptorum. Idem quoque de integris circulis verum esse facile perspicitur.

COR. II. Ex his deducitur solutio problematis: *Datis duobus circulis alium invenire aequalem summae vel differentiae datorum.*

COR. III. Hinc etiam habetur quadratura lunularum AEBG et BDCH, quae simul sumtae aequantur triangulo ABC; vel unius lunulae AGBE separatim sumtae, aequalis dimidio trianguli ABC, si fuerit chorda $AB = BC$.



SECT.

SECTIO IX.

DE

PLANORVM ATQVE RECTARVM LI-
NEARVM IN RESPECTV AD DIVERSA
PLANA SITV.

§. 227.

*Intra eosdem terminos non nisi unicum contineri potest
planum.*

DEM. Ponamus, lineam ABCD terminare duo F.119.
plana diversa, atque in eadem sumi possunt duo puncta
A et C talia, ut recta AC, quae inter eadem duci potest,
non sit pars perimetri plana terminantis. Haec recta
AC erit in uno illorum planorum, quia puncta A et C
sunt in hoc plano: verum eadem recta erit quoque in
altero plano (§. 5.). Proinde inter duo puncto A et
C cadunt duae rectae diversae, quod contra §. 7.

§. 228.

*Quodcunque planum unico tantum modo produci potest
versus easdem partes.*

DEM. Sit AC planum, quod produci concipia- F.120.
tur versus D. In linea BC, qua prius terminabatur
planum AB, quam producebatur, sumto puncto F, et
in ipso plano nondum producto puncto E, ducta sit re-
cta EF. Prolongetur ea versus F, eaque, quousque pro-
longetur, erit in plano AD pariter, quoad opus est,
producto (§. 5.). Jam ponatur planum AC denuo ver-
sus easdem partes ad I produci posse, ita ut ABI adhuc
sit planum, ejus pars prolongata BI vero cum BD non
coincidat, recta EF quoque in plano ABI prolongari
potest versus G ita, ut EFG quoque sit recta linea. (§.
5.).

51.). Ideo eadem recta EF plus unico modo foret prolongata, quod contra §. 7.

§. 229.

Planum *per puncta data ponere* est, eum plano inducere situm, quo puncta illa in planum cadunt.

COR. Planum per tria quaelibet puncta poni potest. Per duo puncta idem poni posse, facile patet; quo facto nisi tertium punctum jam in idem cadat, attinget tandem, si circa duo priora revolvatur, hoc tertium, ubicunque hoc positum sit, quia planum ponitur indeterminatae magnitudinis.

§. 230.

Per data tria puncta, quae non sint in eadem recta posita, *situs plani determinatur ita, ut pluribus planis quocunque numero per eadem tria puncta positis illa omnia coincidunt.*

F.121.

DEM. Data sint tria puncta A, B, C et per eadem positum sit planum DE. Ducantur rectae AB, BC, AC, quae terminabunt triangulum planum ABC. Jam vero aliud quoddam planum per eadem tria puncta positum esse concipiatur, erunt et rectae AB, BC, AC, in eodem hoc altero plano (§. 5.) et pars hujus plani posterioris inter perimetrum trianguli ABC intercepra coincidet cum parte prioris plani inter ejusdem trianguli perimetrum intercepta (§. 227.). Coincidunt igitur haec plana quoque in reliquis partibus extra perimetrum hujus trianguli sitis (§. 228.).

COR. Tria puncta A, B, C, ubicunque posita, si connectantur rectis AB, BC, AC, oritur triangulum. Nam puncta A, B, C sunt in eodem plano, et AB, BC, AC sunt rectae ejus plani puncta connectentes, quae ideo in idem planum cadent (§. 5.), unde ABC erit figura plana trilatera.

COR. II. Rectae, quae duas rectas parallelas utcunque connectunt, omnes in idem planum cadunt, in quo
sunt

sunt parallelae illae, quarum utraque in eodem est plano (§. 89.). Cujusvis igitur parallelogrammi latera sunt in eodem plano.

§. 231.

Si duo plana sese secant, communis eorum intersectio est linea recta, et quidem unica.

DEM. Si duo plana AB et CD sese secant, id in F.122. quo se interfecant, nimirum EF, lineam esse, ultro patet, quia est communis planorum AF, EC, EB, FD terminus (§. 1.). Eadem vero linea simul recta est. Si enim foret linea non recta, per tria puncta non in eadem recta posita transirent plana non coincidentia, quod esse nequit. Est igitur communis duorum planorum intersectio unica recta.

§. 232.

Si recta per planum transeat, ipsi cum plano non nisi unicum punctum commune est.

DEM. Id, quod plano sub hac hypothese commu- F.123. ne est, non esse solidum, nec superficiem, nec lineam curvam, ultro patet. Verum etiam non est linea recta. Si enim linea recta AB cum plano CD haberet partem EF communem, ea pars in eodem plano produci posset versus G. Quare si etiam AF foret in directum ipsi EF, rectae EG et AB sese secarent in linea. Idem sequeretur, si quis statuere velit, rectam cum plano plura puncta E et F habere posse communia. Inter duos ejusmodi puncta tamen caderet recta EF et quidem unica tantum in plano CD, quia puncta E et F sunt in illo plano. Ipsa illa recta EF autem quoque pars esset rectae AB, quia puncta E et F in ea recta sumuntur. Haberetur igitur planum cum recta AB partem EF communem, quod falsum esse jam demonstratum est.

COR. Quodvis planum ut CD integrum spatium dividit in duas partes oppositas. Atque si in una earum partium sumatur punctum quoddam A, in altera vero op-

posita punctum B, recta AB, quae haec puncta connectit, per plani CD si opus est producti, punctum aliquod certo transibit. Ac pari ratione planum AB, quod transit per puncta A et B respectu plani CD ad oppositas partes sita, hoc planum CD certo in recta quadam EF secabit.

§. 233.

P.122. Quodsi in plano EB ducatur GH communi intersectioni EF planorum AB et CD perpendicularis, atque ex puncto G in plano EC eidem rectae EF ducatur perpendicularis GI, recta EF plano anguli IGH ita insistit in puncto G, ut duabus rectis GH et GI, in plano HGI ductis et in puncto G se invicem secantibus perpendicularis sit. Ex quo patet, possibile esse, ut recta quaedam duabus aliis lineis rectis se mutuo secantibus in puncto intersectionis perpendiculariter insistat, si nimirum haec recta cum prioribus non sit in eodem plano.

§. 234.

Si recta EF duabus rectis AB et CD se mutuo secantibus in puncto intersectionis F perpendicularis est; eadem recta EF omnibus reliquis rectis, quae in plano anguli BFD per punctum F duci possunt, perpendicularis erit.

P.124. DEM. Factis $FC = FD$, atque $FB = FA$, ducantur rectae AC, CB, BD, DA, quae omnes erunt in plano anguli BFD. Ducta jam sit per punctum F tertia quaecunque recta GH in plano anguli BFD, quae rectam BD in G atque rectam AC in H secet. Denique si a puncto quodam E in EF pro lubitu assumpto ad puncta A, H, C, B, G, D, ductae fuerint rectae exinde concludimus sequentia.

$$1) \triangle FBD = \triangle FCA \text{ (§. 59.) ideoque } BD = CA, \\ FBD = FAC, FDB = FCA.$$

$$2) \triangle FBG = \triangle AFH \text{ (n. 1, et §. 94.) proinde } BG = \\ AH, FG = FH.$$

$$3) \triangle EDF = \triangle EFC \text{ (§. 59.) } ED = EC.$$

$$4) \triangle$$

$$4) \triangle EBF = \triangle EAF \text{ (§. 59.) } EB = EA.$$

$$5) \triangle EBD = \triangle EAC \text{ (n. 1. 3. 4. et §. 75.) ergo } EBG = EAH.$$

$$6) \triangle EBG = \triangle EAH \text{ (n. 2. 4. 5. et §. 59.) proinde } EG = EH.$$

$$\text{Denique } 7) \triangle EFG = \triangle EFH \text{ (n. 2. 6. et §. 75.) et ideo}$$

anguli EFG et EFH aequales et recti (§. 25.).

§. 235.

Linea recta EF ad planum CD *recta vel perpendicularis* F.124. esse dicitur, si, ductis per punctum F, in quo linea plano occurrit, in plano CD rectis AB, CD, GH, utcunque, recta EF ad eas omnes perpendicularis est. Eodem posito et planum CD rectae EF *perpendiculare* F.125. vel *rectum* esse dicitur. Recta autem CB, quae plano FG quidem in B occurrit, sed ad illud perpendicularis non est, *plano obliqua* dicitur. Tum vero, si a puncto quodam C rectae illius CB ad planum cadat perpendicularis CD, atque a puncto D, quod perpendicularis in eo plano designaverit, ad lineae obliquae CB extremum B, quod in eodem est plano, tertia ducta fuerit recta linea BD; angulus planus CBD hac tertia linea BD et obliqua CB comprehensus *inclinatio lineae obliquae ad planum vocatur*.

COR. I. Si duae rectae lineae AB, CD, in plano CD, ductae se invicem secant apud F, atque tertia recta EF utrique ad F perpendiculariter insistat; haec recta EF plano CD perpendicularis est (§. praec.).

COR. II. Per punctum B in plano FG datum unica tantum transit recta AB plano perpendicularis, reliquae omnes, ut BC plano FG obliquae sunt. Si enim per puncta A, B, C, planum ponatur, quod planum FG in BD secet, est angulus ABD rectus, hinc CBD acutus.

COR. III. Per punctum etiam C extra planum FG F.125. datum una tantum transit CD plano perpendicularis. Si

enim praeter CD et alia recta CB per punctum C ducatur plano occurrens in B , ducaturque BD , est angulus D rectus et ideo B acutus.

COR. IV. Eadem recta EF duobus planis AB et CD se invicem secantibus ad idem punctum F simul perpendicularis esse nequit. Sumto enim puncto G quocunque in uno planorum AB extra communem intersectionem, atque ducta recta FG , planum anguli EFG secabit quoque planum CD in recta quadam FH . Tum vero erit angulus EFG rectus et EFH rectus contra §. 26. Cor.

§. 236.

Si recta linea AB perpendicularis sit ad tres lineas BC , BD , BE , in eodem puncto E se interfecantes, illae sunt in eodem plano.

P. 126. DEM. Per rectas BE et BA positum sit planum AG , et per rectas BD , BC planum FH , erit linea BE communis intersectio planorum AG , FH , atque ideo ea est in eodem cum rectis BD et BC plano. Si enim BE non est communis sectio, sit alia recta BG communis planorum AG et FH intersectio, et quia linea AB perpendicularis est ad lineas BC , BD , ea perpendicularis erit ad planum FH (§. 235. Cor. I.) et consequenter ad lineam BG . Angulus igitur ABG rectus est, sed et angulus ABE rectus est (*per hyp.*), ergo in eodem plano AG eidem rectae AB ad idem punctum B duae diversae rectae GB et EB essent perpendiculares, quod contra §. 26. Cor.

§. 237.

Linea recta *plano parallela* esse dicitur, quae, utcumque producta, plano versus quamcunque partem quousque continuato occurrere nequit.

§. 238.

Recta linea AB extra planum EF sita, quae alicui rectae CD in plano EF sitae parallela est, et ipsi plano EF est paralle-

parallela et cuilibet rectae GH in eodem plano rectae CD parallela.

DEM. 1. Parallelae AB et CD sunt in eodem plano ACDB, extra quod AB utcumque producat, eadere nequit. Si igitur AB plano EF occurrat, occurrere debet rectae CD, cui parallela est, quod esse nequit.

2. Per AB et punctum quoddam G in recta GH ipsi CD in plano EF parallela ponatur planum ABG, quod secabit planum in recta quadam, quae vel cum GH coincidat, vel non. Posterius esse nequit. Sit enim GI planorum ABG et EF communis interseccio, erit haec GI ipsi CD parallela, quia cum illa est in eodem plano EF nec cum illa concurrere potest, nisi concurrat cum plano ABDC, cum quo parallela est p. n. 1. Ponitur vero GH quoque ipsi CD parallela esse. Proinde per idem punctum G duae rectae diversae GH et GI eidem tertiae CD sunt parallelae contra §. 96. Cor. 1. Est igitur GH communis planorum ABG et EF interseccio, quare rectae AB et GH sunt in eodem plano AGHB sitae. Deinde quoque concurrere nequeunt, nisi AB plano EF occurrat, cui parallela est. Proinde AB et GH sunt rectae parallelae (§. 89.).

COR. Hinc sequitur, duas rectas AB, GH eidem rectae tertiae CD parallelas et inter se parallelas esse, etiam tum, cum tres hae rectae in eodem plano non sunt sitae.

§. 239.

Inclinatio plani GH ad planum GI est angulus planus rectilineus BAE comprehensus a duabus rectis AB et AE, quarum una in plano GH, altera in plano GI communi planorum interseccioni GK est perpendicularis. F. 128.

§. 240.

Si plana GH et GI ad se mutuo inclinata sint, ductis in plano GH rectis AB, CD, parallelis, et in plano GI rectis AE, CF parallelis, et quae prioribus occurrant in pun-

ctis A et C, in communi planorum intersectione sitis; erunt anguli BAE, DCF aequales.

F.128. DEM. Abiscindantur lineae AB, CD, et AE, CF aequales, ducanturque rectae BD, EF, BE, DF, atque cum lineae AB, CD sint aequales et parallelae, erit figura AD parallelogrammum, et proinde BD et AC aequales et parallelae (§.107.). Cum praeterea lineae AE et CF aequales sint et parallelae; etiam figura AF parallelogrammum erit, atque recta EF eidem AC aequalis et parallela (§.cit.). Hinc quoque rectae BD et EF aequales (§.13. Cor.2.) et parallelae (§.238. Cor.) erunt. Proinde quoque figura BF est parallelogrammum et rectae BE et DF sunt aequales; ideo triangula BAE et DCF sunt congruentia (§.75.) atque anguli BAE et DCF aequales.

COR. I. Ex demonstratione sequitur haec propositio generalior: *Si duabus rectis AB, AE, angulum BAE comprehendentibus, parallelae fuerint rectae CD et CF, quae in puncto C concurrunt, angulus BAE angulo DCF aequalis erit.*

COR. II. Si fuerint BA et DC ipsi AC perpendiculares, parallelae erunt. Si praeterea et EA, FC, fuerint ipsi AC perpendiculares, et hae rectae erunt parallelae. Tum vero angulus BAE vel DCF est inclinatio planorum GH et GI ad se invicem. Inclinatio igitur plani ad planum eadem est, ubicunque perpendiculares ad intersectionem ducantur.

COR. III. Communis intersectio GK planorum GH et GI ad planum anguli inclinationis BAE horum planorum GH et GI perpendicularis et (§.235. Cor.1.).

§. 241.

Si angulus inclinationis duorum planorum est angulus rectus, unum planum alteri *rectum*, sive *perpendiculare* esse dicitur. Si angulus inclinationis non est rectus, dicitur *planum planum obliquum esse.*

§. 242.

Si planum CD plano FG est perpendiculare, illudque secatur in recta CI, per eandem rectam CI non potest poni aliud planum CK eidem plano FG perpendiculare, et a plano CD diversum.

DEM. Planum anguli inclinationis ABE planorum CD et FG secabit planum CK in recta quadam BH atque angulus CBH erit rectus (§. 240. Cor. 3. coll. §. 235.). Ergo foret HBE angulus inclinationis planorum CK et FG, qui per hyp. = R = ABE, quod contra §. 26. Cor.

§. 243.

Si linea recta AB plano FG perpendicularis fuerit, omne planum CD per eandem positum eidem plano FG perpendiculare erit.

DEM. Ponatur per AB planum CD, quod inter- F.129. secet planum FG in recta BC. In plano FG ducatur BE intersecti ni planorum BC perpendicularis. Jam recta AB ponitur ad planum FG perpendicularis, ideo rectis BC et BE perpendicularis est (§. 235.). Angulus igitur ABE inclinationis planorum CD et FG rectus est, proinde planum CD plano FG perpendiculare (§. 241.).

COR. I. Duo plano GH et GI se mutuo in GK secantia F.128. ad planum anguli sui inclinationis BAE sunt perpendicularia (§. 240. Cor. 3.).

COR. II. Quodsi plana AB, AC, atque HK et HI F.137. sub eodem ad se invicem inclinata sint angulo, coincidentibus rectis AD et HL et duobus eorum AC et HI, etiam reliqua AB et HK coincident. Si enim EFG et MNO fuerint eorum planorum anguli inclinationis, atque planum HI imponatur plano AC ita ut HL supra AD et punctum N in F cadat; NO cadet supra FG ob $HNO = R = AFG$, atque plana MNO et EFG, quia sunt planis HI et AC perpendicularia, coincident (§. 242.) in unum planum, in quo NM coincidit cum FE, ob $EFG = MNO$ (hyp.). Utrumque igitur planum AD et HK per angulum AFE

positum est, et proinde unum cum altero coincidit (§. 230.).

§. 244.

Si planum CD plano FG est perpendiculare; recta AB in plano CD communi planorum intersectioni BC perpendicularis et ipsi plano FG perpendicularis est.

F. 129.

DEM. Ducta enim in plano FG recta BE communi intersectioni BC perpendiculari, erit angulus ABE angulus inclinationis planorum FG et CD, proinde rectus. Sed et angulus ABC est rectus (*hyp.*). Ideo recta AB duabus rectis BE et BC ex puncto occurfus B in plano FG eductis perpendicularis est, ac proinde ipsa plano FG est perpendicularis.

COR. I. Si planum CD plano FG est perpendiculare, atque a puncto quodam A plani CD ad planum FG ducatur perpendicularis AG, ea cadet in planum CD. Si enim AG non caderet in planum CD, posset tamen in hoc plano per punctum A duci recta AB ad communem intersectionem perpendicularis, quae proinde plano FG perpendicularis erit, cum tamen jam AG ad hoc planum sit perpendicularis, *contra* §. 235. Cor. 3.

COR. II. Pari ex ratione recta BH, quae ex puncto quodam B rectae BC super planum FG erigitur perpendicularis, erit in plano CD ad FG recta, illudque in recta BC secante. Alias enim planum CK anguli CBH simul plano FG foret perpendiculare (§. 248.) quod est *contra* §. 242.

§. 245.

Si recta plano est perpendicularis, quaelibet alia recta huic parallela eidem plano est perpendicularis.

F. 125.

DEM. Si recta AB plano FG est perpendicularis et CD ipsi AB parallela; ponatur per parallelas AB et CD planum AD secans FG in recta BD, hoc erit plano FG perpendiculare, quia transit per AB plano FG perpendicularem (§. 243.). Praeterea AB et CD sunt parallelae, ideoque anguli $B + D = 2R$. Verum $B = R$ (*hyp.*)

(*hyp.*) proinde $D = R$, ergo CD in plano AD ad FG perpendiculari ad communem intersectionem horum planorum perpendicularis est, hincque et ipsi plano FG (§. 244.).

§. 246.

Duae rectae eidem plano perpendiculares sunt parallelae.

DEM. Si rectae AB et CD plano FG sunt perpen- F.125.
diculares, et DC rectae AB non parallela, tamen per punctum D duci poterit alia recta DE rectae AB parallela. Haec autem recta DE plano FG erit perpendicularis, et proinde per idem punctum D transeunt duae rectae diversae eidem plano perpendiculares, quod contra §. 235. Cor. 2.

§. 147.

A puncto A extra planum BC dato ad idem planum ducere rectam perpendicularem.

SOL. In plano BC ducatur recta quaevis DE , at- F.130.
que ad eandem ex puncto A demittatur perpendicularis AF (§. 85.). Ex eodem puncto F ad rectam DE in plano BC erigatur perpendicularis FH (§. 78,) atque ex puncto A ad hanc GA ducatur perpendicularis AI , ea simul plano BC perpendicularis erit.

DEM. Recta DE plano trianguli AFI perpendicularis est, quia rectis FA et FI est perpendicularis (§. 235. Cor. 1.). Praeterea si per punctum I ducatur KL ipsi DE parallela, eadem hæc recta quoque ad planum trianguli AFI erit perpendicularis (§. 245.) et proinde anguli AIL et AIF recti; ex quo patet, rectam AI ad planum BC esse perpendicularem (§. 235. Cor. 1.).

§. 248.

Ex puncto M in plano BC dato excitare rectam plano BC perpendicularem.

SOL. et DEM. A puncto quodam A extra pla- F.130.
num BC pro lubita assumpto ad planum BC demittatur

perpendicularis AI. Tum vero per datum punctum M ducatur recta ipsi AI parallela (§. 89. Cor. 2.) atque hæc plano BC perpendicularis erit (§. 245.).

§. 249.

Duae rectae AB et CD parallelæ ad idem planum GH sub eodem inclinatae sunt angulo.

F. 131.

DE M. Ex puncto quodam A rectae AB ad GH ducatur perpendicularis AE ad planum GH, atque ex puncto quodam C rectae CD ad idem planum perpendicularis CF, erunt AE et CF parallelæ (§. 246.). Proinde ductis BE et DF in triangulis ABE et CDF est angulus $A = C$ (§. 240. Cor.) $E = F$ ideoque $B = D$ (§. 93. Cor. 6.).

§. 250.

Si duo plana AB, CD se mutuo secantia eidem plano tertio EF sunt perpendicularia, communis intersectio GH plano EF perpendicularis est; et vicissim planum EF communi planorum AB, CD, intersectioni perpendiculare utroque planorum AB et CD perpendiculare erit.

F. 132.

DE M. Si enim 1) in plano EF ducatur recta IH perpendicularis ad AH, ea perpendicularis est ad planum AB (§. 244.) et ideo rectae GH (§. 235.). Deinde si ducatur KH rectae HD perpendicularis, ea perpendicularis est plano CD, et proinde quoque rectae GH. Ideo recta GH duabis rectis IH et KH in plano EF perpendicularis ipsi huic plano perpendicularis est (§. 235. Cor. 1.).

Quodsi jam 2) fuerit planum EF communi intersectioni HL planorum AB et CD perpendiculare, erunt LHA et LHD anguli recti (§. 235.) et proinde AHD angulus inclinationis planorum AB et CD ad se invicem (§. 239.) cujus planum perpendiculare est planis AB et CD (§. 243. Cor. 1.).

§. 251.

Plana parallela sunt, quae non concurrere possunt utcumque extendantur.

§. 252.

§. 252.

Plana CD, EF, ad quae eadem linea recta AB est perpendicularis, sunt parallela.

DEM. Si plana CD et FE non sunt parallela, producta concurrere debent. Fiat igitur concursus versus G et recta GH sit planorum communis intersectio. In hac recta sumatur punctum quodcunque I, et in plano DG ducatur AI, atque in plano FG jungatur BI, erit in triangulo plano rectilineo AIB angulus A rectus et angulus B rectus, quod contra §. 79. F. 133.

COR. Proinde eadem recta duobus planis se invicem secantibus simul perpendicularis esse nequit. Alias enim plana essent parallela contra hyp.

§. 253.

Per punctum A extra planum EF datum ponere planum dato EF parallelum.

SOL. et DEM. Ex puncto A ad planum EF demittatur perpendicularis AG (§. 24.), atque per punctum G ducantur duae rectae diversae quaecunque GH et GI. Quodsi jam per punctum A ducatur AC ipsi GI, atque AB ipsi GH parallela (§. 89. Cor. 2.), erit planum anguli BAC plano EF parallelum (§. 252.). F. 130.

§. 254.

Si duo plana parallela secantur per idem planum tertium utcunque, erunt lineae intersectionum parallelae.

DEM. Si duo plana AB et CD parallela secantur a tertio plano EH, lineae intersectionum EG, EH sunt in eodem plano secante; concurrere autem non possunt, quia alias et plana AB et CD parallela concurrerent. Ideo EG et FH sunt rectae parallelae. F. 125.

§. 255.

Si planum HI plano KL fuerit parallelum, atque a puncto quodam A plani KL cadat perpendicularis AB ad planum KL, ea simul plano HI perpendicularis erit.

DEM. Per punctum B in plano KL ducantur duae rectae BD et BF se invicem in B secantes. Produca- F. 134.
tur

tur AB versus A ad eam plani HI plagam, quae illi opponitur, ad quam cadit planum KL, atque a puncto quodam C hujus rectae ad punctum quoddam D rectae BD ducatur recta CD, quae per punctum quoddam E plani HI transibit (§. 232. Cor.). Pari modo a puncto C ad punctum quoddam F rectae BF ducatur CF, quae per planum HI apud G transit. Ducantur FE et FG, quae cum in planis CBD et CBF se invicem in recta CB secantibus existant, se ipsas secabunt in A. Erunt vero AE et BD pariter ac AG et BF parallelae (§. 254.). Proinde angulus CAE = CBD (§. 99.) = R et CAG = CBF = R, et recta CA plano HI perpendicularis (§. 235. Cor.).

F. 135. COR. I. Per idem punctum F non nisi unicum poni potest planum alteri plano LM parallelum. Quod si enim AB foret ipsi LM et praeterea CD planum AB secans in recta FI eidem plano LM parallelum, recta FN ipsi LM perpendicularis simul utroque plano AB et CD perpendicularis foret, contra §. 235. Cor. 4.

COR. II. Planum igitur secans unum planorum parallelorum etiam secat alterum.

§. 256.

Recta secans unum planorum parallelorum etiam secat alterum, atque aequali ad utrumque inclinata est angulo.

F. 136. DEM. Si recta AB secet planum CD, cui parallelum est planum EF; ex puncto quodam A rectae AB, quod cadit ad eam plani CD partem, quae opponitur illi, in qua planum EF situm est, demittatur perpendicularis AG ad planum EF, atque planum anguli BAG secabit planum CD in recta IK, ita ut angulus AIK sit rectus (§. 255.) et in triangulo AKI apud I rectangulo angulus A acutus (§. 80. Cor. 1.). Praeterea quoque planum anguli BAG secat planum EF in recta GH, ita ut angulus AGH rectus sit (§. 80. Cor. 1.). Proinde rectae AB et GH productae concurrunt (§. 96.) et quia GH per-

perpetuo manet in plano EF, recta AB producta concurrat cum plano EF. Fiat concursus in B, eruntque ob KI et BG parallelas, anguli inclinationum AKI et ABG (§. 235.) aequales (§. 99.).

§. 257.

Plana PQ, LM, eidem plano tertio AB parallela etiam inter se sunt parallela.

DEM. Recta FR plano AB perpendicularis producta secabit plana LM et PQ (§. 256.) iisque est perpendicularis (§. 255.). Proinde plana PQ et LM sunt parallela (§. 252.).

§. 258.

Distantia puncti a plano est perpendicularis a puncto ad planum. Distantia plani a plano vel lineae a plano est distantia alicujus illius plani vel lineae puncti a plano.

§. 259.

Planorum parallelorum distantiae a se mutuo omnes aequales sunt.

DEM. Si planum HI plano KL est parallelum, in F. 134. plano HI sumantur duo quaecunque puncta E et A, a quibus ductae sint rectae EM et AB ad planum KL perpendiculares, quae erunt distantiae plani HI a plano KL in punctis E et A (§. 258.) ipsae autem erunt inter se parallelae (§. 246.) proinde sunt in eodem plano. Ponatur ideo per easdem planum EB secans HI et KL in rectis EA et MB erunt hae intersectiones parallelae (§. 254.) et proinde distantiae EM et MB in parallelogrammo rectangulo EB latera sibi opposita, atque aequalia (§. 107.). Eodem modo de omnibus reliquis plani HI punctis demonstratur, eorum distantius a plano KL distantiae EM vel AB aequales esse.

COR. Omnia puncta, quae ab aliquo plano aequaliter distant, sunt in eodem plano; proinde et omnes lineae, quarum puncta ab aliquo plano aequaliter distant. Quodsi enim tria puncta E, A, G, aequali a plano KL di-

distent intervallo; planum HI per puncta E, G, et A positum transit per quodlibet aliud punctum P aequali cum prioribus intervallo a plano KL distans. Nam recta PQ ipsi KL perpendicularis etiam per planum HI transit in puncto quodam M. Atque si hoc a puncto P diversum foret, esset $PQ = EM = RQ$ quod impossibile est.

§. 260.

Si plana AB et CD secantur a tertio plano AK anguli vero inclinationum EFG, HGI, ad easdem partes positi fuerint aequales, et intersectionum lineae AF, CG parallelae; ipsa plana AB et CD parallela erunt.

r. 138. DEM. In plano AK ducatur rectae FI rectae AF perpendicularis, eaque producatu donec intersectionem CG fecet in puncto G, quod tandem fiet (§. 99. Cor. 2.) atque angulus CGI pariter rectus erit (§. 99. Cor. 3.). Per FI ponatur planum ipsi AK perpendiculare, quod secabit planum AB in recta FE et planum CD in recta GH, erit $AFE = R = CGH$ (§. 243. coll. §. 235.) proinde EFG, HGI anguli inclinationum planorum AB et CD ad planum AK (§. 239.) aequales (*hyp.*) atque rectae FE et GH parallelae (§. 89. Cor. 1.). Ex puncto quodam E rectae EF in plano EFGH ducatur recta EH ipsa GH perpendicularis, eaque simul rectae EF erit perpendicularis (§. 99. Cor. 3.). Cum igitur planum EFGH planis AB et CD rectum sit (§. 243. Cor.) erit simul recta EH ad plana AB et CD perpendicularis (§. 244.) quae plana proinde sunt parallela.

§. 261.

Si duo plana parallela AB et CD secantur a tertio plano AK, anguli, sub quibus parallela plana ad tertium AK sunt inclinata, aequales sunt.

r. 138. DEM. Intersectiones AL et CM plani AK cum parallelis AB et CD, sunt rectae parallelae (§. 254.). Ducatur recta FI ipsi AL perpendicularis, eaque simul rectae CM perpendicularis erit. Per FI ponatur planum ipsi

AK perpendiculare, secans plana AB et CD in rectis FE et GH, erunt AF et CG ad hoc planum perpendiculares (§. 244.) et proinde AFE, CGH anguli recti, atque EFG, HFI anguli inclinationum planorum AB et CD ad planum AK. Praeterea sunt FE et GH parallelae (§. 254.) et proinde anguli EFG et HGI aequales (§. 99.).

§. 262.

Si duorum angulorum planorum rectilineorum BAC et EDF, qui non sunt in eodem plano, crura AB et DE, AC et DF sunt parallela; plana BC et EF, in quibus anguli collantur, parallela sunt.

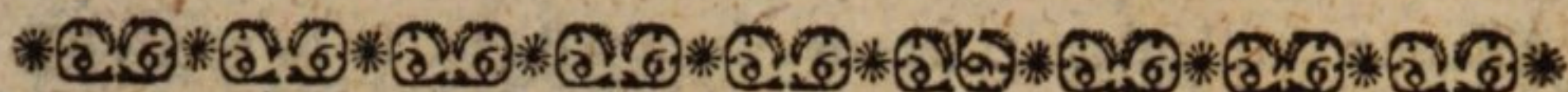
DEM. Ex apice A anguli BAC ducta sit recta AG F.139. plano EF perpendicularis, per punctum vero G ducantur in plano EF recta GI parallela ipsi DF, atque GH parallela ipsi DE, erit quoque GI rectae AC et GH rectae AB parallela (§. 238. Cor. 1.); verum angulus IGA = R (constr.) hinc quia $CAG + ICA = 2R$, erit $CAG = R$. Pari ratione $BAG + HGA = 2R$ (§. 99.) et $HGA = R$ (constr.) erit $BAG = R$. Ergo recta GA perpendicularis est plano BC: eadem vero quoque plano EF est perpendicularis (hyp.); ideo plana BC et EF sunt parallela.

§. 263.

Si duae rectae lineae AB et CD secantur a planis parallelis; partes inter eadem plana interceptae, proportionales sunt.

DEM. Ducantur rectae AC, BD, CB, atque pla- F.140. num trianguli ACB secet planum KL in recta EF, planum trianguli CBD vero idem planum KL secet in recta FG. Erunt EF, AC, atque BD et FG rectae parallelae. Est igitur in triangulo ABC, $AE : EB = CF : FB$, et in triangulo CBD, $CF : FB = CG : GD$, ergo $AE : EB = CG : GD$. Sequitur praeterea ex iisdem principiis, fore $AE : AB = CG : CD$, atque $AB : EB = CD : GD$.

SECT.



SECTIO X.

DE

PLANIS AD SUPERFICIEM SPHAERAE
RELATIS ET SPHAERAE PROPRIETATIBVS,
QVAE INDE PENDENT.

§. 264.

F.141. **S**patium quaquaversum undique terminatum dicitur *Figura solida* sive *Solidum simpliciter*. Solidi magnitudo ejus *Volumen* dici solet. *Sphaera* est solidum unica superficie curva terminatum, in quo assignari potest punctum C ab omnibus punctis superficiei illud terminantis aequaliter distans. Punctum C dicitur *Centrum sphaerae*. *Radius Sphaerae* est recta quaecunque ut CA ex centro ad sphaerae superficiem ducta.

COR. I. Omnes radii ejusdem sphaerae aequales sunt.

COR. II. Omnis sphaera concipi potest generata esse, semicirculo quodam circa diametrum revoluta.

§. 265.

Recta, quae ducitur per punctum intra sphaeram assumptum, si utrinque producat, non nisi in duobus punctis sphaerae superficiei occurrit.

F.141. DEM. Sit DE ejusmodi recta, atque manifestum est, eam occurrere sphaerae superficiei ad minimum in duobus punctis D et E. Ponatur eadem recta huic superficiei occurrere in tertio quodam puncto F, ducanturque ex centro sphaerae C ad puncta occurfus D, E et F rectae CD, CE, CF, quae omnes erunt in eodem plano (§. 230. Cor.) atque $CD = CE = CF$ contra §. 82. Cor.

§. 266.

§. 266.

Diameter sphaerae est recta AB per centrum ipsius C ducta et versus utramque partem producta, donec superficie occurrat.

COR. I. Diameter sphaerae est radii duplum, quare radius sphaerae quoque ejus *semidiameter* dici solet.

COR. II. Omnes diametri ejusdem sphaerae aequales sunt (§. 21. Cor.

§. 267.

Planum *sphaeram secare* dicitur, si eidem ita occurrat, ut pars ipsius intra sphaeram, et reliqua pars extra sphaeram cadat. Planum vero *sphaeram tangere* dicitur, si eidem occurrit quidem, sed ita ut totum cadat extra sphaeram.

§. 268.

Si sphaera secetur plano per centrum C transeunte, figura sectionis AE erit circulus, cujus centrum simul est centrum sphaerae.

DEM. Omnia puncta superficiei sphaericae a centro C aequaliter distant, et proinde quoque omnia puncta perimetri figurae AE, ex quo patet propositum. F. 142.

COR. I. Omnes hujus generis circuli in eadem sphaera, quemcunque habeant situm, aequales sunt, quia eorum radii iidem sunt cum sphaerae radio.

COR. II. Planum hujusmodi circuli totum cadit intra sphaeram et integram sphaeram in duas partes aequales dividit, quae hemisphaeria vocantur. Concipiatur enim pars AKE inverti, et supra planum AE constitui, atque hoc facto superficies partis inferioris AKE coincidet cum superficie partis superioris AIE. Quare duo haec solida sibi congruunt, et proinde aequalia sunt. F. 142.

COR. III. Recta AI conjungens duo superficiei sphaericae puncta A et I tota cadit intra sphaeram. Quod si enim per tria puncta C, A et I ponatur planum, hoc secabit sphaeram ita ut figura sectionis sit circulus AIEK qui totus intra sphaeram cadit, cujusque chorda est re-

I

cta

cta AI tota intra hunc circulum, et proinde quoque tota intra sphaeram cadens.

§. 269.

Si sphaera secetur plano quocunque, figura sectionis erit circulus.

F.142.

DEM. Ex centro sphaerae ad planum sectionis ducatur recta CF perpendicularis, plano sectionis occurrens in puncto F, erit punctum hoc in ea plani secantis parte, quae cadit intra sphaeram. Nam si posset cadere in eam plani secantis partem, quae est extra sphaeram, cadat illud in H, ita ut CH sit ad planum secans perpendicularis. Ducatur recta HBD secans figuram sectionis in punctis B et D. Praeterea ducantur rectae CB et CD, quae sunt aequales (§. 264. Cor.). Dividatur BD in puncto F bifariam et ducatur CF, atque triangula CBF, et CDF omnia latera habent aequalia. Proinde anguli apud F aequales sunt et recti, et quia figura CHBFD est in eodem plano, angulus CHF non est rectus (§. 80. Cor. 4.) nec proinde CH plano secanti perpendicularis. Cadit igitur punctum F, quo perpendicularis illa plano secanti occurrit, intra sphaeram. Ab hoc puncto ad perimetrum figurae sectionis ducantur rectae FG, FD, et a punctis G et D ad centrum sphaerae rectae GC et DC, atque triangula CGF et CDF erunt apud F rectangula, in quibus $CF = CF$, et $CG = CD$, proinde $FG = FD$ (§. 87. Cor.). Simili argumentatione demonstratur, quamcunque aliam rectam ex puncto F ad figurae sectionis perimetrum ductam prius ductis FG et FD aequalem esse. Figura igitur sectionis erit circulus.

COR. I. Perpendicularis ex centro sphaerae ad planum secans sphaeram, sed non transiens per centrum sphaerae, cadit in centrum circuli, qui est communis superficiei sphaericae et plani intersectio.

COR. II. Ubicunque sphaera a plano quodam secetur, circulus, qui prodit, minor est eo, in cuius planum cadit

dit sphaerae centrum. Nam ejus radius ut FG in nostra figura est cathetus in triangulo rectangulo CFG, cujus hypotenusa est CG aequalis radio circuli AB, in cuius planum cadit sphaerae centrum C (§. 268. Cor. 1.). Hinc maximus omnium ejusmodi circulorum, qui sectione sphaerae per planum facta prodeunt, est is, cujus centrum cum sphaerae centro coincidit, qui eam quoque ob causam *circulus sphaerae maximus* vocatur. Reliqui in sphaera circuli in posterum dicentur *circuli sphaerae minores*.

COR. III. Si circulus quidam sphaerae est maximus, ejus planum per sphaerae centrum transit. Si enim non transit per centrum, quicumque alius circulus, cujus planum per centrum sphaerae transit, major est eodem, contra hypothesein.

COR. IV. Si duo diversa plana sphaeram, atque simul se invicem secant, ita ut recta, quae eorum communis intersectio est, transeat per sphaeram; duo in superficie sphaerae oriuntur circuli in duobus nec pluribus punctis se invicem secantes. Si enim in pluribus quam duobus punctis sese interfecarent, tamen haec puncta cadere deberent in rectam, in qua plana horum circulorum sese secant. Haec vero recta est chorda utriusque horum circulorum, et proinde haec chorda peripheriae in pluribus occurreret, quam duobus punctis, quod impossibile est (§. 124. Cor.).

§. 270.

Recta, quae plano circuli sphaerae minoris in centro perpendiculariter insistit, etiam per sphaerae centrum transit.

DE M. Sphaerae ABDE circulus minor sit BGD cujus centrum est F atque recta FL plano hujus circuli in F perpendicularis. Quodsi haec recta non transeat centrum sphaerae, ex centro ad planum circuli BGD ducta perpendicularis CF per centrum F circuli BGD tranfiret (§. 269. Cor. 1.) atque proinde per E ductae forent

duae diversae rectae eidem plano BCD perpendiculares contra §. 235. Cor. 2.

§. 271.

Linea recta, quae ducitur ex centro sphaerae C ad centrum F circuli minoris BGD, plano hujus circuli perpendicularis est.

DEM. Quodsi enim non CF sed alia CM plano hujus circuli perpendicularis esset, foret M circuli BGD centrum (§. 269. Cor. 1.) quod est contra hypothefin.

§. 272.

Si planum sphaeram tangat, idem planum unicum tantum cum sphaerae superficie punctum habet commune.

F.142. DEM. Si sphaera, cujus centrum est C, tangi supponatur a plano quodam etiam in duobus tantum punctis et I; recta AI haec puncta connectens tota cadet intra sphaeram (§. 268. Cor. 3.). Est vero haec recta quoque in eo plano, quod circulum in punctis A et I tangere ponitur. Ergo hoc planum habet puncta quaedam intra sphaeram, quod est contra hypothefin.

§. 273.

Planum radio sphaerae CE in puncto extremo perpendiculare est planum sphaeram tangens.

F.143. DEM. Praeter punctum enim E quodvis aliud hujus plani punctum ut F cadit extra sphaeram. Ductis enim rectis EF et CF oritur triangulum CEF apud E rectangulum (§. 235.) et proinde est $CF > CE$ (§. 81. Cor.).

§. 274.

Si planum sphaeram tangat, radius sphaerae ad punctum contactus plano tangenti est perpendicularis.

F.143. DEM. Quodsi enim non CE sed alia recta CF statuatur plano tangenti perpendicularis esse, ductis rectis FE et FC, foret triangulum FCE apud F rectangulum (§. 235.) et proinde $CE < CF$. Est vero $CE = CG$ proinde $CG < CF$, quod impossibile.

§. 275.

§. 275.

Si ex centro sphaerae ad planum tangens ducatur perpendicularis, ea in punctum contactus cadit.

DEM. Si perpendicularis ex centro C ad planum tangens non in E sed aliud punctum F cadat, etiam recta ex C ad punctum contactus E ducta huic plano erit perpendicularis (§. praec.) quod contra §. 235. Cor. 2. F. 143.

§. 276.

Circuli sphaerae GH et IK, quorum plana a centro aequaliter distant, aequales sunt. Atque plana circulorum aequalium aequali a centro distant intervallo.

DEM. Si distantiae CL et CF, quae per centra circulorum FGH et IKL transeunt (§. 269. Cor. 1.) fuerint aequales, ductis FG, LI, CG et CI, erit $CLq = CLq + LIq$ atque $CGq = CFq + FGq$. Proinde $CLq + LIq = CFq + FGq$ ob $CLq = CGq$ (§. 110. Cor. 1.). Si igitur 1) fit $CF = CL$ habetur $CFq = CLq$ et proinde $LIq = FGq$, ex quo fit $LI = FG$ (§. 110. Cor. 3.) et circuli IKL et FGH aequales sunt (§. 50.). Si 2) fit circuli illi aequales, erit $FGq = LIq$ (§. 223. Cor. 2.) proinde $CLq = CFq$, et $CL = CF$ (§. 110. Cor. 3.). F. 144.

§. 277.

Circulus sphaerae, cujus planum centro sphaerae propinquius est, major est eo, cujus planum majori intervallo distat ab ejusdem sphaerae centro: et vicissim circulus major minori a centro sphaerae distat intervallo, quam circulus minor.

DEM. Si circulorum IK et GH distantiae a sphaerae centro iterum fuerint CL et CF, erit ut ante $CLq + LIq = CFq + FGq$. Quodsi igitur 1) fit $CL < CF$, erit $CLq < CFq$ (§. 110. Cor. 2.) atque $LIq > FGq$ (§. 23.) et proinde circulus IKL major circulo FGH (§. 223. Cor. 2.). Si 2) fuerit circulus IKL major circulo FGH, erit $ILq > FGq$ (§. 223. Cor. 2.) proinde $CLq < CFq$, et $CL < CF$ (§. 110. Cor. 3.). F. 144.

§. 278.

Maximi in sphaera circuli se mutuo bifariam secant.

DEM. Duo quivis maximi sphaerae circuli non possunt non sese secare, quia sphaerae centrum est in utriusque plano. Deinde recta, quae est communis eorum intersectio, cum transeat per commune eorundem circulorum centrum, ea erit utriusque diameter. Ex quo patet propositum (§. 50.).

§. 279.

Circuli in sphaera, qui se mutuo bifariam secant, sunt maximi.

F.145. DEM. In sphaera ABCD circuli BEDF et AECF se mutuo bifariam secant in punctis E et F. Ducatur recta EF, eaque secetur bifariam in G, erit C centrum utriusque circuli. Quia enim FDE et FBE sunt semicirculi, erit FE diameter circuli BEDF (§. 138. Cor. 2.). Idem verum est de circulo AECF. Ipsum hoc punctum G simul erit centrum sphaerae. Quodsi enim aliud punctum ut H foret sphaerae centrum, recta HG utriusque plano AECF et BEDF simul esset perpendicularis (§. 271.) quod contra §. 235. Cor. 4. Ergo circuli AECF et BEDF sunt maximi.

COR. Si duo circuli sphaerae se invicem secant, atque non uterque sit maximus, iidem se invicem mutuo non bissecabunt. Si enim hoc statuatur, uterque circulus esset maximus *contra hyp.*

§. 280.

Polus circuli in sphaera dicitur punctum in sphaerae superficie, quod ad omnibus peripheriae illius circuli punctis aequali distat intervallo.

§. 281.

Quilibet in sphaera circulus duos saltem habet polos, atque hi poli erunt puncta, in quibus recta plano illius circuli in centro perpendicularis sphaerae superficiei occurrat.

DEM.

DEM. Recta ABG transeat per centrum B circu- F.146.
li CE atque ad ipsius planum sit perpendicularis, eaque
simul transibit per centrum sphaerae (§.270.). Ducan-
tur rectae AC, AD, AE, AF etc, dico has rectas omnes
aequales esse. Si enim praeterea ducantur BC, BD, BE,
BF; triangula ABC, ABD, ABE, ABF etc, erunt apud
F rectangula, atque latera angulum rectum comprehen-
dientia habent aequalia. Ex quo patet, rectas AC, AD,
AE, AF etc. omnes aequales esse, et proinde punctum
A erit circuli CDEF polus. Modo huic prorsus simili
demonstratur, etiam punctum G hujus circuli polum
esse.

§. 282.

*Si punctum quoddam in sphaerae superficie assumptum
sit polus alicujus in sphaera circuli; perpendicularis ab eo-
dem ad planum circuli ducta transit per hujus circuli cen-
trum, atque etiam punctum superficiei, in quo haec perpen-
dicularis ad alteram hujus circuli partem eidem occurrit,
erit hujus circuli polus.*

DEM. Si punctum A fuerit polus circuli CE, at- F.146.
que AB plano hujus circuli perpendicularis; a puncto B
ad circuli peripheriam ducantur rectae BC, BD, atque
praeterea a polo A rectae AC, AD, erit $AC = AD$, quia
A supponitur esse polus, et proinde $ACq = ADq$ (§.110.
Cor. 1.). Est vero ob angulos apud B rectos $ACq =$
 $ABq + BCq$ et $ADq = ABq + BDq$ ideo $ABq + BCq =$
 $ABq + BDq$, $BCq = BDq$, et $BC = BD$. Modo pror-
sus simili demonstratur, quamcunque aliam rectam ut
BE a puncto B ad peripheriam CDE ductam rectae BC
aequalem esse. Ex quo patet punctum B esse circuli
CDE centrum. Producta igitur perpendiculari AB ver-
sus alteram circuli CDE partem, donec sphaerae super-
ficiei apud G occurrat, etiam G polum hujus circuli
esse, ex §. praec. patet.

§. 283.

Quicumque sphaerae circulus duos tantum habet polos, nec plures.

P. 146.

DE M. Si enim A fuerit polus circuli CDE, perpendicularis ex A ad planum circuli CDE per ejus centrum B transit, atque punctum G, alterum diametri sphaerae AG extremum, pariter erit polus (§. 282.). Quodsi jam tertium aliquod punctum H fuerit polus; recta HB ex hoc puncto ad planum circuli CDE perpendicularis transiret per centrum B atque ideo duae diversae rectae AB et HB eidem plano CDE ad idem punctum B essent perpendiculares, quod contra §. 235. Cor. 2.

COR. Quodsi igitur ab uno polo A circuli CDE ducatur recta AG ad alterum polum G, haec AG transit per centrum circuli CDE et plano ipsius est perpendicularis. Opposito enim casu per B duci posset recta plano circuli CDE perpendicularis, quae si usque ad superficiem sphaerae producat, ejus puncta extrema forent circuli CDE poli ad prioribus A et G diversi, quod esse nequit.

§. 284.

Circuli in superficie sphaerae paralleli vocantur, quorum plana sibi sunt parallela, atque recta duos circuli in sphaerae superficie descripti polos connectens hujus circuli Axis vocatur.

COR. I. Duo vel plures circuli paralleli eosdem habent polos. Recta enim ex centro sphaerae ad unum eorum perpendicularis etiam alteri est perpendicularis (§. 256. et 255.) atque per utriusque centrum transit (§. 269. Cor. I.). Proinde duo extrema illius rectae quae sunt in sphaerae superficie puncta, utriusque vel plurium parallelorum circulorum poli sunt.

COR. II. Axis ejusmodi circuli per ipsius centrum transit et plano ipsius perpendicularis est (§. 283. Cor.).

COR. III.

COR. III. Circuli paralleli eundem habent axem (§. praec. Cor.).

COR. IV. Quodsi A et G fuerint poli circuli CDE, re-F.146.
ctae, cui ex affectionibus sex sequentibus, quod nimirum 1) transeat per polum G parallelorum IK et CE, 3) transeat per sphaerae centrum 4) transeat per circuli CE centrum, 5) transeat per circuli huic paralleli IK centrum, 6) plano circuli CE vel IK perpendicularis sit, duae competunt, reliquae quatuor simul tribuendae sunt.

COR. V. Circulus ABCD sphaerae, qui transit per F.147.
polos A et C alterius BD, cujus proinde planum transit per hujus axem AC, circulo BD insistit perpendiculariter (§. 243.), est circulus maximus (§. 269. Cor. 2.) atque bifariam secat circulum BED, quia communis intersectio transit per G centrum circuli BED.

COR. VI. Maximus in sphaera circulus ABCD
aliud BD secans ad angulos rectos transit per ejus polos. Ducatur enim ex centro circuli maximi ABCD, quod idem est cum sphaerae centro, recta FG ad aliud BD perpendicularis, quae erit in plano circuli maximi (§. 244. Cor. 1.) et transit per centrum alterius (§. 269. Cor. 1.) et polos ejusdem (§. 281.).

COR. VII. Maximus igitur circulus alteri cuidam circulo perpendiculariter insistens, eundem bifariam secat. Hincque maximus circulus aliud oblique secans eundem in duas partes inaequales secat.

COR. VIII. Si duo circuli maximi sese normaliter secant, quilibet per alterius polos transit, et arcus unius qui inter alterum ejusque polum intercipitur, quadrans est.

COR. IX. Si circulus maximus transit per polos alterius BD; arcus maximi circuli BC, CD et AB, AD sunt aequales, quia eorum chordae aequales sunt (§. 141.).

COR. X. Circulus maximus, qui alium bifariam secat, transit per ejus axem et polos, eique insistit normaliter.

COR. XI. Si duo maximi circuli AHC et AEC sese in AC secant, tertius circulus maximus KHEL ipsi AC perpendicularis transit per polos utriusque priorum AHC et AEC (§. 250.).

COR. XII. Quodsi igitur CH et CE fuerint quadrantes circulorum maximorum AHC et AEC, maximus qui per E et H transit, circulus transit per circulorum AHC et AEC polos. Erit enim hic circulus in plano HFE ad AC perpendiculari. Circuli vero AHC et AEC etiam per polos ipsius KHEL transeunt, qui igitur erunt in A et C (§. 283.).

F. 151. COR. XIII. Si duo maximi circuli AB, CD, se invicem secant in recta EF, angulus GHI, quem axes eorum comprehendunt, aequalis est angulo inclinationis horum circulorum. Posito enim per G plano ipsi EF perpendiculari, quod secat circulos in rectis AB et CD, et transit per polos H et I, erit ob $EGD = R = EGB$ angulus DGB inclinatio circuli AB ad circulum CD. Praeterea erit $HGD = R = IGB$, hincque $HGD - IGD = IGB - IGD$, id est $HGI = DGB$.

§. 285.

Quodsi ABC fuerit circulus in sphaera maximus, in cujus perimetro assumptum sit punctum quodcunque A, per quod transeat recta EF ad planum circuli ABC perpendicularis; quodsi praeterea per hanc rectam ponantur duo plana diversa sphaeram ita secantia, ut prodeant duo circuli AB et AC; recta FE erit utriusque hujus circuli tangens in A.

F. 148. DEM. Planum utriusque circulorum AB et AC plano circuli maximi ABC rectum est (§. 243.) ideo circulus ABC utrumque AC et BD bifariam secat (§. 285. Cor. 6.) recta AB communis intersectio circuli AB et maximi ABC est circuli AB diameter, recta AC vero circuli

culi AC cum plano circuli ABC communis interseccio est circuli AC diameter. Quia igitur EF plano circuli ABC perpendicularis est, et in plano utriusque circuli AB et AC existit, atque praeterea diametro utriusque perpendicularis infistit, ita ut anguli EAB et EAC sint recti; eadem recta utrumque horum circulorum in A tanget (§. 156.).

§. 286.

Circuli sphaerae, de quibus §. praecedente sermo est, concurrunt quidem in superficie sphaerae apud A, sed vero se se invicem non secant. Quilibet horum circulorum ita est comparatus, ut totus cadat ad unam partem plani alterius. Atque ejusmodi *sphaerae circuli se mutuo tangere* dicuntur.

COR. Duorum igitur in sphaera circulorum plana si mutuo secuerint, ita ut communis interseccio eorum planorum utrumque circulum tetigerit, iidem circuli se mutuo tangent.

§. 287.

Si in sphaera duo circuli sibi mutuo occurrunt in eodem puncto circuli maximi per polos eorum transeuntis; iidem se mutuo tangunt.

DE M. Si circuli AB, AC sibi occurrunt in puncto F. 148. A peripheriae circuli maximi per polos utriusque transeuntis; circulus ABC utrumque bifecat, et quidem normaliter (§. 285. Cor. 4.). Proinde rectae AB, AC communes intersecciones circulorum AB, AC cum circulo ABC sunt eorum diametri. Praeterea recta EF communis interseccio planorum AB et AC ad planum ABC est perpendicularis (§. 250.) et proinde anguli EAB et EAC sunt recti (§. 235.). Ex quo patet, rectam CF esse tangentem utriusque circuli AB et AC (§. 156.), et ipsos circulos AB et AC se mutuo tangere (§. 287. Cor.).

COR. I. Per idem punctum A innumerabiles circuli se mutuo tangentes transire possunt, inter quos tamen unus tantum esse potest sphaerae circulus maximus.

COR. II.

F.149. COR. II. Si maximus circulus AD tangat minorem CD in puncto D, atque ABDC pariter fit maximus circulus per polos circuli CD transiens, communis horum maximorum circulorum diameter erit recta AD, cujus unum extremum est punctum contactus D (§.285. Cor. 4.), atque per alterum punctum extremum A iterum innumerabiles circuli maximum AD tangentes transire possunt, inter quos tamen unicus tantum est AB circulo CD parallelus.

COR. III. Hic circulus AB simul parallelo ED est aequalis. Quia enim hi circuli sunt paralleli, communem habent axem FG ipsis perpendiculariter insistentem, quare sunt EF et EG horum circulorum distantiae a sphaerae centro E. Per E positum concipiatur planum ipsis AB et CD parallelum, erit $AE : ED = EF : EG$ et proinde $EF = EG$ ob $AE = ED$. Ex quo patet, esse circulos AB et CD aequales (§.276.).

§. 288.

Si per polos circulorum parallelorum descripti sint circuli maximi, arcus parallelorum inter eos intercepti sunt similes; et arcus maximorum inter parallelos intercepti sunt aequales.

F.150. DEM. Si parallelorum ABCD et EFGH poli sint I et K, per quos transeant duo circuli maximi IAKC et IBKD; erit axis IK parallelorum ad eosdem perpendicularis: proinde BLK et FMI, ALM et EML anguli recti. Ex quo patet, angulum ALB pariter ac angulum EMF esse angulum inclinationis plani IAK ad planum IBK (§.239.) quare hi anguli sunt aequales (§.240. Cor. 2.) et arcus similes (§.215. Cor. 5.). Deinde est arcus $EI = FI$, $AI = BI$ (§.285. Cor. 8.) proinde $EI - AI = FI - BI$, id est $EA = FB$.

COR. I. Si fuerit ABC circulus sphaerae maximus, est arcus AB ad peripheriam circuli sphaerae maximi, ut angulus inclinationis planorum IAK et IBK ad quatuor rectos.

COR. II.

COR. II. Quodsi in plano circuli IAKC ducatur recta IN ipsi IK normalis, pariter ac in plano circuli IBKD recta OI eidem IK normalis, prior IN circulum IAKC et posterior OI circulum IBKD apud I tanget (§. 156.) atque angulus NIO, quem istae tangentes comprehendunt, idem erit cum angulo ALB inclinationis planorum IAK et IBK ad se invicem.

§. 289.

Si duo in sphaera circuli se mutuo secant; maximus circulus per utriusque polos ductus segmenta bifariam secat.

DEM. Si duo circuli ABCD, BEDF se mutuo in sphaera secant, ita ut eorum communis intersectio sit BD, semper possibile est, ut maximus quidam circulus per eorum polos transeat. Per duos enim polos H, A, et centrum sphaerae K poni potest planum, in quod reliqui poli C et I pariter cadent. Sit igitur AECF talis, atque is bifariam secabit segmenta utriusque circuli BAD, BCD, BED, BFD. Circulus enim AECF rectus erit ad utrumque planum AC ad EF. Ergo communis intersectio eorum BD est ad planum circuli AECF recta (§. 250.). Deinde linea recta EF est diameter circuli AEGF et AC diameter circuli ABCD (§. 285. Cor. 4.). Linea recta AC perpendiculariter dividit rectam BD, proinde bifariam dividit utrumque arcum BAD et BCD (§. 139. Cor. 1.). Simili ex ratione EF perpendiculariter dividens rectam BD simul bifariam dividit arcus BED et BFD. F. 152.

§. 290.

Si maximus circulus ABCD transeat per polos parallelorum AFC et MNO, a centro sphaerae E distantium aequali intervallo, ita ut AFC et MNO sint semicirculi; praeterea vero alius circulus maximus HFI utrumque parallelorum oblique secet in LF et QN: erunt arcus AF, NO et FC, MN respectu circuli secantis HFI alterne positi aequales.

DEM.

F.153. DE M. Ducta axe parallelorum DB in triangulis apud G et P rectangulis LGE et EPQ erit $EG = EP$ (*hyp.*) $LEG = QEP$ (§. 31.). Proinde est $GL = PQ$. Deinde triangula GFL, et BQN apud L et Q pariter sunt rectangula (*dem.* §. *praec.*) $GL = OP$ et $GF = PN$ (§. 276.) erit angulus $FGL = NPQ$ (§. 75.) et proinde arcus $FC = MN$ (§. 138.) ex quo simul patet, fore $AF = NO$ (§. 21.).



SECTIO XI.

DE

ANGVLIS SOLIDIS GENERATIM ET
IN SPECIE DE TRIANGVLIS SOLIDIS.

§. 291.

F.154. **A**ngulus solidus est plurium quam duorum angulorum planorum rectilineorum, qui non in eodem consistunt plano, sed ad unum punctum constituti sunt, ad seinvicem inclinatio. Ipsi anguli plani, qui solidum angulum comprehendunt, ipsius *Hedrae* vocabuntur. Anguli vero anguli solidi sunt anguli, sub quibus plana haedrarum ad se invicem sunt inclinata. Ejusmodi angulum solidum possibilem esse, sic perspicitur. Sit BCDEF, figura plana rectilinea quaecunque, atque a puncto A in sublimi assumpto ad omnes apices angulorum B, C, D, E, F, hujus figurae ducantur rectae AB, AC, AD, AE, AF, orienturque circa punctum A anguli BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quorum plana sese secabunt in rectis BA, CA, DA, EA, FA, per commune punctum A transeuntibus, atque planorum omnium circa punctum A constitutorum ad se invicem inclinatio

natio est, quod vocamus angulum solidum. Dividi possunt anguli solidi secundum numerum hedrarum in *triangulos, quadrangulos, quinquangulos* etc. *solidos*, prouti a tribus vel quatuor vel quinque, vel pluribus utcunque hedris comprehenduntur.

§. 292.

Si in triangulo solido quaevis hedra sit angulus duobus angulis rectis minor, duae quaelibet haedrae sunt tertia majores.

DEM. Si tres anguli plani duobus angulis rectis minores BAC, BAD, DAC, comprehendant angulum solidum apud A; atque maximus sit ABC; fiat angulus BAE aequalis angulo BAD, et recta $AE = AD$. Ducatur recta BE eaque producaturs donec concurrat cum recta AC apud C. Praeterea ducantur DC et DB. Erit igitur in triangulis BAD et BAE latus AB commune, $AD = AE$, angulus BAE = BAD. Proinde $BD = BE$. Deinde in triangulo BDC est $BD + DC > BC$, vel $BD + DC > BE + EC$ hincque $DC > EC$. Proinde in triangulis BAC et EAC erit angulus DAC $> EAC$ (§. 78.) ideoque $DAC + DAB > EAC + BAE$, id est $DAC + DAB > CAB$. F.155.

§. 293.

Omnes haedrae angulum solidum quemcunque comprehendentes simul sumtae sunt quatuor angulis rectis minores, si quaevis sigillatim sumta duobus angulis rectis minor sit.

DEM. Quodsi plano quodam ejusmodi tribuatur situs, ut omnes anguli solidi haedras secet, rectae intersectionum terminabunt figuram quandam rectilineam tot laterum, quod sunt haedrae anguli solidi, atque ad apices angulorum hujus figurae orientur tot trianguli solidi, quot sunt hedrae anguli solidi. Jam vero quia duo anguli ABF et ABC majores sunt uno FBC, et duo ACB, ACD majores uno BCD, et sic deniceps, erunt trian-

triangulorum G, H, I, K, L ad basin anguli simul sumti omnibus angulis figurae BCDEF simul sumtis majores. Sed $B + C + D + E + F + 4R =$ omnibus angulis triangulorum G, H, I, K, L ad basin + omnibus haedris circa A positis (§. 93. Cor. 7.). Proinde ab aequalibus inaequalia subtractis remanet $4R >$ omnibus haedris circa A positis.

§. 294.

Triangulum sphaericum ABD est pars superficiei sphaericae, a tribus circulorum ejus sphaerae maximorum arcubus AB, BD, DA terminata, cujus latera sunt arcus illi AB, BD, DA, anguli vero ii, qui apud puncta A, B, C includuntur a rectis, arcus ibidem contingentibus.

COR. I. Si ex apicibus angulorum trianguli sphaerici ABD ad sphaerae centrum C ducantur rectae AC, BC, DC; oritur triangulus solidus ABCD, cujus anguli iidem sunt cum angulis trianguli sphaerici A, B, C, conf. §. 289. Cor. I. haedrae vero anguli sectorum ACB, BCD, DCA, quorum ratio ad se invicem eadem est cum ratione arcuum qui sunt, latera trianguli sphaerici. Quare cum dato arcu trianguli sphaerici simul detur haedra trianguli solidi eidem respondens, et vice versa data haedra trianguli solidi simul detur arcus respondens trianguli sphaerici, quia est $4R : DEF = \text{Periph. circ. maximi} : DF$; si solae hae rationes laterum spectentur inter triangulum sphaericum et triangulum solidum nihil intererit differentiae. Quare omnia de triangulis solidis hoc respectu explicanda simul de triangulis sphaericis erunt intelligenda, est vicissim quae de sphaericis dicentur triangulis simul ad triangulos solidos erunt applicanda.

COR. II. Ideo hæc generalis trianguli solidi et trianguli sphaerici constructio potest concipi: Sector circuli quicunque CBD sumitur pro base, atque ab ejus centro C recta quaedam CA ducitur extra planum sectoris.

Deinde

Deinde centro C et radio aequali radio sectoris CBD in plano ACD describitur arcus AD terminans sectorem ACD, atque eodem modo in plano ACB sector ACB terminatur. Caeterum sector BCD, qui pro base sumitur vel semicirculo major esse potest, vel minor.

§. 295.

Quodsi in triangulo sphaerico latus dimidia circuli peripheria minus fuerint, etiam angulus illi oppositus duobus rectis minor erit; major vero, si latus sit dimidia peripheria majus.

DEM. Circuli ABD circa centrum C descripti diameter sit AB. Ducatur CE extra planum hujus circuli, atque per ECA ponatur semicirculus ejusdem diametri. Tum vero sectore ACD pro base assumto, qui minor est semicirculo ABD, compleatur triangulum sphaericum AED; quo facto patet, angulum AED oppositum lateri AD duobus rectis minorem esse, quia $AED + DEB = 2R$. Quodsi vero sector ABDC semicirculo major sumatur pro base, ut reliquis lateribus manentibus in locum lateris AD succedat ABD, angulus huic lateri oppositus AED exterior erit prioris ad alteram partem positi complementum ad $4R$, et proinde est $AED > 2R$. F. 157.

COR. I. Cuivis triangulo sphaerico, in quo unum latus dimidia peripheria majus est, producto hoc latere, et completo integro circulo, apud verticem opponitur alius, quo dato prius triangulum simul determinatum est. Hanc ob causam triangula sphaerica quorum aliquod latus dimidia peripheria majus est, seponi solent, et proinde eorum, quae considerari solent, triangulorum sphaericorum neque latus ullum dimidiam peripheriam, nec angulus duos rectos excedit.

COR. II. Productis duobus lateribus AE et AD trianguli sphaerici AED usque ad concursum apud B in recta AB, quae est communis planorum horum laterum intersectio, producit triangulum aliud EBD priori contiguum,

guum, cujus angulus B aequalis est angulo A, anguli vero apud E et D sunt supplementa angulorum apud E et D trianguli ADE. Iisdem triangulis latus ED commune est, BD autem est complementum lateris AD et EB complementum lateris EA ad duos rectos.

§. 286.

F.158.

Quodsi sphaera secetur tribus planis, ut in figura, ubi maximi circuli ABCD, FBGD, AFGC se mutuo secant; octo oriuntur trianguli solidi, quorum unus est DEFC, cui vicinus est alius DEFA. Utrique enim communis est hedra DEF. Hedra DEA est hedrae DEC, pariter ac hedra AEF ipsius FEC complementum ad duos angulos rectos; angulus DAF idem est cum angulo DCF, angulus vero DFA est complementum anguli DFC ad duos rectos, pariter ac angulus ADF ipsius FDC. Triangulus solidus AEFB ad triangulum solidum AEFD eandem, quam DEFC ad DEFA habet relationem; id quod generaliter valet de duobus ejusmodi triangulis solidis super idem planum constitutis. Triangulus solidus AEGB *e diametro opponitur* ipsi DEFC, atque in hisce triangulis quaevis hedrae et quivis anguli ad oppositas partes cadentes aequales sunt. Hedra DEF aequalis est hedrae BEG, atque $AEG = FEC$ pariter ac $AEB = DEC$. Angulus $AGB = DFC$, $ABG = CDF$ et $GAB = DCF$. Trianguli igitur solidi AEGB et CEFD aequales habent hedras et angulos, ita quidem, ut aequales anguli aequalibus hedris comprehendantur, et aequales hedrae aequalibus angulis interjaceant. Vocabimus in posterum ejusmodi *triangula solida aequalia*, quia ad aequalitatem superficierum, quas latera ejusmodi trianguli terminant, hic non ad adtendimus.

COR. Quodsi duo isti trianguli solidi e diametro sibi oppositi AEGB et CEFD separatim considerentur atque inter se comparentur; patet, eosdem sibi invicem congruere non posse, licet latera eorum separatim spectata et anguli sibi congruant (§. 243. Cor. 2.). Quicunque ve-

ro triangulus solidus uni eorum e diametro oppositorum congruit, is etiam alteri aequalis erit.

§. 297.

Si in duobus triangulis solidis adest unus angulus aequalis est praeterea duo latera angulum aequalem comprehendentia aequalia, reliquum latus aequale est, et reliqui anguli.

DEM. 1) Si in triangulis HIKL et DEFC est an- F.159.
 gulus $F = \text{ang. HKL}$, latus $DEF = \text{HIK}$, $CEF = \text{LIK}$;
 puncto I puncto E recta IK rectae EF et plano IKL plano CEF imposito, recta IL cadit in EC (§. 17. Cor. 2.),
 planum HIK coincidit cum plano DEF (§. 243. Cor. 2.)
 et recta IH cadit in rectam ED (§. 27. Cor. 2.). Proinde
 et planum anguli HIL coincidit cum plano anguli DEC (§. 230.),
 angulus KHL congruit angulo FDC et angulus HLK angulo DCF (§. 14.). Hinc triangulum
 solidum HIKL integrum aequale est triangulo DEFC.

2) Si in triangulis LIKM et DEFC fuerit angulus
 $F = \text{LKM}$, latus $DEF = \text{IKM}$, et latus $CEF = \text{IKL}$;
 triangulum KILM integrum quidem integro triangulo
 DEFC congruere nequit: congruit vero triangulo
 BEGA priori DEFC e diametro opposito (*Dem. cas. 1. coll. cum §. 296.*).
 Proinde et hoc casu triangula solida,
 quae unum angulum aequalem et praeterea duo latera
 eum angulum aequalem comprehendentia aequalia habent,
 tota aequalia sunt (§. 296. Cor.),

§. 298.

In triangulo solido aequicruro anguli ad basin aequales sunt.

DEM. Si triangulum solidum ABCD sit aequi- F.161.
 crurum, crura ejus aequalia ABC et ABD continuentur
 versus E et F, et fiat $\text{CBE} = \text{DBF}$, et planum anguli
 DBE terminabit triangulum solidum CBDE, pariter
 ac planum anguli CBF triangulum solidum CBDF. In
 his triangulis vero solidis ABED et ABCF est angulus
 $\text{CAF} = \text{DAE}$ (§. 13.) latus $\text{ABC} = \text{ABD}$ (*hyp.*) et latus
 $\text{ABE} = \text{ABF}$ (§. 21.) proinde angulus $\text{ACF} = \text{ADE}$,
ang.

ang. $AED = AFC$, latus $CBF = DBE$ (§. 297.). Ideo in triangulis $CBDE$ et $CBDF$ est ang. $CED = CFD$ (*Dem.*) latus $CBF = DBE$ (*Dem.*) et latus $CBE = DBF$, (*hypo.*), et proinde ang. $DCF = CDE$ (§. 297.). Ex quo porro concluditur, esse $ACF - DCF = ADE - CDE$, id est $ACD = ADC$.

§. 299.

P. 163. Ex praecedentibus patet, quod duobus hedris datis et angulo ab iisdem comprehenso, unicum solum determinatum fit triangulum; hoc autem factum non est, si datus fuerit angulus ab iisdem hedris non comprehensus. Ex hedris MCR , NCM atque angulo R compositum fit triangulum solidum $MCNR$. Per CM ponatur planum DCM , quod plano RMr potest esse perpendiculare. Fiat angulus $DCN = DCG$, atque per CM , CG ponatur planum GCM , erit latus $GCM = NCM$, atque triangulum $GCMR$ pariter ac $NCMR$ ex iisdem datis constructum. Quodsi igitur in duobus triangulis solidis unus angulus fuerit aequalis, et praeterea duae hedrae angulum aequalem non comprehendentes aequales; triangulorum aequalitas non sequitur.

COR. Quia triangulum solidum $MCGN$ est aequicrum; anguli apud G et N erunt aequales. Angulus MNG est ipsius MNR complementum ad duos angulos rectos. Proinde quoque angulus MGR est anguli MNR complementum ad duos angulos rectos.

§. 300.

Si in duobus triangulis solidis est unum latus aequale, et praeterea duo anguli huic lateri adjacentes aequales, reliquae hedrae aequales sunt, et reliqui anguli.

P. 159. **DEM.** 1) Si in triangulis solidis $HIKL$ et $DEFC$ est latus $EFC = IKL$, angulus $DFC = HKL$ et angulus $DCF = HLK$; punctum I ponatur in E , recta IK in EF , et planum IKL in planum EFC , atque recta EC cadet in IL (§. 17. Cor. 2.) planum KIH in planum FED et planum

planum LIH in planum CED (§. 243. Cor. 2.). Cum igitur duo plana se invicem in unica tantum recta secare possint, recta IH cadit in rectam ED. Proinde ang. FDC = KHL, latus FED = KIH, et latus CED = LIH (§. 15.).

2) Si in triangulis LIKM et DECF sit latus FEC = KIL, ang. DFC = LKM, et DCF = KLM; triangula haec congruere quidem non possunt, sed triangulum IKLM congruit triangulo AEGB priori DEFC e diametro opposito; et proinde hoc quoque casu propositio vera est.

§. 301.

Quamvis ex duobus angulis et una hedra hisce angulis interposita non nisi unicum determinetur triangulum (§. praec.); hoc tamen iterum non efficitur, uno quidem latere dato et duobus angulis, sed talibus, quorum unus lateri dato adjacet, alter vero opponitur. In figura enim 163 triangula solida MCNR et MCGr ex ejusmodi datis sunt composita, quae tamen non sunt aequalia. Est enim angulus DGM = DNM, et proinde ang. rGM = RNM. Praeterea est angulus r = R, atque hedra GCM = NCM. Quodsi igitur in duobus triangulis solidis unum habetur latus aequale, et duo anguli aequales, quorum unus hedrae aequali adjacet, alter vero eidem opponitur, aequalitas triangulorum non sequitur.

COR. Hedra rCM est ipsius RCM complementum ad duos angulos rectos. Ista vero hedrae sunt illae, quae inter angulos aequales apud r, G, et R, N, non interjacent. De hisce enim haedris aequalibus angulis interpositis illud non dicendum est.

§. 302.

Si in triangulo solido duo anguli aequales sunt, hedrae hisce angulis oppositi sunt aequales.

DEM. Quodsi in triangulo solido ABCD fuerint anguli CAD et CDA aequales, erit aut latus CBA = CBD,

aut $CBA < CBD$, aut $CBA > CBD$. Quodsi secundum verum foret, produci posset latus CBA usque ad EB , donec fiat $EBA = CBD$. Per E , B et D ponatur planum EBD , atque in triangulis $ABCD$ et $ABED$ foret ang. $A = CDA$ latus $EBA = CBD$ et latus $ABD = ABD$, proinde ang. $EDA = CDA$ (§. 297.) *quod imp.* Tertio casu foret pars ipsius CBA , v. g. $FBA = CBD$. Posito igitur plano per F , B et D , ob $FAD = CDA$ (*hyp.*) $ABD = ABD$ et $FBA = CBD$ foret ang. $FDA = CDA$ (§. 297.) *quod iterum impossibile.* Ergo est $CBA = CBD$.

COR. Triangulum solidum, in quo omnes anguli aequales sunt, est aequilaterum.

§. 303.

In triangulo solido, majus latus opponitur angulo majori.

F.162. DEM. In triangulo solido $ABCD$ sit angulus $CDA > CAD$, atque per rectam BD ponatur DBF ita, ut angulus FDA fiat $= CAD$, eritque $FBA = FBD$, et proinde $FBA + FBC = FBD + FBC$, id est $ABC = FBD + FBC$. Quia jam est $FBD + FBC > CBD$ (§. 292.) erit quoque $ABC > CBD$.

COR. In triangulo igitur solido $ABCD$ major angulus opponitur lateri majori. Si enim fuerit latus $ABC > CBD$; erit aut angulus $CDA < CAD$, aut $CDA = CAD$, aut $CDA > CAD$. Primo casu foret $ABC < CBD$, secundo casu foret $ABC = CBD$ (§. 302.) utrumque *contra hypotesin*, proinde est $CDA > CAD$.

§. 304.

Si in duobus triangulis solidis tria latera sigillatim sumpta aequalia sunt, etiam anguli aequalibus hedris comprehensi sunt aequales.

F.159. DEM. Hedra IKL utrique triangulorum solidorum $HIKL$ et $IKLM$ sit communis, quarum una $HIKL$ supra et altera $IKLM$ infra eam collocata sit. Praeterea sit

fit hedra $HIK = IKM$ et $HIL = LIM$. Planum anguli HIM secet latus IKL in recta IN , atque duo convenient triangula solida aequicrura $KIHM$ atque $LIHM$. Proinde est angulus $KHN = KMN$ et $LHN = LMN$, ideoque $KHN + LHN = KMN + LMN$, id est $KHL = KML$. Ergo et reliqui anguli aequales sunt (§. 297.). Ex quo patet propositum, si latera triangulorum inverso composita sint ordine. Quia vero latera illius trianguli, quod triangulo $HIKL$ e diametro opponitur, eodem composita sint ordine, quo componuntur latera trianguli $IKLM$ atque triangula e diametro sibi opposita aequalia sint, etiam eo casu propositio vera est, quo triangulorum latera eodem ordine sunt composita. Denique si planum HIM caderet extra triangula foret $LHN - KHN = LMN - KMN$ et proinde iterum $KHL = KML$.

§. 305.

Quod si intra terminos trianguli solidi ABCD assumptum fuerit punctum aliquod b, a quo ad planum cujuslibet hedrae demissae sint perpendiculares bE, bF, bG; plana angulorum EbF, FbG, GbE, terminant triangulum solidum abcd, cujus hedrae abc, cbd, dba, sunt complementa angulorum prioris, C, D, A; et cujus anguli a, c, d, sunt complementa hedrarum prioris ABC, CBD, ABD ad duos angulos rectos.

DEM. Plana enim hedrarum terminant aliquod F. 160. solidum IEbFKBHG, atque recta bE ipsis EI et EH, bF ipsis FI et FK, bG ipsis GK et GH est perpendicularis. Proinde est ang. $IEH = a$. $HGK = d$, et $IFK = c$, (§. 239.). Praeterea planum *abc* ipsis ABC et CBD, planum *cbd* planis CBD et DBA, planum *abd* planis ABC et ABD est perpendiculare (§. 243.) ex quo patet, angulos BIE, BIF, BHE, BHG, BKG, BKF esse rectos (§. 250.). Proinde est $EIF = C$, $EHG = A$, et $GKF = D$. In figuris igitur planis quadrilateris, solidum EbFK BGH undique terminantibus, duo quivis anguli oppositi

sunt $= 2R$, quia in quovis quadrilatero summa omnium angulorum est $= 4R$. (§. 93. Cor. 7.) Ex quo patet, esse $abc + C = 2R$, $abd + A = 2R$, $cbd + D = 2R$, $ABC + a = 2R$, $ABD + d = 2R$, et $DBC + c = 2R$.

COR. I. Ex his patet, esse $A = 2R - abd$, $D = 2R - dbc$, $C = 2R - abc$. Proinde est $A + D + C = 6R - abd - dbc - abc$, ideoque summa omnium angulorum trianguli solidi sex angulis rectis minor est.

COR. II. Quia est $abd + dbc + abc < 4R$ (§. 293.), summa omnium angulorum trianguli solidi duobus angulis rectis major est.

§. 306.

Quodsi in triangulis solidis tres anguli sigillatim sumti aequales fuerint; etiam hedrae aequalibus angulis interpositae aequales erunt.

T. 160. DEM. Si in duobus triangulis solidis ABCD et EFGH fuerit $A = E$, $C = G$, $D = H$; suntis punctis b et f intra haec triangula et demissis ad eorum latera perpendicularibus compleantur triangula $abcd$ et $efgh$, uti in §. praecedente: erit $abd = efb$, $abc = efg$, $cbd = gfb$, quia sunt aequalium angulorum (*hyp.*) complementa ad duos rectos (§. 305.). Proinde in triangulis $abcd$ et $efgh$ est $a = e$, $c = g$, $d = b$ (§. 304.); ex quo porro patet, esse $CBA = GFE$, $CBD = GFH$, et $ABD = EFH$, quia haec latera sunt aequalium angulorum (*dem.*) complementa ad duos rectos.

§. 307.

Triangulum solidum dicitur *rectangulum*, in quo unus angulus est rectus. Reliqua triangula solida, in quibus nullus angulus est rectus, *obliquangula* dicuntur. In triangulo solido rectangulo hedra angulo recto opposita *hypotenusae* vocatur, reliquae hedrae angulum rectum comprehendentes vocantur *catheti*, atque cathetorum unus plerumque sumitur pro *base* trianguli solidi rectanguli, quo facto alter cathetus *perpendicularum* vocatur. Brevitatis gratia in sequentibus trianguli solidi
rectan-

rectanguli basis denotabitur per B vel b , perpendicularum per P vel p , hypotenusa per H vel h , angulus rectus per R vel r , angulus inter basin et hypotenusam perpendicularo oppositus per M vel m , et angulus basi oppositus ab hypotenusa et perpendicularo comprehensus per N vel n .

§. 308.

Quodsi in triangulo sphaerico rectangulo NRM angulus M recto minor vel aequalis vel major fuerit; etiam latus P eidem oppositum quadrante minus vel quadranti aequale, vel quadrante majus erit.

DEM. Super recta CM, in qua planum hypothe- f.163
nusae secat planum baseos, constituatur planum MCD
ad planum baseos perpendiculare, secans planum P in
recta DC, quae plano B erit perpendicularis, et proinde
DR vel Dr quadrans, ex quo asseriti veritas statim patet.
Erit nimirum NCR vel minus quadrante, vel eidem ae-
quale, vel majus quadrante, prout H vel inter DCM et
MCR cadat, vel cum DCM coincidat, vel inter DCM
et rCM cadat, id est prout vel $M < DMR$, vel $M =$
 DMR , vel $M > DMR$.

COR. I. Quodsi igitur latus P fuerit recto angulo mi-
nus, angulus oppositus M recto minor erit; si fuerit
 $P = R$, erit $M = R$; si vero $P > R$ erit $M > R$.

COR. II. Suinto P pro base fit B perpendicularum, er-
go quoque latus B ejusdem speciei erit cum angulo ip-
si opposito.

§. 309.

*Quodsi in triangulo solido rectangulo NMR utrumque
laterum B et P quadrante minus fuerit, vel majus, hypo-
thenusa quadrante minor erit; sin vero alterum eorum late-
rum B et P minus fuerit quadrante, et alterum majus,
erit hypotenusa quadrante major. Si denique alterutrum
eorundem laterum quadrans fuerit, et hypotenusa qua-
drans erit.*

K §

DEM.

r.165. DEM. In plano baseos RMr , quod a plano RAr normali secatur in Rr , ducatur CM rectae Rr obliqua, atque eidem sit planum DAE perpendiculare, quod secet planum rAR in AC , erit planum RMr ipsi DAE normale (§. 243.), et proinde anguli ACR et ACr recti (§. 250.) et arcus AR , Ar quadrantes. Praeterea sunt GCM et gCM anguli recti (§. 235.), ideo angulus NCM est acutus et nCM obtusus. Proinde in triangulo sphaerico NRM , cujus latera B , P , quadrante minora sunt, hypotenusa MN quadrante GM minor est, pariter ac in triangulo sphaerico NrM , cujus latera Nr et rM vel B et P sunt quadrante majora. In triangulo autem sphaerico nRM , ubi nR sive P majus est quadrante, et MR sive B quadrante minus, hypotenusa Mn quadrante major est, pariter ac in triangulo sphaerico nMr , ubi rM sive B quadrante major, nr vero sive P , quadrante minus est. Denique si P fiat AR , hypotenusa fit quadrans ACM .

COR. I. Quia anguli hypotenusae adjacentes ejusdem speciei sunt cum hedris iisdem oppositis, patet, hypotenusam esse acutam si uterque angulorum hypotenusae adjacentium quadrante major fuerit vel quadrante minor; hypotenusam vero esse obtusam, si unus horum angulorum sit obtusus et alter acutus. Denique hypotenusam esse quadrantem, si unus horum angulorum fuerit rectus.

COR. II. Hinc vicissim sequitur, si hypotenusa trianguli sphaerici rectanguli acuta fuerit, utrumque cathetorum vel majorem esse quadrante vel minorem, hincque utrumque angulorum hypotenusae adjacentem vel obtusum esse vel acutum; si vero hypotenusa fuerit obtusa, cathetorum alterutrum quadrante majorem fore alterum minorem, et angulorum hypotenusae adjacentium unum fore obtusum, et alterum acutum: denique si hypotenusa quadrans fuerit, etiam unum cathetum quadrantem et unum angulum hypotenusae adjacentium rectum fore.

COR. III.

COR. III. Duæ igitur sunt species trianguli sphaerici rectanguli, una, cujus hypotenusa quadrante minor est, altera cujus hypotenusa excedit quadrantem. Tertia quæ hic constitui posset species, cujus hypotenusa quadranti æqualis est, ad utramque priorum referri potest, si angulus rectus habeatur pro maximo omnium acutorum, et pro minimo obtusorum.

COR. IV. Si hypotenusa est minor quadrante, triangulum erit vel NMR , cujus latera B et P quadrante sunt minora, et anguli M , N , acuti, vel NMr , cui prius triangulum NMR est contiguum.

COR. V. Si hypotenusa est maior quadrante, triangulum erit vel nMr vel nMR . Priori nMr ad aduersam plani rAR partem contiguum est triangulum, cujus hypotenusa est supplementum hypotenusæ Mn , et ideo quadrante minor, basis vero supplementum baseos Mr , et ideo pariter quadrante minor. Cum igitur et rn quadrante minus sit, omnia latera trianguli illius erunt minora quadrante, et anguli præter rectum acuti. Eiusdem generis triangulum et alteri nMR contiguum est infra basem MCR , cujus nimirum hypotenusa est complementum hypotenusæ Mn et perpendiculum supplementum perpendiculi Rn .

COR. VI. Proinde omni triangulo sphaerico rectangulo, cujus latera B et P non sunt minora quadrante, nec proinde anguli M et N acuti, contiguum erit triangulum aliud, in quo istae conditiones obtinent.

§. 310.

Quod si in triangulo sphaerico obliquangulo MQm ex quocunque angulo Q ad planum lateris oppositi Min demittatur latus perpendiculare QR ; illud cadet intra angulum Q , si angulorum M et m uterque acutus sit vel obtusus; et extra eundem angulum, si alteruter eorum angulorum fuerit acutus et alter obtusus.

DEM.

Y. 164. DEM. Demisso ex Q ad latus oppositum perpen-
166. diculo QR, duo oriuntur triangula rectangula QMR et QmR, atque in utroque eorum QR est latus P. Quodsi jam illud latus P cadat intra angulum Q, fitque angulus M acutus et m obtusus, foret latus P quadrante minus et simul eodem majus (§. 308.) quod impossibile est. Si vero P cadat extra angulum Q, ac uterque angulorum M et QmM sit acutus, foret QmR obtusus, et P iterum simul quadrante majus et minus, quod est impossibile. Idem sequeretur, si M foret obtusus et QmM pariter obtusus.

COR. Quia igitur triangula sphaerica rectangula QRM et QRm, ex quibus obliquangulum QMm conficitur, addenda sint, si QR intra angulum Q cadat, et unum ab altero subtrahendum, si QR cadat extra angulum Q; e datis angulis M et m colligi poterit, utrum horum in casu quovis locum habeat. In triangulo rectangulo QRM signentur latera ut ante litteris H, B, P, M, N, R; in altero QRm perpendiculum QR illi cum priori commune littera P et angulus rectus littera R, reliqua autem latera et anguli eodem modo positi litteris b, b, m, n. Priori igitur casu, quo M et m acuti sunt, vel obtusi, erit angulus $Q = N + n$ et latus $Mm = B + b$: posteriori autem casu, quo unus angulorum M et m acutus est, et alter obtusus, erit $Q = N - n$ et $Mm = B - b$. Quodsi igitur angulus Q signo ambiguo notetur hoc modo $N \pm n$ et latus Mm ita $B \pm b$, quo casu signum + quove signum - locum habeat, ex conditione angulorum M et m erit concludendum.



SECTIO XII.

DE

FIGVRIS SOLIDIS EARVMQVE SVPERFICIEBVS.

§. 311.

Quodsi fuerit figura plana rectilinea ABCDE quae- F. 167.
cunque plano LM parallela, atque per apicem u-
nius anguli A hujus figurae ducatur recta AF occurrens
plano LM in F; tum vero per apices reliquorum an-
gulorum ducantur rectae BG, CH, DI, EK, prius
ductae AF parallelae, plano LM occurrentes in punctis
G, H, I, K: solidum, quod a figuris planis rectilineis
ABCDE, FGHIK, atque AG, GC, CI, IE, termina-
tur, *Prisma* dicitur. Figura ABCDE et FGHIK vo-
cantur *Bases* Prismatis; reliquae vero ipsius *Hedrae* sive
Laterae.

COR. Rectae AB, FG, in quibus planum parallelarum
AFBG secat plana parallela, sunt rectae parallelae (§.
254.). Ideo hedrae prismatis sunt parallelogramma et
quidem tot numero, quot sunt latera baseos.

COR. II. Bases prismatis sunt figurae similes et aequa-
les. Est enim $AB = FG$, $BC = GH$, et ita porro (§.
107.). Praeterea et anguli ABC, FGH, a parallelis AB,
FG, et BC, GH, comprehensi aequales sunt (§. 240.
Cor.), quod de reliquis angulis BCD, GHI etc, pariter
verum est.

COR. III. Si prisma secetur plano quocunque ba-
sibus parallelo; figura sectoris basibus similis et aequa-
lis erit.

§. 312.

§. 312.

Quodsi recta AF sit plano LM perpendicularis, eadem simul plano ABCDE perpendicularis erit (§.255.) et praeterea reliquae rectae BG, DI etc, basibus prismatis erunt perpendiculares (§.245.) atque hedrae prismatis fiunt parallelogramma rectangula basibus perpendicularia (§.243.). Si AF plano LM obliqua fuerit reliquae omnes basibus obliquae erunt (§.256. et 249.). Prisma, in quo rectae AF, BG etc, et proinde quoque hedrae sunt basibus perpendiculares, *rectum* vocatur. Reliqua prismata *obliqua* dicuntur.

§. 313.

Parallelepipedum est prisma, cujus bases sunt parallelogramma.

COR. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur, quorum duo quaecunque sibi opposita aequalia sunt et parallela (§.110. 240. Cor.1. et §.262.). Caeterum parallelepipeda sunt vel recta vel obliqua (§.312.).

§. 314.

Parallelepipedum rectangulum est parallelepipedum rectum, cujus bases sunt rectangula. Ideo parallelepipedum rectangulum sex parallelogrammis rectangulis terminatur, quorum duo quaecunque sibi opposita parallela sunt, aequalia et similia. Si haec rectangula omnia fuerint quadrata, parallelepipedum rectangulum *Cubus* vocatur.

COR. Cubus sex quadratis aequalibus et parallelis terminatur. Latus horum quadratorum, quibus terminatur Cubus, vocari solet *Latus cubi*.

§. 315.

Altitudo solidi est distantia plani baseos a plano basi parallelo, quod per summum ejus apicem basi oppositum transit.

COR. Prismatis altitudo est perpendicularis ex quocunque unius basis puncto ad planum baseos oppositae, si opus sit, productae.

§. 316.

§. 316.

Prismata recta similium et aequalium basium et aequalium altitudinum; ut et prismata obliqua similium et aequalium basium et aequalium altitudinum, quorum hedrae omnes homologae aequali ad basium plana inclinatae sunt angulo, sunt aequalia.

DEM. Congruunt enim inter se.

COR. I. Cubi aequalium laterum aequales sunt et cubi inaequalium laterum sunt inaequales, ita ut cubus sit minor, cujus latus latere alterius minus est, major vero, cujus latus alterius latus excedit.

COR. II. Aequalium igitur cuborum latera sunt aequalia. Duorum autem cuborum inaequalium majoris latus est majus, et minoris minus.

§. 317.

Quodsi parallelepipedum AB secetur plano EF hedris oppositis AG et BC parallelo; erit solidum resectum AE ad totum AB, ut AL ad LC.

DEM. Recta AF rectae AC vel est commensurabilis vel incommensurabilis. Si prius fit, atque AM fuerit communis mensura: ipsa AM supra AC transportata usque ad C, unum punctorum divisionis coincidet cum puncto F. Per omnia divisionis puncta ponantur plana ipsi EF parallela, quae omnia et inter se et planis AG, BC erunt parallela, atque hedrae parallelepipedi AB eodem ad haec plana parallela inclinata erunt angulo (§. 262.), quare integrum parallelepipedum AB sectum est in tot parallelepipeda aequalia AN, MP etc, quot partes habet AC ipsi AM aequales, atque solidum AE earum partium tot continebit, quod partium ipsius AC continet AF. Proinde est $AE : AB = AF : AC$ (§. 178. Cor. 2.). Quia vero $AF : AC = AL : AD$, erit $AL : AD = AE : AB$ (§. 170.). Quodsi rectae AF et AC fuerint incommensurabiles, nullum quidem divisionis punctum cadet in F, in quotcunque partes aequales recta AC fuerit divisa. Si vero numerus

par-

partium in AC dicatur m , ut sit $AC = mAM$, is vero numerus partium ipsi AM aequalium, quem AF actu continet, fuerit n , ita ut sit $AF > nAM$ et $AF < (n+1)AM$; patet simul fore $AB = mAN$, $AE > nAN$ et $AE < (n+1)AN$, quoscunque numeros m et n denotent. Ex quo iterum patet, esse $AF : AC = AE : AB$ (§. 182.) et proinde quoque $AL : AD = AE : AB$.

COR. Quia est $AL : AD = AE : AB$, et pari ex ratione $AD : CL = AB : ED$, erit quoque $AL : CL = AC : ED$ (§. 175).

§. 318.

Duo parallelepipeda, quae eidem insistunt basi in eadem altitudine aequalia sunt.

F.170. DEM. Si fuerit FK basis parallelepipedi KD atque simul basis alterius KB; primo possibile est, ut duae hedrae oppositae BG et IK parallelepipedi KB ad basin eodem angulo inclinata sint, quo hedrae alterius ad eandem inclinantur, atque hoc casu hedrae DG et GB, pariter ac RK et KS erunt in eodem plano. Recta FB secat rectam CG in L, atque recta HS secat rectam KT in M, ex quo patet, rectam LM esse planorum FS et KC communem intersectionem, atque ipsi FH parallelam (§. 254.) et proinde quoque rectis BS et CT (§. 238. Cor.). Sunt igitur MLBS, MLCT atque BCTS parallelogramma. Triangula BCL, STM sunt congruentia atque in planis parallelis, proinde solidum BSMLCT prisma est, atque pari ex ratione solidum LMKHFG prisma. Praeterea prismata DRHFBS et CTKGAN sunt aequalia, quia eorum bases RHS atque TKN similes sunt, atque aequales, hedrae vero eorum ad basium plana aequali angulo inclinata (§. 261.). Utrunque igitur ablato prismate BSMLCT et ejus loco prismate LMKHFG addito, sunt parallelepipeda KD et KB aequalia.

F.171. Deinde fieri potest, ut nulla hedrarum unius cum hedra quadam alterius in eodem plano existat, ut in fig. uoi

ubi parallelepipeda KD atque KP eidem basi FK infi-
 stunt. Quia tamen PQVO cum DCTR in eodem exi-
 stit plano, rectae DC, RT, rectas PO, QV, si opus pro-
 ductas, secabunt in B, S, A, N, erunt B et A in plano
 FC, atque S et N in plano HT, proinde BA et SN pa-
 rallelae (§. 254.) et aequales (§. 107.) nimirum $BA = PQ$
 $= OV = SN$. Pari ex ratione $AN = BS = CT = PO$,
 atque parallelogramma ABSN, QPOV, GFHK aequalia
 et similia. Ductis igitur rectis AG, BE, SH, NK, no-
 vum oritur parallelepipedum KB, cujus bases oppositae
 sunt FGHK et ABSN, in quo hedrae oppositae FBSH
 et GANK cum parallelepipedi KP hedris FPOH et GQ-
 VK in eodem existunt plano, ideoque est $KB = KP$
per cas. 1. Deinde ejusdem parallelepipedi KB hedrae
 oppositae FBAG, HKNS cum parallelepipedi KD hedris
 FC et HT in eodem existunt plano, ideo quoque est KB
 $= KD$. Ex quo patet etiam parallelepipeda KD et KP
 esse aequalia (§. 13. Cor. 2.).

§. 319.

*Parallelepipeda recta aequalium licet dissimilium ba-
 sum et aequalium altitudinum sunt aequalia.*

DEM. Si fuerint duo parallelogramma AB et CD F. 169.
 aequalia licet dissimilia, atque super ipsa tanquam bases
 constituta sint duo parallelepipeda recta in eadem altitu-
 dine. Producantur DE et CE ad partes E, atque ad
 CE productam apud E construatur angulus $FEG = \text{ang.}$
 L. Fiat $EF = LB$, $EG = LA$, et ex hisce datis con-
 struatur parallelogrammum EH, quod aequale et simile
 erit parallelogrammo AB. Producatu HG versus G
 donec cum DE producta concurrat in I atque per F du-
 catur recta ipsi DI parallela occurrens rectae IH in M
 atque ND productae in K; orientur duo adhuc paralle-
 logramma EK et EM. Jam super bases EH, IF, EK
 intelligantur constituta parallelepipeda recta aequalium
 altitudinum cum parallelepipedis rectis super AB et CD

L

con-

constitutis; erit solidum super EH aequale solido super AB (§. 316.). Praeterea aequalia sunt parallelepipeda super EH et IF (§. 318.) et proinde solidum super IF aequale solido super AB. Porro est parallelogrammum $EH = IF$, $EH = CD$, ideo $IF = CD$. Proinde est $IF : EK = CD : EK$, sed $IF : EK = \text{solid. super IF} : \text{solid. super EK}$ (§. 317.) et $CD : EK = \text{solid. super CD} : \text{solid. super EK}$, ex quo patet esse $\text{solid. super IF} : \text{solid. super EK} = \text{solid. super CD} : \text{solid. super EK}$, Est igitur solidum super IF = solido super CD, et ideo etiam solidum super AB = solido super CD.

§. 320.

Quaevis parallelepipeda aequalium licet dimissilium basium et aequalium altitudinum sunt aequalia.

DEM. Si duo parallelepipeda comparanda fuerint recta, propositio patet ex §. praec. Si unum fuerit rectum et alterum obliquum, super eadem base cui obliquum insistit construi potest rectum, quod utrique priorum aequale erit (§. 319. et 318.) quare et haec inter se aequalia erunt. Si denique utrumque obliquum fuerit, super iisdem basibus, quibus obliqua insistent, construi possunt recta ejusdem altitudinis, quorum quodlibet illi aequale erit, quod eidem insistit basi (§. 318.) duo vero haec recta parallelepipeda aequalia erunt (§. 319.) quare et obliqua erunt aequalia (§. 13. Cor. 2.).

COR. Parallelepipeda rectangula aequalium altitudinum et inaequalium basium sunt inaequalia: atque ideo si parallelepipeda rectangula aequalia sint et praeterea eorum altitudines aequales, etiam bases aequales erunt.

§. 321.

Parallelepipeda LM, IK aequalium altitudinum inter se sunt ut bases LM, IO.

F.172. DEM. Plano LN versus H continuato fiat parallelogrammum $NH = IO$ (§. 119.) atque compleatur parallelepipedum MH; erit $LM : MH = LN : NH$ (§. 318. Cor.).

Quia

Quia vero $MH = IK$ (§. 321.) et $NH = IO$ (Constr.) fiet $LM : IK = LN : IO$.

§. 322.

Si series parallelepipedorum quocunque a, b, c, quae aequales habeant altitudines, bases vero α , β , γ , utcunque inaequales comparetur cum alia serie parallelepipedorum GH IK, LM, in qua tot adsunt, quot erant in serie priori, et quae parallelepipeda aequales cum prioribus habent altitudines, bases vero iterum utcunque inaequales; erit prior series $a + b + c$ ad posteriorem $GH + IK + LM$, uti summa basium priorum $\alpha + \beta + \gamma$, ad summam basium posteriorum $GN + IO + LP$.

DEM. Est enim $a : GH = \alpha : GN$, $b : IK = \beta : IO$, $c : LM = \gamma : LN$ (§. 321.). Ideo $a + b + c : GH + IK + LM = \alpha + \beta + \gamma : GN + IO + LP$ (§. 192. Cor.).

§. 323.

Parallelepipeda aequalium basium sunt in ratione altitudinum.

DEM. Si fuerit parallelepipedum P cujus basis est B et altitudo A comparandum cum parallelepipeda p, cujus basis est B et altitudo a. Loco P substituatur parallelepipedum rectangulum AB, cujus basis $AM = B$ et altitudo $MB = A$; ac pariter loco p substituatur parallelepipedum rectangulum EK, cujus basis EN basi M similis et aequalis, atque altitudo $NK = a$, erunt latera CM et IN basium AM et EN aequalia. Quodsi jam hedrae CB et IK ipsorum AB et EK pro basibus sumantur, erit $AB : EK = CB : IK$ (§. 321.). Praeterea est $CB : IK = AB : NK$ (§. 195. Cor.). Proinde $AB : EK = MB : NK$. Quia vero $AB = P$ et $EK = p$ (§. 321.) praeterea $MB = A$ et $NK = a$; fiet $P : p = A : a$ (§. 169.).

§. 324.

Parallelepipeda quaevis sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum.

L 2

DEM.

f.168. DEM. Sit comparandum parallelepipedum AB
172. cujus basis est B et altitudo A cum parallelepipedo IK,
173. cujus basis est b et altitudo a . Cum iis comparetur parallelepipedum tertium EH, cujus basis est $= B$ et altitudo $= a$: erit

$$AB : EH = A : b \text{ (§. 322.)}$$

$$EH : IK = B : b \text{ (§. 322.)}$$

$$\text{Proinde } AB : IK = \left\{ \begin{matrix} A : a \\ B : b \end{matrix} \right\} \text{ (§. 173.)} = \left\{ \begin{matrix} B : b \\ A : a \end{matrix} \right\} \text{ (§. 192.),}$$

COR. Si inter se comparanda fuerint parallelepipeda rectangula AD et EA; ratio basium AC : EG componetur ex rationibus laterum AB : EF et BC : FG. Ideo ratio ipforum parallelepipedorum componitur ex tribus rationibus istis AB : EF, BC : FG, et CD : GH. Cubi igitur sunt inter se in ratione triplicata laterum.

§. 325.

Si fuerit ABC triangulum apud A rectangulum, atque hypotenusam C in E bifariam divisa ex E ad utrumque cathetum demittantur perpendiculares EF, EG; rectangulum EFAG quod oritur, dimidium erit triangula ABC.

f.60. DEM. In triangulis CFE et EGB sunt anguli apud F et G recti. Praeterea CE = EB (*hyp.*) atque angulus ECF = BEG ob EG et CA parallelas (§. 89. Cor. 1. et §. 99.). Proinde EG = CF (§. 94.). Sed EG = FA (§. 107.) ideo AF = FC (§. 13. Cor. 2.). Ducta igitur EA ob angulos apud F rectos AF = FC, EF = EF, triangula AEF et EFC sibi congruunt (§. 59.) atque simili ex ratione quoque triangula BEG et EGA. Proinde EFC + BEG = AEF + EGA = EFAC = $\frac{1}{2}$ ABC.

§. 326.

Si fuerit figura quaedam plana Z minor triangulo ABC, possunt eidem triangulo inscribi tot rectangula aequae alta, ut omnia simul sumpta sint majora figura Z.

DEM.

DEM. Ex apice anguli A reliquis B et C majore F.174.
 ad latus oppositum BC demittatur perpendicularis AK,
 quae cadet intra triangulum (§. 80. Cor. 2.). Haec re-
 cta perpendicularis AK dividatur in aliquot partes aequa-
 les, v. g. in tres, atque per puncta divisionis H, I, du-
 cantur basi BC parallelae DE, FG, latera AB et AC se-
 cantes in punctis D, F, E, G. Ex hisce punctis ad pa-
 rallelas demittantur perpendiculares DL, EN, FM, GY:
 quae terminabunt rectangula inscripta DN, FY, quarum
 differentia a triangulo ABC erit summa triangulorum
 ADH, DFL, FBM, AHE, ENG, GYC. Quodsi
 jam quaevis partium in AK denuo bisecetur, atque ut
 ante compleantur rectangula inscripta, ab hac differentia
 detrahetur dimidium. Novae enim parallelae QR, VX,
 etc, bisecant quoque partes AD, AE, etc. in Q, R, etc,
 Praeterea est $SO = \frac{1}{2}ADH$, $OT = \frac{1}{2}AEH$ etc, (§. 325.)
 ideo a quolibet horum triangulorum et proinde ab inte-
 gra summa detrahitur dimidium. Jam omnia rectan-
 gula inscripta denotentur littera R eorumque differentia a
 triangulo ABC sit D, erit $R + D = ABC$. Denique
 differentia figurae Z a triangulo sit δ , erit quoque $Z + \delta$
 $= ABC$. Quodsi jam fuerit $\delta < D$ subdivisione perpen-
 dicularis AK effici potest, ut fiat $D < \delta$ (§. 161. Cor.).
 Factum sit, atque ob $R + D = Z + \delta$ erit $R > Z$
 (§. 23.).

§. 327.

*Si detur figura plana Z triangulo ABC major, pos-
 sunt triangulo ABC circumscribi tot rectangula aeque alta,
 ut summa omnium sit minor figura Z.*

DEM. Demisso iterum ex angulo trianguli maxi- F.175.
 mo A ad latus oppositum BC perpendiculo AF, eoque
 in aliquot partes aequales diviso, ducantur parallelae GH,
 IK et erectis perpendicularibus GL, HM, etc, comple-
 antur rectangula circumscripta GM, IO, BQ, quarum
 differentia a triangulo ABC erit summa triangulorum
 ALG, GNI etc. Jam denuo bissecta quavis partium

in perpendicularo AF, si ductis parallelis compleantur ut ante rectangula RV, GX etc. quia est $SM = \frac{1}{2}AMH$, $LR = \frac{1}{2}ALG$ etc. a quolibet horum triangulorum, et proinde ab integra summa detrahatur dimidium. Denotato itaque summa rectangulorum littera R et integra horum rectangulorum a triangulo ABC differentia per D ut sit $ABC + D = R$, denotata praeterea differentia figurae Z a triangulo ABC littera δ , ut sit $ABC + \delta = Z$, si fuerit $D > \delta$, bisectione perpendiculari AF et connexis operationibus repetitis effici potest, ut fiat $D < \delta$ (§. 161. Cor.). Factum sit, eritque $ABC + D < ABC + \delta$ (§. id est $R < Z$.

§. 328.

Si prisma triangulare DG cum parallelepipedo ABC eandem habet altitudinem; est parallelepipedum ABC ad prisma DEFG, ut basis parallelepipedi AB ad basin prismatis DEF.

F.176. DEM. Quodsi proportio $ABC : DEG = AB : DEF$ non est vera, alia figura plana triangulo DEF inaequalis erit quarta proportionalis ad ABC, DEG et AB. Sit igitur figura plana Z haec quarta proportionalis sitque primo $Z < DEF$. Inscribantur triangulo DEF tot rectangula aequae alta, ut earum summa sit major figura Z, quod fieri potest per §. 326. Tum vero alteri prismatis DEG basi inscribantur totidem rectangula, atque compleantur parallelepipeda GH, IK, LM, quae erunt prismati DEG inscripta. Deinde basis AB parallelepipedi ABC rectis uni lateri parallelis dividatur in tot parallelogramma α , β , γ , quot sunt rectangula triangulo DEF inscripta, et positis per has rectas planis cum hedris parallelepipedi oppositis parallelis, idem dividetur in totidem parallelepipeda aequalium altitudinum et inter se et cum parallelepipedis prismati DEF inscriptis. Quo facto erit $a + b + c : GH + IK + LM = \alpha + \beta + \gamma : GN + IO + LP$ (§. 322. Cor.), vel $ABC : GH + IK + LM = AB : GN + IO + LP$. Praeterea vero

vero haec proportio sumitur vera esse $ABC : DER = AB : Z$, vel $DER : ABC = Z : AB$, ex qua cum priori collata sequitur $DER : GH + IK + LM = Z : GN + IO + LP$ (§. 175.). Est vero $DER > GH + IK + LM$ (§. 18. Cor. 2.). Ergo esset $Z > GN + IO + LP$ (§. 168. Cor. 2.) *contra hyp.* Ideo quarta proportionalis ad quanta ABC , DER , AB non potest esse minor triangulo DEF .

Quodsi jam secundo fuerit figura $Z > DEF$; cir- F. 177.
 cumscribantur triangulo DEF tot rectangula aequae alta
ut earum summa minor sit figura Z , quot fieri potest per
 §. 327. Tum vero alteri prismatis basi totiem circum-
 scribantur rectangula aequae alta, atque compleantur pa-
 rallelepipeda DH , IK , LM , quae erunt prismati DEG cir-
 cumscripta. Diviso jam AB in totidem parallelogram-
 ma et parallelepipedo ABC in tot parallelepipeda, quot
 sunt prismati circumscripta, erit $a + b + c : DH + IK + LM = \alpha + \beta + \gamma : DN + IO + PL$ (§. 322. Cor.),
 vel $ABC : DH + IK + LM = AB : DN + IO + PL$,
 cum qua si comparetur proportio $DEG : ABC = Z : AB$,
 erit $DEG : DH + IK + LM = Z : DN + IO + PL$.
 Cum igitur sit $DEG < DH + IK + LM$, foret $Z < DN + IO + PL$ *contra hyp.* Ergo quarta proportionalis ad
 quanta ABC , DEG , AB , non potest esse major base
 prismatis DEF . Quare ipsa haec basis esse debet ista
 quarta proportionalis et proportio $ABC : DEG = AB : DEF$ vera.

COR. I. Prisma igitur triangulare aequale erit parallelepipedo, si duo haec solida aequales habent bases et altitudines.

COR. II. Prismata triangularia aequalium basium et altitudinum sunt aequalia (§. 13. Cor. 2.).

COR. III. Prismata triangularia aequalium altitudinum sunt in ratione basium.

§. 329.

Prisma multilaterum quodcunque est ad prisma trilaterum, quod cum multilatero aequalem habet altitudinem, ut basis prioris ad basem posterioris.

DE M. Si prisma AB sit multilaterum quodcunque, in basibus ipsius ducantur diagonales homologae, quibus bases illae dividantur in tot triangula, quot habent latera dentis duobus. Cuilibet diagonali MN in una basi respondebit in opposita basi alia OP ipsi aequalis et parallela, quia est MNPO parallelogrammum (§. 103. Cor.). Quodsi igitur per duas ejusmodi diagonales quascunque ponantur plana; prisma divisum erit in tot prismata triangularia, in quot triangula quaevis basium erat divisa. Jam unum latus CE basis CDE prismatis trilateri CEDG in totidem dividatur partes arbitrariae magnitudinis, in quot triangula divisae sunt bases multilateri, atque ex apice D anguli huic lateri oppositi ad puncta divisionis I, K, L, ducantur rectae DI, DK, DL, quo facto basis CDE in totidem divisa erit triangula, in quot divisa erant bases prismatis AB. Jam in latere FH baseos oppositae lateri CE aequali fiat FQ = CI, QR = IK, RS = KL, etc, ductisque rectis GQ, GR, GS, erunt rectae GQ et DI, GR et DK, GS et DL, aequales et parallelae, quia cum eadem tertia CF sunt aequales et parallelae (§. 238. Cor. et §. 13. Cor. 2.). Ideo plana IG, KG, LG prisma triangulare CGE in totidem dividunt prismata triangularia aequalium altitudinum, in quot prismata triangularia divisum erat prisma AB. Sed ex Cor. 3. §. praec. est

$$AOP : CIG = \alpha : a$$

$$NOT : IKG = \beta : b$$

$$MTB : KLG = \gamma : c$$

$$MVB : LEG = \delta : d$$

Proinde' $AOP + NOT + MTB + MVB : CIG + IKG + KLG + LEG = \alpha + \beta + \gamma + \delta : a + b + c + d$ (§. 192. Cor.) id est $AB : CGE = AMZN : CDE$,

COR. I.

COR. I. Prisma multilaterum aequale est trilatero, quod cum ipso aequalem habet basin et altitudinem.

COR. II. Omnia prismata aequalium basium et altitudinum aequalia sunt. Si enim bases et altitudines prismatum AB et KL aequales sunt; fiat prisma triangulare CEG, ejusdem basis et altitudinis, erit $AB = CEG$ et $KL = CEG$. Proinde $AB = KL$ (§. 131 Cor. 2.).

COR. III. Omnia prismata aequalium basium sunt in ratione altitudinum, et prismata quaevis sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum.

COR. IV. Prismatum bases, si inter se sunt similes, sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Ideo huiusmodi prismatum ratio est composita ex duplicata hac laterum et altitudinum ratione. Ex quo porro sequitur, prismata similium basium, quorum altitudines sunt ut latera basium homologa, esse in ratione eorum laterum triplicata, vel ut cubi eorum laterum (§. 324. Cor.).

§. 330.

Pyramis est figura solida terminata triangulis planis rectilineis, quorum vertices coincidunt et quorum bases sunt in eodem plano, atque praeterea figura plana rectilinea, cujus latera sunt istae triangulorum bases. Haec figura dicitur basis pyramidis et reliqua plana triangularia, quae praeter basin pyramidem terminant, ejus *bedrae* seu *latera* vocantur. Denique *vertex pyramidis* est punctum illud, in quod vertices laterum cadunt.

COR. I. Pyramis quaecunque tot habet latera, quot sunt latera baseos. Nomina autem sortiuntur pyramides a numero laterum. Hinc dantur *pyramides trilaterae*, *quadrilaterae* etc.

COR. II. Pyramidis altitudo est recta ex apice ad planum baseos, si opus sit productae, perpendicularis (§. 316.).

§. 331.

Pyramide quacunque ABE per planum GK basi parallelum secta figura sectionis GK basi similis est.

F.180.

DEM. Est enim latus BC parallelum lateri GH et CD lateri HI (§. 255.) ergo angulus BCD = GHI (§. 241. Cor. 1.). Pari modo demonstratur, angulos apud D et I, E et K, F et L, B et G aequales esse. Praeterea est $BC : GH = AC : AG$ (§. 206. Cor. 3.) et $CD : HI = AC : AH$ (§. cit.) ergo $BC : GH = CD : HI$. Ex iisdem principiis demonstratur, reliqua figurarum BE et GK latera, quae angulos aequales comprehendunt, esse proportionalia. Proinde istae figurae sunt similes.

§. 332.

Pyramides similium et aequalium basium, quarum bedrae omnes homologae aequales sunt, et aequali ad basium plana angulo inclinantur, sunt aequales.

DEM. Congruunt inter se.

§. 333.

Omnis pyramis trilatera ABCD dividi potest in duo prismata aequalia, quae simul sumta maiora sunt dimidio pyramis, et in duas pyramides aequales.

F.181.

DEM. Dividantur singuli termini lineares prismatis bifariam in punctis E, F, G, H, I, K, atque ducantur rectae EG, EF, FG, EI, FH, EK, KI, IH. Quia in triangulo ABD est $AF : FD = AG : GB$, erunt rectae GF et HB parallelae (§. 167.), et pari ex ratione erunt FH et GB parallelae. Quare figura FGBH est parallelogrammum. Eodem modo patet, BGEI, EFHI, DHIK et DF EK esse parallelogramma. Sunt igitur plana angulorum EGF et IBH parallela (§. 262.); proinde solidum EBF I prisma est, atque simili ex ratione quoque EH K F prisma erit. Solida AGFE et EIKC pyramides esse, ultro patet. Jam prisma EBF I aequale erit prismati EH K F. Compleantur parallelepipeda EHD M

EHDM et ENOI, atque cum basis HK fit dupla trianguli BHI (§. 195. Cor.) et praeterea $OI = 2BHI$, erunt $HK = OI$ bases parallelepipedorum EHDM et ENOI aequales. Cum igitur et altitudines eorum aequales sint, ipsa parallelepipeda erunt aequalia (§. 321.) et proinde quoque prismata EBF I et EH K F (§. 321. et §. 21. Cor.) Deinde etiam pyramides AGFE et EIKC sunt aequales. Nam triangulum BHI = congruit triangulo IKC ob ang. IBH = CIK (§. 99.) $IK = HD = BH$ et $IC = BI$ (§. 59.) cum igitur et triangulum BHI congruat ipsi GFE, etiam triangula GFE et IKC sibi congruent, atque similia et aequalia erunt. Praeterea plana AGF et EIK, AGE et EIC, AFE et EKC aequali ad plana GEF et IKC inclinata sunt angulo (§. 261.). Proinde pyramides AGFE et EIKC aequales sunt (§. 332.).

Denique prismata EBF I et EH K F simul sumta sunt maiora dimidio pyramidis. Ducantur rectae GI, GH, et fiet pyramis GIHB = pyramidi AEFG, quia triangula EFG, IBH similia sunt et aequalia, et ob plana HGI et FAE parallela (§. 262.) haec plana aequali ad bases EGF et IBH angulo inclinantur (§. 261.) atque eadem ex ratione etiam AGF, GBH, AGE, GBI, aequali ad bases inclinata sunt angulo. Ipsa vero triangula AGF et GBH, AGE et GBI, AFE et GHI, sunt aequalia (§. 75.) ideoque pyramides GIHB et AEFG aequales (§. 332.). Jam prisma EBF I > GIHB, ergo et EBF I > AEFG. Praeterea alterum prisma EH K F > pyramide FHDK, quae = FIKG, et ideo EH K F > FIKG; proinde EBF I + EH K F > AEFG + FIKG, et summa prismatum dimidio pyramidis ABDC maior.

COR. I. Quod si quaelibet pyramidum AGFE et EIKC eodem modo ut ante dividatur in duo prismata et duas pyramides, haecque operatio continuetur; summa prismatum ita crescet, ut maior fiat dato quolibet solido Z pyramide ABCD minore. Si enim differentia hujus solidi Z a pyramide ABCD sit D, ut sit $Z + D = ABCD$,
atque

atque differentia prismatum a pyramide $ABCD$ sit δ , ut denotatis istis prismatibus littera P sit $P + \delta$; quoties operatio ante memorata repetitur, a differentia δ detrahitur plus quam dimidium; et ideo tandem sit $\delta < D$ (§. 161.) quo igitur casu erit $P > Z$ (§. 23.)

COR. II. Pyramide $abcd$ eodem modo divisa, quo divisa est pyramis $ABCD$, atque hac divisione in una toties, ac in altera repetita; erit summa prismatum in $ABCD$, ad summa prismatum in $abcd$, ut basis BCD ad basin bcd . Est enim $OE : oe = EBHI : ebhi = OI : oi = BHI : bhi$ (§. 187.) $HM : hm = HEKD : hekd = HK : hk$ (§. 187.) $= BHI : bhi$. Ideo $EBHI + HEKD : ebhi + hekd = BHI : bhi$ (§. 186.) $= BCD : bcd$ (§. 187.) quia $BCD = 4BHI$ et $bcd = 4bhi$. Eodem modo patet, summam prismatum in $AGFE$ esse ad summam prismatum in $agfe$ uti GFE ad $gfe = BHI : bhi = BCD : bcd$, et pari ex ratione summa prismatum in $EIKC$ ad summam prismatum in $eikc$ uti $IKC : ikc = BCD : bcd$. Prismata igitur ex secunda divisione orta adhuc se habent ut bases BCD , bcd . Ex paritate rationis idem sequitur, tertia, quarta, vel quacunque divisione consequente instituta. Proinde omnia simul prismata pyramidis $ABCD$ se habent ad omnia prismata in pyramide $abcd$, divisione nimirum in una toties instituta, quoties in altera, ut basis BCD ad basin bcd (§. 186. Cor.).

§. 334.

Pyramides trilaterae $ABCD$, $EFGH$, aequalium altitudinum sunt in ratione basium.

F. 182. D E M. Quarta proportionalis ad quanta $ABCD$, $EFGH$, $ABCD$, nec major est nec minor pyramide $EFGH$. Sit enim primo $ABC : EFG = ABCD : Z$, atque $Z < EFGH$. Dividatur pyramis $EFGH$ in prismata et pyramides, eaque operatio continuetur, donec summa prismatum, quam littera P denotabimus, sit major solido Z (§. 333. Cor. 1.). Totidem quoque fiant prismata in pyramide $ABCD$ per totidem divisiones, quae litte-

littera p denotabuntur. Erunt vero $p : P = ABC : EFG$ (§. 333. Cor. 2.) quae analogia cum priori $ABC : EFG = ABCD : Z$ comparata dat $ABCD : Z = p : P$. Sed $ABCD > p$ (§. 18. Cor. 2.) ideo foret $Z > P$ *contra hyp.* Ideo quarta proportionalis ad quanta ABC , EFG , $ABCD$ non est minor pyramide $EFGH$.

Ponatur jam $Z > EFGH$ et proportio $ABC : EFG = ABCD : Z$ vera esse, sitque Y quarta proportionalis ad quanta Z , $ABCD$, $EFGH$, ut habeatur $Z : ABCD = EFGH : Y$, erit $Y < ABCD$, quia $EFGH < Z$. Praeterea est $EFGH : Y = EFG : ABC$, vel $EFG : ABC = EFGH : Y$, quod impossibile, quia $Y < ABCD$ (*per dem.*). Ergo et quarta proportionalis non est major pyramide $EFGH$.

COR. Pyramides trilaterae aequalium basium et altitudinum sunt aequales.

§. 335.

Pyramis multilatera ABCDEF est ad pyramidem trilateram GHIK aequalis altitudinis, ut basis BCDEF ad basin HIK.

DEM. In basi enim pyramidis multilaterae ducantur diagonales, eandem basin in triangula EFB , EBC , ECD , dividentes. Tum vero plana ABE , ACE ipsam pyramidem dividunt in tot pyramides trilateras, in quot triangula divisa est basis $BCDEF$. Jam unum latus IK trianguli HIK dividatur in totidem partes arbitrariae magnitudinis, in quot triangula divisa est basis $BCDEF$. Tumque ex apice anguli huic lateri oppositi ad puncta divisionis L , M , ducantur rectae HL , HM , atque ex vertice pyramidis rectae GL , GM , plana GHL et GHM etiam hanc pyramidem in tot pyramides trilateras dividunt, in quot divisa fuit $ABCDEF$. Quia vero est

F.183.

$$AFBE : GHIL = a : \alpha$$

$$ABCE : GHLM = b : \beta$$

$$ACDE : GHKM = c : \gamma, (\S. 334.),$$

exinde

exinde ducitur $AFBE = ABCE + ACDE : GH LI + GH LM + GH KM = a + b + c : \alpha + \beta + \gamma$ (§. 192. Cor.), id est $ABCDEF : GH IK = BCDEF : HIK$.

COR. I. Pyramis multilatera aequalis est pyramidi trilaterae, quae aequalem cum ipsa habet basin et altitudinem.

COR. II. Omnes pyramides aequalium basium et altitudinum sunt aequales.

§. 336.

Prisma cujus basis aequalis est basi pyramidis et altitudo altitudini, hujus pyramidis triplum est.

F. 184. DEM. Sit prisma quodcunque P comparandum cum pyramide Q, horumque solidorum basis sit = B et altitudo = A. Fiat prisma triangulare rectum ABE, cujus basis ACE = DBF = B, et altitudo = AD = CB = EF = A; eritque hoc prisma aequale prismati P assumpto. In latere DE prismatis ABE ducatur recta diagonalis AF et in latere BE diagonalis FC, quo facto determinabitur triangulum AFC, cujus planum a toto prismate refecat pyramidem trilateram ACEF cujus basis ACE = B et altitudo EF = A; quare est ACEF = Q (§ praec.). Est vero integrum prisina ABF hujus pyramidis ACEF triplum. Ducatur enim diagonalis DC lateris AB, oriturque triangulum DFC, cujus planum differentiam prismatis ABF a pyramide ACEF fecat in duas pyramides BCDF et ACDF aequales, quia earum bases BCD et ACD aequales sunt (§. 107. Cor.) ut et eorum altitudines, cum apices in F coincidunt. Deinde in pyramide BDFC triangulum BDF sumatur pro base, erit BC ejus altitudo, et proinde ejus basis et altitudo aequalis est basi et altitudini pyramidis ACEF, ideoque ACDF = BCDF = ACEF, et prisma ABE = 3ACEF. Ergo generaliter prisma P = 3Q.

COR. I.

COR. I. Omne igitur prisma, cuius basis $= B$ et altitudo $= A$, aequale est pyramidi, cuius basis $= B$ et altitudo $= 3A$.

COR. II. Pyramides inter se sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum (§. 187.). Si igitur altitudinis sunt aequales, pyramides sunt ut bases: atque si bases sint aequales; pyramides inter se sunt ut altitudines.

§. 337.

Aequalium prismatum bases sunt reciproce ut altitudines: et prismata, quorum bases et altitudines sunt in proportionem reciproca, aequalia sunt.

DEM. Si primo proponantur parallelepipeda rectangula aequalia, quorum altitudines sunt aequales, eorum bases quoque aequales erunt (§. 320. Cor.) et propositio evidens est. Si altitudines fuerint inaequales, in maiori EG fiat $EI = AC$ et per I ponatur planum IK parallelum basi EH , quo facto erit $AD : EH = Ppp. AB : Ppp. EK$ (§. 322.) et $Ppp. EF : Ppp. EK = GE : IE$ vel AC (§. 323.). Quare

1) Si ponatur $Ppp. AB = Ppp. EF$, erit $AD : EH = GE : AC$.

2) Si vero fuerit $AD : EH = GE : AC$, fiet $Ppp. AB : Ppp. EK = Ppp. EF : Ppp. EK$, et proinde $Ppp. AB = Ppp. EF$ (§. 171. Cor. 2.).

Quodsi jam proposita fuerint duo prismata P et p quaecunque quorum bases sunt B et b , altitudines vero A et a ; fiant duo parallelepipeda rectangula Π et π , quorum altitudines sint ipsis A et a bases vero ipsis B et b respective aequales. Atque patet, si fuerit $\Pi = \pi$ fore $P = p$ (§. 13. Cor. 2.) et proinde $B : b = a : A$ (per dem.). Si vero sit $B : b = a : A$ erit $P = p$ (per dem.) et proinde quoque $\Pi = \pi$ (§. 13. Cor. 2.).

COR. Hinc quoque aequalium pyramidum bases et altitudines sunt in proportionem reciproca: atque si bases pyra-

pyramidum altitudinibus reciproce sunt proportionales, pyramides aequales sunt. Si enim pyramidum P et p bases sunt B et b , atque altitudines A et a ; fiant duo prismata Π et π quorum bases sunt ipsis B et b , atque altitudines ipsis A et a respective aequales. Hoc facto si $P = p$, erit $\Pi = \pi$ (§. 21. Cor.) et proinde $B : b = a : A$; si vero $B : b = a : A$, erit $\Pi = \pi$ hincque $P = p$ (§. 22. Cor. 3.).

§. 338.

Cylindrus est figura solida terminata duobus planis circularibus parallelis et æqualibus, quae ipsius *Bases* dicuntur, et ejusmodi superficie curva, in quam omnis linea recta, per punctum in eadem assumptum ita ducta, ut rectæ centra basium connectenti parallela sit, tota cadit. Haec recta, quæ connectit centra basium, *Axis cylindri* vocatur.

COR. Altitudo cylindri est perpendicularis ex quocunque unius basis puncto ad planum baseos oppositae.

§. 339.

Axis cylindri basibus vel perpendicularis est, vel obliquus. Si prius, *Cylindrus Rectus*; si posterius, *Cylindrus Obliquus* vocatur.

COR. Cylindrus rectus generatus esse concipi potest, rectangulo circa unum latus revoluta.

§. 340.

Si cylindrus secetur plano passibus parallelo, figura sectionis est circulus basibus æqualis.

F.186.

DEM. Planum figurae sectionis FG secabit axem cylindri AB in puncto C . Ab hoc puncto C ad perimetrum figurae sectionis ducatur recta quaecunque CF atque per punctum F , quod est in superficie cylindrica, ducatur recta FD axi AB parallela, quae tota cadet in cylindri superficiem, et quoad opus est producta tandem cum peripheria baseos DE in puncto D concurret. Quia rectae FD est CA sunt parallelae, per easdem poni potest

test planum FA, quod secabit planum baseos DE in re-
 cta DA, et planum figurae sectionis in recta FC, quare
 et rectae DA et FC sunt parallelæ (§.254.). Proinde
 quia figura FA est parallelogrammum, erit $DA = FC$
 (§.107.). A puncto C ad perimetrum figurae sectionis
 ducatur praeter CF quaecunque alia recta CG, quo facto
 si per punctum G, quod est in superficie cylindrica, du-
 catur recta axi AB parallela, eaque producat, donec
 baseos DE perimetro occurrat in E, non tantum recta
 GE tota erit in superficie cylindrica, sed et planum per
 parallelas AC et EG positum secabit figurae FG planum
 in recta AE. Quare iterum figura CE erit parallelo-
 grammum (§.254.) et recta $AE = CG$ (§.107.). Sed
 est $AD = AE$ (§.44. Cor.2.) ideo $CF = CG$ (§.13. Cor.
 2.). Simili argumentatione demonstratur, quancun-
 que aliam rectam ut CK, ex C ad perimetrum figurae
 sectionis ductam rectae CF æqualem esse. Ex quo pa-
 tet, figuram FG esse circulum, cujus radius radio cir-
 culi DE æqualis est, et proinde hi circuli æquales sunt
 (§.50.).

§. 341.

Conus est figura solida terminata unico plano cir-
 culari, quod basis conï dicitur et præterea superficie cur-
 va, in qua est punctum extra basin situm, *Vertex* seu
Apex conï dictum, ejus conditionis, ut omnis linea re-
 cta hoc punctum cum alio quocunque in superficie illa
 assumptum connectens tota in eandem cadat. Recta li-
 nea verticem conï cum centro basis connectens *Axis* co-
 nï adpellatur.

COR. Coni altitudo est recta ex apice ad planum baseos
 si opus sit productae perpendicularis.

§. 342.

Axis conï aut plano baseos est perpendicularis, aut
 non. Si prius, *Conus rectus* dicitur; si posterius, *Co-
 nus Obliquus* est. Quaevis rectarum in superficie conï

recti ex apice ad punctum quoddam in peripheria baseos ducta *Latus* conii recti vocatur.

COR. Conus rectus generatus esse concipi potest triangulo rectangulo circa unum cathetum revoluto.

§. 343.

Si conus secetur plano basi parallelo, figura sectionis erit circulus.

F.187.

DEM. Si conus ABC modo descripto sectus fuerit, atque hac sectione producta figura EF; in hujus perimetro sumatur punctum quodcunque E, deinde ducatur axis conii AD, quae transibit per figuram sectionis in puncto quodam G. Connectantur apex conii A et punctum E recta AE, quae tota cadet in conii superficiem (§. 341.) atque adeo producta tandem concurret cum peripheria baseos in puncto quodam B. Ducatur recta BD et per tria puncta A, B et D ponatur planum, in quod cadent rectae AB, AD et BD (§. 225. Cor.) proinde et recta EG, quae parallela est rectae BD (§. 243.). Est igitur $AD : AG = BD : EG$ (§. 192. Cor. 3.) A puncto G ad perimetrum figurae sectionis ducatur praeter GE alia recta quaecunque FG, quo facto inter apicem A et punctum F ducta AF eaque producta usque ad concursum cum peripheria baseos in C ductaque DC, itidem per puncta A, D et C poni potest planum, tumque porro concludi, esse $AD : AG = DC : GF$, hincque $BD : EG = DC : GF$. Cum autem sit $BD = DC$ (§. 45, Cor. 1.) erit $EG = GF$ (§. 167. Cor. 2.). Simili argumentatione demonstratur, quamcunque aliam rectam, ut GH, ex puncto G ad figurae sectionis perimetrum ductam rectae GE esse aequalem. Proinde figura sectionis est circulus (§. 44.).

§. 344.

Prisma est ad cylindrum aequalis altitudinis, ut basis prismatis ad basin cylindri.

F.188.

DEM. Quarta proportionalis ad quanta ABC, GHI, et DE nec major est, nec minor circulo HK.
Sit

Sit enim Z haec quarta proportionalis, ut habeatur $ABC : GHI = DE : Z$. Ponatur $Z < HK$, atque huic circulo inscribatur polygonum regulare P , quod majus est figura Z (§. 162.). Per apicem enim cujusque anguli illius polygoni ducatur cum axe cylindri parallela, quarum quaelibet in superficiem cylindri tota cadet (§. 341.) atque perimetro oppositae basis occurret in punctis G, L, M , etc. Ductis jam rectis GL, LM , etc, istae erunt rectis HP, PQ , etc, parallelae, proinde figurae HL, PM , etc, parallelogramma, atque figura rectis GL, LM, MI etc, terminata polygonum regulare ipsi P simile et aequale (§. III.). Ex quo patet, solidum hisce polygonis regularibus et plano parallelogrammorum HL, PM , etc, terminatum prisma esse cylindro GHI inscriptum et eodem cylindro minus (§. 18. Cor. 2.). Hoc prisma littera Π denotato erit $ABC : \Pi = DE : P$ (§. 321.) ex qua analogia comparata cum assumpta $GHI : ABC = Z : DE$ sequitur $GHI : \Pi = Z : P$. Est vero $GHI > \Pi$, proinde $Z > P$ contra hyp. Quarta igitur proportionalis ad quanta ABC, GHI , et DE non est minor circulo HK .

Ponatur nunc $Z > HK$, atque circulo HK circumscribatur polygonum P , quod minus est figura Z (§. 163.). Per singula puncta contactus laterum polygoni cum circulo HK ducantur rectae PL, QM , etc, axi cylindri parallelae, quae erunt in superficie cylindrica (§. 338.) et peripheriae circuli oppositi occurrent in punctis L, M , etc. Quia hoc quoque casu figurae ut $PQML$ fiunt parallelogramma, sunt arcus ML, MG , etc, aequales (§. 141.) atque per haec puncta ductis rectis circum GL tangentibus orietur polygonum regulare huic circulo circumscriptum polygono P opposito aequale et parallelum. Proinde ductis rectis NO, RS , oritur prisma aliquod Π huic cylindro circumscriptum. Est vero $ABC : \Pi = DE : P$ quae analogia cum assumpta $GHI : ABC = Z : DE$ comparata dat $GHI : \Pi =$

$Z : P$. Est vero $\Pi > GHI$, proinde $P > Z$ *contra hyp.* Quarta igitur proportionalis ad quanta ABC , GHI , DE , quoque non est major circulo HK , atque proinde ipsa proportio $ABC : GHI = DE : HK$ vera.

COR. I. Cylindrus aequalis est prismati, quod aequalem cum ipso habet basim et altitudinem.

COR. II. Omnes cylindri aequalium basium et altitudinum aequales sunt.

COR. III. Cylindri inter se, ut et prismata cum cylindris comparata sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum. Si igitur altitudines sunt aequales, cylindri sunt ut bases: si vero bases aequales sunt, cylindri sunt et altitudines.

COR. IV. Cylindri, quorum altitudines sunt ut diametri basium, sunt in ratione triplicata eorum diametrorum vel altitudinum.

COR. V. Si Cylindrus et pyramis aequalem habent basim et altitudinem, cylindrus pyramidis triplum est.

COR. VI. Aequalium cylindrorum bases sunt reciproce ut altitudines; et cylindri, quorum bases et altitudines sunt in proportionem reciproca, aequales sunt. Idem obtinet, si prisma cum cylindro comparetur.

§. 345.

Pyramis ABC est ad conum DEF aequalis altitudinis, ut basis pyramidis BC ad basim coni EF.

DEM. Si proportio $ABC : DEF = BC : EF$ vera non sit, alia quantitas Z , quae circulo EF major est vel minor, ad quanta ABC , DEF , et BC erit quarta proportionalis. Sit igitur $ABC : DEF = BC : Z$ atque $Z < EF$. Circulo EF inscribatur polygonum P , quod majus est figura Z (§. 163.). Quodsi jam ex apicibus angulorum hujus polygoni ad verticem coni ducantur rectae, oritur pyramis Π cono DEF inscripta et minor eodem cono. Est vero $ABC : \Pi = BC : P$, et proinde $DEF : \Pi = Z : P$. Ergo $P < Z$ (§. 168. Cor. 2.) *contra hyp.* Si vero ponatur $Z > EF$, circulo EF circumscribatur

batur polygonum regulare P , quod figura Z minus est (§. 163.), ductisque rectis ex vertice conici ad apices angulorum huius polygoni oritur pyramis Π cono circumscripta, quae eodem maior est. Est vero $ABC : \Pi = BC : P$, et ideo $DEF : \Pi = Z : P$. Ergo $P > Z$ (§. 168. Cor. 2.) *contra hyp.* vera igitur est proportio $ABC : DEF = BC : EF$.

COR. I. Pyramis aequalis est cono, qui cum eadem aequalem habet basin et altitudinem.

COR. II. Coni aequalium basium et altitudinum aequales sunt.

COR. III. Coni inter se, ut et pyramides cum conis comparatae sunt in ratione composita ex rationibus basium et altitudinum.

COR. IV. Coni, quorum altitudines sunt ut diametri basium, sunt in ratione triplicata eorum diametrorum vel altitudinum.

COR. V. Si Cylindrus et conus, vel prisma et conus aequalem habent basin et altitudinem, cylindrus vel prisma est triplum conici.

COR. VI. Aequalium conorum bases sunt reciproce ut altitudines; atque si bases et altitudines conorum in reciproca fuerint proportionem, conici aequales erunt. Idem verum est, si conus cum pyramide comparetur.

§. 346.

Tubus cylindricus est differentia $AEFD$, quae relinquitur ablato cylindro concentrico minori $EFHG$ ex maiori $ABCD$ aequae alto. *Rectangulum tubi cylindrici* est rectangulum comprehensum sub recta BE , ea diametri basis parte, quae in tubi soliditatem cadit, et sub reliqua diametri parte EC . F. 190.

COR. Si in parallelogrammo rectangulo AI ducta sit recta GL lateri IL parallela, atque revolvi intelligatur AI circa latus IL immotum, pars BG describit tubum cylindricum $AEFD$.

§. 347.

Rectangulum tubi cylindrici est excessus, quo quadratum semidiametri BI basis cylindri majoris excedit quadratum semidiametri EI basis cylindri minoris ablati.

F. 190. DEM. In plano basis BKC ducta concipiatur recta EK diametro BC perpendicularis et peripheriae in K occurrens, ac erit $EKq = \text{rectang. sub BE et EC}$ (§. 217.) ducatur recta IK, eritque $IKq = EIq + EKq$ (§. 120.) $= EIq + \text{rectang. sub BE et EC}$, atque adeo $\text{rectang. sub BE et EC} = IKq \text{ vel } BIq - EIq$.

§. 348.

Volumen cylindri est ad volumen tubi cylindrici aeque alti, ut quadratum radii basis cylindri ad rectangulum tubi cylindrici.

F. 190. DEM. Sit cylindrus LN ejusdem altitudinis cum tubo AEFD, et erit cylindrus totalis AC ad cylindrum GF, ut basis BC ad basin EF (§. 344. Cor. 3.). Sed $BC : EF = BIq : EIq$ (§. 218. Cor. 2.) ergo et $AC : GF = BIq : EIq$, ex quo concluditur $AC - GF : GF = BIq - EIq : EIq$. Cum igitur $AC - GF = \text{tubo AEFD}$ et $BIq - EIq = \text{rectangulo tubi sub BE et EC}$, erit quoque $AEFD : GF = \text{rectang. sub BE et EC} : EIq$. Denique $GF : LN = EIq : PLq$ (§. 244. Cor. 3. et 223. Cor. 2.) ergo $AEFD : LN = \text{rect. sub EC et BE} : PLq$ (§. 175.).

§. 349.

Hemisphaerio inscribi possunt et circumscribi cylindri aeque alti, quorum differentia minor sit solido dato.

F. 191. DEM. Sit hemisphaerium, cujus maximus semicirculus ABC, sitque datum solidum D. Sit radius BE ad diametrum AC perpendicularis. Dividatur BE bifariam in F, et quaelibet pars iterum bifariam in G et H, et ita deinceps. Per singula divisionum puncta sint ductae lineae parallelae diametro AC, quae circuli peripheriae occurrent in punctis M, T, etc. per quae puncta demittantur perpendiculares MP, TR, etc. fiantque
sic

sic parallelogramma inscripta circulo, productisque lateribus parallelogramma circumscripta, quorum numerus inscriptorum numerum superabit unitate, ut patet ex figura. Intelligatur circulus ABC revolvitur circa rectam BE immotam, atque a singulis rectangulis describentur cylindri aequae alti, tam inscripti, quam circumscripti. Quodsi cylindrus infimus non est minor solido D, subdividatur axis in partes aequales numero duplo majore, atque tandem invenitur cylindrus minor solido D, quia per singulas divisiones ab infimo cylindro aufertur dimidium (§. 161. Cor.). Jam vero excessus, quo cylindri circumscripti superant inscriptos est aequalis cylindro infimo AI. Nam circumscriptus TZ aequalis est cylindro RX; differentia circumscripti ML ab inscripto QV est tubus MT aequali tubo NR: differentia circumscripti KY ab inscripto MS est tubus KN aequalis tubo NO; denique differentia circumscripti CI ab infimo inscripto est tubus IO, quae differentiae simul sumtae constituunt cylindrum AI.

COR. I. Differentia hemisphaerii ab inscriptis minor est differentia circumscriptorum ab inscriptis. Hinc hemisphaerio inscribi possunt tot cylindri aequae alti, ut omnium differentia ab hemisphaerio sit minor dato solido D.

COR. II. Ideo dato solido P hemisphaerio minore inscribi possunt hemisphaerio tot cylindri aequae alti, ut omnes simul sumti solido P majores sint. Sit enim hemisphaerium = S, et ejus differentia a solido P = D, erit $P + D = S$. Inscribebantur hemisphaerio tot cylindri aequae alti, (quos brevibus signo *Cyl.* indicabimus) ut omnium differentia ab hemisphaerio sit minor solido D. Sit ea differentia = Q et erit $Cyl. + Q = S$, praeterea $P + D = S$, hincque $Cyl. + Q = P + D$, atque ob $Q < D$, fiet $Cyl. > P$.

COR. III. Differentia hemisphaerii a circumscriptis cylindris quoque minor est differentia circumscriptorum ab inscriptis. Ideo haemisphaerio circumscribi possunt tot

cylindri aequae alti, ut omnium differentia ab hemisphaerio sit minor dato solido D.

COR. IV. Dato igitur solido P hemisphaerio majore, circumscribi possunt hemisphaerio tot cylindri aequae alti, ut omnes simul sumti solido P minores sint. Sit enim hemisphaerii = S differentia a solido P = D; erit $S + D = P$. Circumscribantur hemisphaerio tot cylindri aequae alti, ut omnium differentia ab hemisphaerio sit minor solido D, quae differentia sit = Q, eritque, $S + Q = \text{Cyl.}$ Cum vero sit $Q < D$, erit $S + Q < S + D$, id est $\text{Cyl.} < P$.

§. 350.

Hemisphaerium duplum est coni, cujus basis est maximus sphaerae circulus et altitudo radius.

r.192. DEM. Sit conus ABC, cujus basis, circulus BC, aequalis circulo maximo sphaerae, et altitudo radius AG; atque cylindrus DBCE ejusdem basis et altitudinis coni BAC triplum est (§. 269.). Si igitur a cylindro DBCE auferatur conus, solidum BDAEC, quod restat, duplum erit coni BAC. Solidum BDAEC autem non minus nec majus est hemisphaerio DFE.

Sit solidum BDAEC minus hemisphaerio, et inscribi poterunt hemisphaerio cylindri aequae alti, qui simul sumti solido BDAEC sunt majores (§. 349. Cor. 2.). Hemisphaerio DFE inscripti sint tales cylindri, et in quot partes divisa fuit AF, in totidem dividatur AG, ducanturque lineae parallelae, tum excitatis perpendicularibus ex M, S, etc. intelligantur ex circumvolutione cono ABC circumscripti cylindri, et solido BDAEC inscripti tubi cylindrici. Patet autem ob $AG = GB$, esse $AL = LM$ (§. 196.) et proinde $ML = AH$, $PM = GH$, $MN = HF$. Praeterea est HK media proportionalis inter GH et HF (§. 205. Cor. 2.), ideo et HK est media proportionalis inter PM et MN. Cylindrus igitur ex OK aequalis est tubo cylindrico PZRN (§. 348.). Eodem modo

modo demonstratur, esse cylindrum IB aequalem tubo cylindrico $Y\gamma T$, et cylindrum OR aequalem tubo cylindrico $VaaX$. Ergo cylindri omnes inscripti hemisphaerio aequales sunt tubis cylindricis inscriptis solido $BDAEC$, ideoque minores sunt ipso solido $BDAEC$. Sed iidem cylindri hemisphaerio inscripti solido $BDAEC$ sunt majores. Absurdum igitur statuitur, assumendo solidum $BDAEC$ minus esse hemisphaerio.

Deinde sit solidum $BDAEC$ hemisphaerio majus, F.139. atque hemisphaerio circumscribi possunt cylindri aequi alti, qui simul sumti sunt minores solido $BDAEC$. Supponantur iisdem circumscripti, praeterea cono ABC totidem cylindri ejusdem altitudinis inscripti, et proinde totidem tubi cylindrici solido $BDAEC$ circumscripti. Ac primo quidem cylindri ex DH et DK sunt aequales. Cylindrus HO aequalis est tubo cylindrico $PRMS$. Nam linea $KM = GN$, $ML = NF$, hinc NH est media proportionalis inter KM et ML , unde $NHq = \text{rectang. sub } KM \text{ et } ML$, atque adeo cylindrus $HO = \text{tubo } PRMS$. Idem demonstrari potest de caeteris circumscriptis hemisphaerio et solido $BDAEC$. Quare si solidum $BDAEC$ sit majus hemisphaerio, dabuntur cylindri circumscripti hemisphaerio simul majores et minores solido $BDAEC$, quod absurdum est.

Cum igitur solidum $BDAEC$ nec minus nec majus sit hemisphaerio, eidem aequale erit, atque adeo hemisphaerium duplo cono BAC aequale.

COR. I. Hinc sphaera est quadrupla cono BAC .

COR. II. Cylindrus, cujus basis aequalis est circulo maximo sphaerae et altitudo diametro, est sphaerae sesquialter. Nam ejus pars dimidia, nempe cylindrus $BDEC$, est triplus cono BAC , ergo totus $BTVC$ est ejusdem sextuplus. Sphaera autem est ejusdem quadrupla, ideo est sphaera ad cylindrum, ut $4BAC : 6BAC = 4 : 6 = 2 : 3$. Ratio hemisphaerii ad cylindrum ejusdem basis et altitudinis eadem est.

COR. III. Hemisphæria igitur sunt inter se, ut cylindri earundem cum ipsis basium et altitudinum (§. 187. Cor. 2.), ideoque in ratione composita ex ratione basium suarum et altitudinum, id est in ratione duplicata radiorum et ratione radiorum, quæ est ratio radiorum vel diametrorum triplicata. In eadem quoque ratione erunt sphaerae integrae.

§. 351.

Superficies cylindri recti AC demtis basibus aequalis est rectangulo IK, cujus altitudo KL altitudini cylindri AB, basis autem IL peripheriae baseos BC aequalis est.

F. 194. DEM. In superficie cylindrica ducta sit AB, quæ erit axi DE parallela (§. 338). Coincidente hac recta AB cum latere IM rectanguli IK, si cylindrus in rectangulum involvi intelligatur, rectangulum ita curvatum cum superficie cylindri congruit.

COR. I. Superficies cylindrorum rectorum, quorum bases sunt æquales, sunt inter se, ut altitudines (§. 195. Cor. 2.).

COR. II. Superficies cylindrorum rectorum æque altorum inter se sunt ut basium diametri vel radii. Rectangula enim cylindrorum æque altorum superficiebus æqualia sunt inter se ut peripheriae basium (§. 195. Cor. 2.) quæ peripheriae sunt inter se, ut diametri vel radii (§. 225.).

§. 352.

Superficies cylindri recti AC aequalis est circulo, cujus radius GF est media proportionalis inter altitudinem cylindri AB et diametrum BC basis ejusdem.

F. 194. DEM. Sit HB dupla ipsius AB, atque superficies cylindri AC aequalis est rectangulo comprehenso sub AB et peripheria circuli BC (§. 351.) seu triangulo, cujus altitudo est HB basis vero circumferentiae BC aequalis (§. 115. et 116.), Sed circulus BC aequalis est triangulo, cujus altitudo est radio BD et basis peripheriae BC æqualis

qualis (§. 165. *Geom.*). Ideo erit superficies cylindri ad circulum BC ut HB ad BE (§. 195. *Cor.*). Cum autem sit $HB : AB = BC : BD$, et $AB : GF = GF : BC$; (*byp.*) exinde deducitur $GB : GF = GF : BD$ (§. 193.). Est igitur GF media proportionalis inter HB et BD et ratio HB : BD duplicata rationis GF : BD. Deinde

est circulus G : circ. BC = $\left\{ \begin{array}{l} GF : BD \\ GF : BD \end{array} \right\}$ (§. 23. *Cor.* 2.) ergo circ. G : circ. BC = HB : BD. Erat autem $HB : BD = \text{superficies cyl. ad circ. BC} = \text{circ. G : circ. BC}$, proinde superficies cyl. = circ. G.

COR. Superficies cylindrorum rectorum ABC et NOP sunt inter se ut rectangula per axem, i. e. ut rectangula AC et NP, quae comprehenduntur sub altitudine cylindri et diametro basis. Sit enim QR inter NO et OP proportionem media pariter ac GF inter AB et BC, erit $GFq = \text{rect. sub AB et BC}$ atque $QRq = \text{rect. sub NO et OP}$ (§. 214.) est vero superf. cyl. ABC : superf. cyl. NOP = circ. G : circ. Q (§. 169. *Cor.* 2.) = $GFq : QRq$ (§. 223. *Geom.*) = rect. sub AB et BC ad rect. sub NO et OP.

§. 353.

Superficies conii recti ABC aequalis est triangulo DEF, cujus basis EF aequalis est peripheriae BC baseos conii, altitudo vero DE aequalis lateri conii AB.

DE M. Sit GHI sector circuli, cujus radius GH F. 195. = DE et arcus HI = EF, erit et GH = AB et HI = peripheriae BC, sector GHI = DEF (§. 222. *Geom.*). Coincidente autem GH cum AB, si conus involvatur in sectorem, congruet sector cum superficie conica. Quare et eadem superficies triangulo DEF aequalis est.

COR. I. Coni recti superficies aequalis est rectangulo comprehenso sub ejus latere et dimidia peripheria basis (§. 116.).

COR. II. Coni recti superficies est ad aream basis, ut latus conii ad radium basis, quia tam trianguli superficiei
conii

aequalis, quam illius, quod circulo aequatur, basis est aequalis peripheriae basis conı, illius vero altitudo latus conı, et hujus altitudo radius basis.

§. 354.

Coni recti ABC superficies aequalis est circulo E, cujus radius EF est media proportionalis inter latus conı AB et radium basis BD.

P. 196. DEM. Est superficies conı ABC ad aream circuli BGC, ut AB ad BD (§. 353. Cor. 2.). Sed est circ. E : circ. BGC = $\left\{ \begin{array}{l} EF : BD \\ EF : BD \end{array} \right\}$ (§. 223. Cor. 2.) = AB : BD, (quia EF est inter AB et BD media proportionalis) proinde circ. E : circ. BGC = superficies conı ad circ. BGC (§. 170. Geom.) et ideo circ. E = superficiei conı (§. 171. Cor. 2.).

COR. I. Superficies conorum rectorum ABC et KLM se habent sicut rectangula comprehensa sub latere eorum et radio basis. Sit enim HI media proportionalis inter KL et LM pariter ac EF media proportionalis inter AB et BD, erit HIq = rect. sub KL et LM, atque EFq = rect. sub AB et BD (§. 214.). Est vero superf. conı ABC ad superf. conı KLM = circ. E : circ. H (§. 169. Cor.) = EFq : HIq (§. 223.), = rect. sub AB et BD ad rect. sub KL et LM.

COR. II. Simili modo demonstratur, superficiem conı recti esse ad superficiem cylindri recti ut rectangulum sub latere conı et radio basis ad rectangulum sub altitudine cylindri et diametro basis.

§. 355.

Si conus ABC secetur plano DE basi parallelo; erit superficies conı truncati BCED ad superficiem cujuscunque conı recti HIK, ut rectangulum comprehensum sub latere DB et sub composita ex duobus radiis BF et DG ad rectangulum sub latere conı HI et radio basis IL comprehensum.

DEM.

DEM. Ducatur BS ad AB perpendicularis, sitque F.197.
 $BM = BF$, et $MS = DG$, atque compleatur rectangu-
 lum BP. Ducatur AM, ac per punctum O recta RO la-
 teri AB parallela, erit $OD = DG$. Nam ($BF = MB$)
 $: DG = AB : AD$, $MB : DO = AB : AD$, ideo $MB : DG$
 $= MB : DO$, et $DG = OD$. Hinc rectangulum $BO =$
 $MP = NO$ (§. 117. Geom.). Jam vero superf. coni ABC
 est ad superf. ADE, ut rectang. sub AB et BF ad rectang.
 sub AD at DG (§. 354. Cor.) $= AM : DR$, ergo $ABC =$
 $ADE : ADE = AM - DR : DR$. Sed quia $NO = MP$,
 ideoque $AM - DR = BP$, et praeterea $ABC - ADE =$
 superf. BCED; erit superf. BCED : ADE $= BP : DR$;
 denique $ADE : HIK = DR : \text{rect. sub HI et IL}$ (§. 354.
 Cor.) proinde $BCED : HIK = BP : \text{rect. sub HI et IL}$
 (§. 175.).

§. 356.

*Superficies coni truncati aequalis est circulo, cujus ra-
 dius est medius proportionalis inter latus ipsius et compositam
 ex duobus radiis basium.*

DEM. Sit conus truncatus ACBD, sintque radii F.198.
 basium AL, MB. Per tria puncta A, B et M posito pla-
 no, quod superficiem coni secabit in rectis AB et DC,
 atque divisus lateribus AB, CD bifariam in punctis E et
 F, linea EF erit $= AL + BM$ (§. 198.). Sit N media
 proportionalis inter AB, EF. Praeterea sit alius conus
 GHK, et linea O media proportionalis inter GH et HI.
 Jam est superf. GHK : superf. ABCD $= \text{rect. sub GH et}$
 $HI : \text{rect. sub AB et EF}$ (§. 355.). Sed rect. sub GH et
 $HI = Oq$ et $\text{rect. sub AB et EF} = Nq$ (§. 214.), ideo
 $GHK : ABCD = Oq : Nq$, praeterea $Oq : Nq$, uti cir-
 culi quorum radii sunt O et N (§. 223. Geom.). Ergo
 $GHK : ABCD = \text{circ. O} : \text{circ. N}$, est vero $GHK =$
 circ. O (§. 354.) ideo quoque $ABCD = \text{circ. N}$ (§. 171.
 Cor. 3.).

COR. I. Conorum truncatorum superficies se habent,
 ut eorum rectangula, nempe comprehensa sub eorum
 latere,

latere, et sub composita ex duobus radiis basium. Sint enim comparandae superficies conorum truncatorum ABCD et PQRS atque L media proportionalis inter PR et compositam $PT + RV$, quae sit $= X$; erit $Lq = \text{rect. sub PR et } X$, atque $Nq = \text{rect. sub AB et EF}$ (§. 214.), proinde superf. ABCD : superf. PQRS = circ. N : circ. radio L descriptum (§. 169. Cor. 2.) $= Nq : Lq$ (§. 223.) $= \text{rect. sub AB et EF ad rect. sub PR et } X$.

COR. II. Coni truncati superficies se habet ad superficiem cylindri recti, ut rectangulum sub parte lateris coni recti, quod cadit in truncati superficiem, et compositam ex duobus radiis basium, ad rectangulum sub altitudine cylindri et diametro basis. Haec propositio demonstratur modo prorsus simili ei, quo praecedens est demonstrata.

§. 357.

Si semicirculo APB aptetur tangens DOC inclinata ad axem AB, eaque bifariam dividatur in puncto contactus O ita, ut sit $CO = OD$; si praeterea eidem semicirculo aptetur alia tangens PF axi AB parallela atque CS secans tangentem PF in E sit diametro AB perpendicularis, DF vero cum hac CS parallela; tum vero immoto axe AB circumvolvatur semicirculus cum suis tangentibus, atque tangens DOC describat superficiem conicam EF vero cylindricam: erunt haec superficies aequales.

F. 199. DEM. Ducantur FD, OI, CL, PG sibi parallelae item CR, EF, AB, atque punctum D vel extra diametrum AB, vel in eadem erit situm.

Primo casu triangula CRD, GOI ad R et I sunt rectangula et similia, quia ang. $GOI + DOI = R$, $GOI + IGO = R$ hinc, $DOI = IGO$. (§. 21.) Sed $DOI = RDC$ (§. 99.) ideoque $RDC = IGO$. Ex his concluditur, esse $(CR = EF) : CD = OI : OG$, vel sumtis earum duplis $= OK : (OT = FN)$ quare rectang. sub EF et FN $= \text{rectang. sub CD et OK}$ (§. 214. Geom.) et superficies
cylind-

cylindri EFNL aequalis superficiei conì truncatì DCSV (§. 356. Cor. 2.).

Secundo attingat tangens CD axem in puncto D, et ducatur CV parallela lineae OGT. In triangulo igitur DCV, cum OG sit parallela basi CV, erit $CD : OD = CV : OG$. Sed $CD = 2OD$, ergo et $CV = 2OG$, hincque $CV = OT = PM = FN$. Praeterea triangula CVH et HCD sunt similia (§. 205. Cor. 1.) hincque $(CV = FN) : CH = CD : (DH = EF)$, adeoque rect. sub FN et EF = rect. sub CH et CD, ergo superf. cyl. EN aequalis superf. conicae CDL (§. 354. Cor. 2.).

COR. Sit polygonum regulare ABCDEFGH circulo F.201. circumscriptum, cujus latera sunt paria numero, et latera tangentià in puncto contactus erunt bifariam divisa; (*Dem.* §. 158. *Geom.*) circumvolutione circa diametrum AE immotum generentur superficies conicae, atque a tangente RK superficies cylindrica; erit superficies cylindrica RKLS aequalis omnibus conicis superficiibus ABH, BCGH, CDFG, DEF. Est enim superf. ABH = IKLM, BCGH = IONM, CDFG = OPQN, DEF PRSQ, hinc summa superficierum cylindricarum summae conicarum aequalis.

§. 358.

Omnium superficierum eisdem terminos habentium minima est superficies plana. Reliquae omnes, si ad eandem superficiei planae partem collocatae, ubique in eandem partes cavae sint, atque se invicem non secant; inaequales sunt, ita quidem, ut eo majores sint, quo magis a plano superficie recedunt.

COR. I. Circumvolutione circa diametrum AE immotum generatae superficies conicae simul sumtae majores sunt superficiei sphaerica, quam ambeunt.

COR. II. Si eidem circulo inscriptum intelligatur simile polygonum regulare, superficies conicae ea circumvolutione generatae minores erunt sphaerica superficie, qua includuntur.

§. 359.

Superficies hemisphaerii aequalis est superficiei cylindri recti eandem basin habentis et cujus altitudo radio hemisphaerii aequalis est: deuntis nimirum basibus.

F.202. DEM. Circumvolutione quadrantis ABI circa diametrum BI sit genitum hemisphaerium, et circumvolutione rectanguli AIBD cylinder rectus, quorum basis eadem erit, nempe circulus, cujus diameter AC, et altitudo BI, erit superficies hemisphaerii non major nec minor superficie cylindri. Ponatur enim, si fieri potest, superficies hemisphaerii major, sitque cylindrica ADEC ad haemisphaericam = $AD : AF$, eritque $AD : AF = \text{superf. cyl. ADEC} : \text{superf. cyl. AFGC}$, et ideo $\text{superf. cyl. ADEC} : \text{hemisphaer} = \text{superf. cyl. ADEC} : \text{superf. cyl. AFGC}$, et proinde $\text{superf. haemisphaerica} = \text{cylindrica AFGC}$. Dividatur quadrans AB bifariam, et iterum bifariam, quantum opus erit, et circumscribatur polygonum regulare tot laterum donec IM minor sit, quam IH, ducaturque per punctum M linea PR ipsi DE parallela, erunt superficies conicae circumscriptae aequales cylindricae APRC, quae $APRC < AFGC$, (§. 353. Cor.) ergo minores cylindrica AFGC, ergo minores hemisphaerica, quod *contra* §. 358. Cor. 1. Non ergo superficies haemisphaerica major est cylindrica ADEC.

F.203. Ponatur deinde si fieri potest hemisphaerica superficies minor cylindrica, fiatque cylindrica ADEC ad haemisphaericam = $AI : IF$. Ducaturque per punct. F recta FN ipsi AD parallela, erit $AI : IF = \text{superf. ADEC} : \text{superf. FNMG}$ (§. 351. Cor. 2.) proinde $\text{cyl. ADEC ad haemisphaericam} = \text{cyl. ADEC} : \text{cyl. FNMG}$, et $\text{superf. hemisphaerica} = \text{cyl. FNMG}$. Radio IF describatur circulus FRG. Semicirculo ABC inscribatur polygonum regulare non attingens semicirculum FRG, eidemque polygono ABC inscribatur circulus HSK, cujus proinde radius IH major erit radio IF, sed minor radio IA.

In-

Intelligentur omnia circumvolvi circa axem BI. Jam superficies conica generatae a polygono ABC aequales sunt cylindricae HPOK (§. 353.) $HPOK > FNMG$ ergo majores quam cylindrica FNMG, cui aequalis est hemisphaerica ABC, quare majores sunt, quam hemisphaerica ABC, *contra* §. 358. Cor. 2.

Est igitur hemisphaerica ABC nec minor nec major cylindrica ACED, proinde eidem aequalis.

§. 360.

Superficies sphaerae est quadrupla maximi in sphaera circuli.

DEM. Sit sphaera ABCD, maximus circulus APCS, atque intelligatur circumscribi sphaerae cylindrus ejusdem altitudinis EFGH, erit superficies cylindrica EFGH = superficiei sphaerae (359.). Sed cylindrica aequalis est circulo, cujus radius est medius proportionalis inter HE, EF, (§. 42.) quae sunt aequales, qui radius proinde est aequalis diametro EF aut AC. Circulus autem, cujus radius aequalis est diametro alterius AC, habet diametrum duplo majorem diametro AC, et cum sit APCS ad hunc circulum in duplicata ratione diametrorum $AC : 2AC$, erit hic circulus quadruplum circuli APCS. Igitur superf. cyl. EFGH, vel tota sphaerica, quadrupla est maximi sphaerae circuli APCS.

COR. Integra cylindri EFGH superficies est sphaericae ABCD sequialtera.





ARITHMETICA ELEMENTARIS.

SECTIO I.

DE

NVMERIS EORVMQVE SIGNIS
GENERATIM.

§. I.

ARITHMETICA est scientia ex datis numeris cognitis inveniendi alios incognitos signorum ope certaue eorundem combinatione et substitutione. Atque ideo haec scientia explicare debet *primo* operationes simplices in determinatis casibus actu instituendas, ut prodeat signum determinatum numeri quaesiti; *secundo* methodum determinandi, quaenam ex operationibus istis simplicibus et quo ordine in determinatis casibus adplicandae sint. Illa arithmeticae pars dicitur **ELEMENTARIS** haec vero **SVBLIMIOR**.

§. 2.

In designandis numeris novem utimur notis simplicibus satis cognitis, quae sequuntur: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, hac lege, ut lineam, secundum quam scripturi sumus, in loca divisam concipiamus a dextra versus sinistram, tum vero quaelibet earum notarum simplicium in primo ad dextram loco signet unitates, in proximo versus sinistram loco decades unitatum, in tertio centenas et ita porro, crescente valore notae in decuplum, si in locum versus sinistram consequentem scribatur, et decrescente in subdecuplum, si in locum versus dextram antecedentem transferatur. Ubi defi-

deficientibus unitatibus vel decadibus, centenis aliisque locus, quem occupare debebat nota simplex, vacuus relinquendus est, eum signo 0, quod Cifra dicitur, explemus, ne ordinum oriatur confusio.

§. 3.

Numerus secundum has leges scriptus e. g. 35872094826152870364008, verbis exprimi solet sequentem in modum: Numerus propositus dividitur in classes sex notarum incipiendo a dextra, et initiis classium adscribuntur notae 0, I, II, III, etc. Quaelibet deinde classis dispescatur in duas alias trium notarum signo commatis hoc modo 35,

III II I 0
872 094, 826 152, 870 364, 008. His factis, si supponamus, quod legere quis noverit tres notas ordine scriptas, ut 364 capto a sinistris initio, quaelibet trium notarum classis exprimatur, ac si scripta foret separatim, comma vero quodvis legatur, ac si ejus loco adscriptum foret Mille, totaque sex notarum classis ad harum notarum 0, I, II, III, etc., proxime sequentem referatur, quarum prima notat Unitates, altera Milliones, tertia Billiones, quarta Trilliones et ita porro.

§. 4.

In numero secundum leges §phi 2. scripto, ut 28735, quaelibet nota ut 8 valet decimam partem ejus quod valisset in locum notae proxime antecedentis 2 translata. Hinc sequitur, quod si 2 ponatur designare unitates, 8 designet unitatis partes decimas, unde nota 7 hanc excipiens signabit partes decimas decimarum, id est centesimas, quae hanc sequitur nota 3, unitatis partes millesimas, et ita porro. Hinc Fractiones Decimales, id est, quarum denominatores sunt aliqui numeri ex serie 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, etc. ubi quilibet terminus sequens decies major est termino proxime antecedente, per eandem hanc signandi legem, unitatum loco commate vel puncto signato, denotari possunt.

Reliqui numeri fracti hic quoque scribi solent eodem modo, quem in §. 180. *Geom.* jam notavimus, litterarum loco hic adhibendo signa determinata $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $1\frac{7}{2}$, $1\frac{1}{8}1\frac{7}{9}$.

§. 5.

Numeri sunt quanta, proinde duo numeri pariter atque duo extensa inter se comparari possunt. Duorum numerorum mutua ad se invicem habitudo, quae eorundem inter se comparatione innotescit, vocari solet eorum *Ratio Mathematica*.

§. 6.

Comparari autem possunt numeri inter se duplici modo. Nimirum aut inquirendo in eorundem differentiam, aut investigando magnitudinem, quae uni in respectu ad alterum competit. Ea duorum numerorum ad se invicem habitudo, vi cuius determinata quadam parte a se invicem differunt, vocatur *Ratio Arithmetica* unius numeri ad alterum: magnitudo, quae uni numero in respectu ad alterum est tribuenda, eorum *Ratio Geometrica*. Ratio Arithmetica, quae inter numeros A et B intercedit, designatur sequenti signo (—) collocato inter terminos rationis hoc modo A — B, atque eorum Ratio Geometrica signo A : B, uti in Geometria extensorum ratio denotari solet.

COR. Quanta, quae per numeros A et B exprimuntur, inter se comparari nequeunt, si sint heterogenea. Proinde nec arithmetica nec geometrica ratio concipi potest inter numeros A et B, quanta heterogenea exprimentes, nisi forsan numeri illi *considerentur in abstracto*, quod fieri dicitur, si ad diversitatem unitatum unius numeri ab unitatibus alterius non attenditur.

§. 7.

Si numerus A a numero B differt differentia aequali illi, qua numerus C a numero D differt, ratio arithmetica ipsius A ad B *similis*, sive *aequalis*, esse dicitur

citur rationi ipsius C ad D, quae rationes opposito casu dicuntur *inaequales*. Aequalitas duarum rationum arithmeticarum dicitur *Proportio arithmetica*, cuius termini vocantur *Numeri arithmetice proportionales*. Ad hoc indicandum utimur signo sequenti, $A - B = C - D$. Quid sit proportio numerorum geometrica et numeri geometricae proportionales ex §. 167. *Geom.* perspicitur. Arithmetica ratio numeri A ad numerum B innotescit, si data fuerit horum numerorum differentia D, quae ideo quoque *Denominator Rationis* numeri A ad B dici solet.

COR. Aequalium rationum arithmeticarum denominatores aequales sunt: et duae rationes arithmeticae, quarum denominatores aequales sunt, ipsae sunt aequales. Generalis igitur formula pro arithmetica proportionem quacunque haec est $A + d - A = B + d - B$, quae etiam sic scribi potest $A - A + d = B - B + d$, si d fuerit denominator.

§. 8.

Si in proportionem arithmetica $A - B = C - D$ fuerit $B = C$, ut sit $A - B = B - D$, vel $A - C = C - D$; proportio arithmetica vocatur *continua*, B vero vel C *terminus medius arithmetice proportionalis*. Reliquae proportionem *discretas* vocantur.

§. 9.

Arithmetica ratio numeri A ad numerum B innotescit, si datus fuerit *Denominator Rationis* numeri A ad B. Ideo dato numero A et denominatore D rationis ipsius A ad B inveniri potest numerus B, ac operatio hunc in finem instituenda alia erit, si numerus quaesitus B numerum datum A excedere debet dato denominatore: alia vero si numerus datus A quaesitum B dato denominatore excedere debet. Prior operatio est *Additio* numeri D ad A, posterior vero subtractio numeri D a numero A (conf. §. 20 - 23. *Geom.*)

§. 10.

Omnes numeri integri, si intelligantur vel numeri abstracti, vel tales, quorum unitates sunt homogeneae, sunt quanta commensurabilia, quia ipsa unitas est eorundem communis mensura, et omnes numeri fracti, quorum denominatores sunt iidem, quia eadem pars unitatis aliquota est eorum communis mensura.

COR. Ideo ea omnia, quae Sectio VI. Geometriae de comparatione quantorum commensurabilium geometrica explicavit, etiam vera erunt, si extensorum loco numeri integri substituantur, vel numeri fracti, qui aequales habent denominatores.

§. 11.

Duo numeri fracti, quorum denominatores ad numeratores in eadem sunt ratione geometrica, aequales sunt; et vicissim si duo numeri fracti sunt aequales, ratio denominatorum ad numeratores eadem est.

DEM. 1) Si dati sint numeri fracti $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, atque sit $B : A = D : C$; numerator A eodem modo componitur ex denominatore B, quo numerator C ex denominatore D componitur. Quare cum denominatores fractionum sint ipsae unitates, ex quibus componuntur fractiones, sequitur easdem eodem modo ex suis unitatibus componit si sint denominatores ad numeratores in eadem ratione, et proinde ipsae fractiones aequales erunt (§. 180. Geom.).

2) Si fuerit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, numerus $\frac{A}{B}$ ex sua unitate eodem modo compositus est, quo numerus $\frac{C}{D}$ ex sua unitate componitur (§. 180. Geom.). Ipsi vero denominatores sunt unitates, ex quibus fractiones compositae sunt, ergo numerator A eodem modo ex suo de-

denominatore B compositus erit, quo numerator C componitur ex suo denominatore D . Ex quo patet, esse $B : A = D : C$.

COR. Si igitur numeratoris et denominatoris ejusdem fractionis capiantur aequemultipla, vel aequesubmultipla, magnitudo fractionis non mutatur (§. 187. *Geom.*)

ita ut sit $\frac{A}{B} = \frac{nA}{nB}$.

§. 12.

Duo numeri fracti quicunque sunt quanta commensurabilia, licet denominatores sint inaequales.

DEM. Dati sint numeri fracti $\frac{n}{m}$ et $\frac{A}{B}$. Lo-

co $\frac{n}{m}$ substitui potest $\frac{Bn}{Bm}$ et $\frac{mA}{mB}$ loco $\frac{A}{B}$, quia est

$\frac{Bn}{Bm} = \frac{n}{m}$ et $\frac{mA}{mB} = \frac{A}{B}$ (§. praec.). Praeterea est

$Bm = mB$, quia est $1 : m = B : Bm$ et $1 : B = m : mB$. Hinc $1 : m = B : mB$ (§. 188. *Geom.*) et $B : Bm = B : mB$ (§. 170. *Geom.*). Proinde $Bm = mB$. Fractiones

igitur $\frac{Bn}{Bm}$ et $\frac{mA}{mB}$ sunt quanta commensurabilia (§. 10.

Ar.) et proinde quoque ipsis aequales $\frac{n}{m}$ et $\frac{A}{B}$ erunt commensurabilia quanta.

COR. I. Si fuerit $B = 1$, $\frac{A}{B}$ est numerus integer.

Ideo quoque numerus integer et fractio quaecunque sunt quanta commensurabilia.

COR. II. Si igitur in proportionem $A : B = C : D$, litterae A, B, C, D , numeros denotent quoscunque vel integros vel fractos, omnia ea hic adplicari possunt,

quae Sectio VI. Geometriae de proportionum Geometricarum rationalium affectionibus explicavit.

§. 13.

Si duorum numerorum A et B, inter quos ratio geometrica intercedere concipitur, unus A pro unitate assumatur, alter B ex eodem tanquam numerus ex unitate ortus esse concipi potest. Innotescente vero numero, in quem B evadit, si A sumatur pro unitate, simul innotescit ratio geometrica ipsius A ad B, quare numerus iste vocatur *Exponens rationis* ipsius A ad B.

COR. Aequalium rationum geometricarum aequales sunt exponentes, et duae rationes geometricae, quarum exponentes aequales sunt, ipsae sunt aequales.

§. 14.

Ex dato igitur numero A et exponente rationis E ipsius A ad B numerus B potest inveniri. Erit vero aut unitas ad exponentem E, uti quantitas data A ad quaesitam B: aut exponens E ad unitatem, uti quantitas data A ad quaesitam B. Si prius, operatio, qua B ex dato A et exponente E invenitur, vocatur *Multiplicatio* numeri A per numerum E. Quantitas data A vocatur *Multiplicandum*, exponens E vero *Multiplicator*. Utrique numeri dati etiam communi nomine *Factorum* insigniuntur. Quantitas quaesita B dicitur *Factum* s. *Productum*. Si posterius, operatio instituenda, ut B ex dato A et exponente E inveniatur, *Divisio* quanti A per E vocatur. Quantitas data A nomine *Dividendi*, exponens nomine *Divisoris*, et quantitas quaesita B *Quoti* nomine indigitantur. Multiplicandum esse numerum A per alium E denotatur hoc signo ($\times$) vel ($\cdot$) vel etiam ($\cdot$) inter eosdem interposito. Alias quoque factores in se invicem multiplicandi absque ullo interposito signo sibi invicem junguntur. Dividendum esse quantum A per aliud E indicatur scripto dividendo eique subjuncto dividere interposito signo ($:$).

COR. I.

COR. I. Si E est numerus integer, et numerus A toties sibi ipsi addatur, quoties in E est unitas; numerus qui producit, erit $= A \times E$.

COR. II. Duo numeri A et E , five sint integri five fracti, five unus integer, alter vero fractus, idem dant factum, five prior per posteriorem, five posterior per priorem multiplicetur. Multiplicato enim numero A per E est $1 : E = A : A \times E$, et multiplicato E per A fit $1 : A = E : E \times A$, ex qua analogia deducitur $1 : E = : E \times A$ (§. 188. *Geom.*). Proinde est $A : A \times E = A : E \times A$ (§. 170. *Geom.*) et $A \times E = E \times A$ (§. 171. Cor. 2. *Geom.*).

COR. III. Numerus per unitatem multiplicatus vel divisus non mutatur. Si vero numerus per se ipsum dividatur quotus est unitas.

§. 15.

Aequalibus numeris per aequales multiplicatis vel divisis, inveniuntur facta aequalia vel quoti aequales.

DEM. Sit $A = C$, et $B = D$, atque

1) Si multiplicetur A per B et C per D , habetur $1 : B = A : A \times B$ et $1 : D = C : C \times D$. Cum vero sit $B = D$, erit quoque $1 : B = C : C \times D$ (§. 169. *Geom.*) et $A : A \times B = C : C \times D$ (§. 170. *Geom.*). Sed $A = C$ (*hyp.*) ergo $A \times B = C \times D$ (§. 171. Cor. 3. *Geom.*).

2) si dividatur A per B , et C per D , habetur $B : 1 = A : (A : B)$ et $D : 1 = C : (C : D)$, ex qua analogia ob $B = D$ iterum sequitur $B : 1 = C : (C : D)$ atque haec cum priori $B : 1 = A : (A : B)$ comparata dat $A : (A : B) = C : (C : D)$. Cum igitur sit $A = C$ (*hyp.*) iterum est $(A : B) = (C : D)$.

§. 16.

Si summa plurium numerorum $A + B + C +$ etc. multiplicanda vel dividenda sit per numerum E ; erit $(A + B + C) \times E = A \times E + B \times E + C \times E$, et $(A + B + C) : E = (A : E) + (B : E) + (C : E)$.

DEM. 1) Quia est $1 : E = A : A \times E$, $1 : E = B : B \times E$, et $1 : E = C : C \times E$ etc. erit $1 : E = (A + B + C) : (A \times E + B \times E + C \times E)$ (§. 186. Cor. Geom.) et ideo $A \times E + B \times E + C \times E = (A + B + C) \times E$ (§. 14. Ar.).

2) Deinde quia est $E : 1 = A : (A : E)$, $E : 1 = B : (B : E)$, $E : 1 = C : (C : E)$ etc. erit $E : 1 = A + B + C : (A : E + B : E + C : E)$ (§. 186. Cor. Geom.). Proinde $(A : E + B : E + C : E) + \text{etc.} = (A + B + C \text{ etc.}) : E$. §. 14. Ar.

COR. Ideo quoque est $(A - B) \times E = A \times E - B \times E$, et $(A - B) : E = (A : E) - (B : E)$. Sit enim $A - B = D$, erit $A = D + B$, et $A \times E = D \times E + B \times E$, vel $A : E = (D : E) + (B : E)$. Ideo $A \times E - B \times E = D \times E = (A - B) \times E$, et $(A : E) - (B : E) = (D : E) = (A - B) : E$.

§. 17.

Si duo numeri integri vel fracti A et B multiplicentur vel dividantur per eundem alium vel integrum vel fractum E; facta vel quoti erunt ut numeri dati A et B.

DEM. 1) Quia est $1 : E = A : A \times E$ et $1 : E = B : B \times E$, fiet $A : A \times E = B : B \times E$ (§. 170. Geom.) et $A : B = A \times E : B \times E$ (§. 188. Geom.).

2) Quia praeterea est $E : 1 = A : (A : E)$ et $E : 1 = B : (B : E)$, erit quoque $A : (A : E) = B : (B : E)$ et $A : B = (A : E) : (B : E)$.

§. 18.

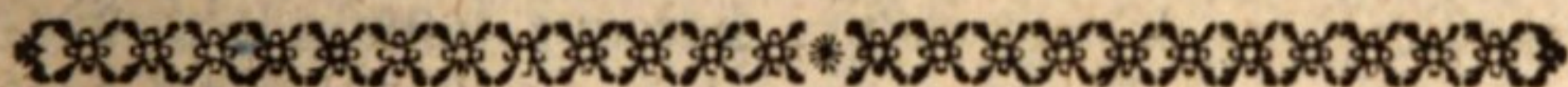
Aequalibus numeris per inaequales divisis, quoti erunt in ratione divisorum inversa.

DEM. Si $A = B$ et $C \text{ in} = D$, praeterea $\frac{A}{C} = Q$ et $\frac{B}{D} = q$; erit $C : 1 = A : Q$ et $D : 1 = B : q$, vel $D : 1 = A : q$, ob $A = B$ (hyp.). Ergo $C : D = q : Q$ (§. 193. Cor. Geom.).

§. 19.

§. 19.

Quatuor tantum possibiles esse operationes simplices, quibus ex dato signo numeri cogniti ejusque ratione ad numerum quaesitum incognitus isle inveniri potest, ex præcedentibus patet, nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio et Divisio (§. 14. et 9.) Complexus regularum, quibus convenienter quatuor istae operationes simplices signorum ope peragi debent, dici solet *Algorithmus*. Ideo Arithmetica Elementaris in eo, ut hunc Algorithmum, et quidem in numeris determinatis explicet, est occupata.



SECTIO II.

ALGORITHMVS NUMERORVM INTEGRORVM ET FRACTIONVM DECIMALIVM.

§. 20.

Postulantur signa summarum duorum numerorum integrorum, quorum quilibet denario minor est, ideoque nota simplici exprimitur, ut et differentiarum duorum numerorum integrorum, si signum numeri, a quo fieri debet subtractio, est unum ex iis, quae additione duarum notarum simplicium oriri possunt, subtrahendus vero numerus nota simplici expressus.

§. 21.

Datum numerum integrum quemcunque alteri addere, sive fractiones decimales ipsi adjunctae sint sive minus.

$$\begin{array}{r} 5 \ 7 \ 9 \ A \\ 4 \ 8 \ 6 \ 3 \ D \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 1 \ 3 \ 0 \\ 1 \ 3 \ 0 \ 0 \\ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 5 \ 4 \ 4 \ 2 \ B \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \ 3 \ 9 \ 9 \ A \\ 8 \ 9 \ 8 \ 9 \ 9 \ 7 \ D \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 8 \ 7 \\ 1 \ 8 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 9 \ 7 \ 2 \ 9 \ 8 \ 7 \ B \end{array}$$

SOL. Sint addendi numeri A et B. Scribantur signa eorundem ita, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus, decimae decimis, et rel. Tum incipiendo a dextris colligantur in summam (§. 19.) notae simplices primae classis, haecque summa subscribatur primae classi observato valore locali notarum simplicium. Deinde colligantur in summam (§. 20.) notae simplices secundae classis, haecque summa subscribatur eidem classi, iterum valore locali notarum simplicium probe observato, locis vacuis ad confusionem vitandam cifris repletis. Tertia classis tractetur eodem modo, donec nulla superfit. Summae partiales ita inventae de novo colligantur in summam, uti praescriptum est. Quibus factis numerus B ita repertus erit summa quaesita.

DEM. Continet numerus repertus B omnes partes numerorum A et D, proinde numeris A et D simul sumtis aequalis erit, et numerus B inventus excedit datum A data differentia D. Proinde est numerorum A et D summa (§. 9.).

COR. Quodsi plures duobus numeri A, B, C, fuerint dati in unam summam colligendi, facile patet, successive operandum et primo quaerendam esse summam (A + B), numerumque inventum deinde cum tertio dato C in unam summam esse colligendum, sicque porro, si adhuc plures fuerint dati.

§. 22.

Datis duobus numeri integris, sive fractiones decimales adnexae sint, sive minus, minorem a majori subtrahere.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & & \\ 5 & 8 & 2 & 7 \end{array} A \\ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 9 & 8 \end{array} D \\ \hline 4 \ 4 \ 2 \ 9 \ B \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 4 & 2, & 9 & 7 & 8 & 3 \end{array} A \\ \begin{array}{cccccc} 5, & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array} D \\ \hline 3 \ 7, & 4 \ 8 \ 0 \ 7 \ B \end{array}$$

SOL. Sit numerus major A, minor D. His ita scriptis, ut signa ejusdem ordinis sibi respondeant, incipiendo a dextris, quaelibet nota numeri D subtrahatur a nota numeri A ipsi respondente. Quodsi haec minor est nota ab ea subtrahenda, prius augenda est decade, haecque decas a nota versus sinistram proxima numeri A huc translata concipienda, ita ut ea nota unitate minor fiat, (quod puncto eidem subscripto indicatur). His peractis fieri potest subtractio (§. 20). Residuum sub nota subtracta scribatur apud B, sicque versus sinistram pergatur, donec nulla numerorum A et D nota superfit. Numerus B hoc modo ortus erit is, qui quaerebatur.

DEM. Numerus inventus B continet excessum omnium partium numeri A super omnes partes numeri D respondentes, ideo numerus B excessui totius numeri A supra numerum D totum aequalis est, ex quo porro sequitur, numerum A quoque excedere inventum B data differentia D, hincque B esse numerum quaesitum (§. 9.).

§. 23.

Invenire omnia facta, quorum factores sunt numeri integri denario minores.

SOL. et DEM. Scribantur ordine omnes numeri integri ab 1 ad 9, et quolibet eorum ad se ipsum addito proveniet nova series, quae eorum numerorum dupla continebit. Secundae hujus seriei numeris ad respondentes

dentes primae additis oriatur alia, quae tripla numero-
rum initio positorum continebit. Eodem modo qua-
drupla, quintupla et multipla reliqua invenientur (§. 14.
Cor. I.) uti in tabula adjecta factum est.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Haec tabula *Abacus Pythagoricus* vocari solet, ex ea-
que facta notarum simplicium satis promte excerpti
possunt.

COR. I. Si quaedam notarum simplicium 7 multipli-
cata per aliam notam simplicem 6 producat factum 42,
prior 7 autem in decuplum 70 augeatur, factum erit de-
cuplum prioris 420 (§. 17.) si factor 7 augeatur in
centuplum 700, factum erit 4200, si vero 700 multi-
plicetur per 60, erit factum 42000 (§. cit.).

COR. II. Quodsi vero loco 7 sumatur 0, 7, factum
erit prioris pars decima 4, 2, hinc quoque est 0, 07 $\times$ 6
 $=$ 0, 42 et 0, 07 $\times$ 0, 6 $=$ 0, 042.

COR. III. Ideo generaliter, si multiplicandae sint no-
tae simplices cum adnexis locis vacuis, facti nota dexter-
rima a loco unitatum tantundem est removenda, quan-
tum versus eandem partem a locis unitatum remotae sunt
notae

notae dexterrimae amborum factorum, locis vacuis, quoad opus est, cyphris repletis.

§. 24.

Datum numerum ietegrum A quemcunque per quemvis alium integrum E multiplicare.

SOL. 1. Si multiplicator E fuerit nota simplex, multiplicetur per eam multiplicandi A nota prima incipiendo a dextris

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad A \\
 7 \quad E \\
 \hline
 3 \quad 8 \quad 3 \quad 8 \quad 1 \quad B
 \end{array}$$

(§. 22.) scribaturque sub illa numeri A nota excessus facti supra decades. Deinde multiplicetur secunda nota simplex numeri A per E (§. 22. Cor. 1.) factoque addantur decades prioris facti, excessus summae ita ortae supra decades sub numeri A nota secunda scribatur, eademque operatio repetatur, donec nulla numeri A nota superfit. Numerus B hoc modo ortus erit factum quaesitum.

DEM. Nam $B = 3 \times E + 80 \times E + 400 \times E + 5000 \times E$ (per operat.) $= (3 + 80 + 400 + 5000) \times E$ (§. 16.) $= 5483 \times E$.

2. Si multiplicator fuerit nota ex pluribus composita,

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad A' \\
 9 \quad 2 \quad 7 \quad E \\
 \hline
 3 \quad 8 \quad 3 \quad 8 \quad 1 \quad F \\
 1 \quad 0 \quad 9 \quad 6 \quad 6 \quad 0 \quad G \\
 4 \quad 9 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 0 \quad 0 \quad H \\
 \hline
 5 \quad 0 \quad 8 \quad 2 \quad 7 \quad 4 \quad 1 \quad B
 \end{array}$$

quaerantur facta F, G, H ex numero A per omnes notas simplices numeri A (§. per sol. 1. et §. 23. Cor. 1.) eaque colligantur in summam B, quae erit factum quaesitum.

DEM.

DEM. Nam $B = A \times 7 + A \times 20 + A \times 900$
 (per operat.) $= A \times (7 + 20 + 900)$ (§. 16.) $= A \times 927$.

COR. I. Factores, quibus adnexae sunt cifrae, multiplicantur in se invicem nulla cifrarum habito respectu, deinde facto ita orto tot cifrae adjiciuntur, quot adsunt in utroque factore.

COR. II. Factores, quibus adnexae sunt fractiones decimales, multiplicantur ut numeri integri, in facto autem invento signum loci unitatum ita collocatur, ut post illud tot sequantur loca decimalia, quot adsunt in utroque factore (§. 23. Cor. 2.).

§. 25.

Si factum dividatur per multiplicatorem, quotus est multiplicandum. Si vero quotus multiplicetur per divisorem, producitur dividendum.

DEM. 1. Sit multiplicator $= m$ multiplicandum $= M$ et factum $= F$. Dividatur F per m , et erit ex notione divisionis $m : 1 = F : (F : m)$ vel $1 : m (F : m) : F$ praeterea vero ex notione multiplicationis $1 : m = M : F$, ex qua analogia cum priori comparata concluditur $(F : m) : F = M : F$ (§. 170. Geom.) et proinde $(F : m) = M$ (§. 171. Cor. 2. Geom.).

2. Deinde sit quotus $= Q$, dividendum $= D$ et divisor $= d$. Multiplicetur Q per d , et erit $1 : d = Q : Q \times d$, vel $d : 1 = Q \times d : Q$. Ex notione vero divisionis est $d : 1 = D : Q$, proinde $Q \times d : Q = D : Q$ (§. 170. Geom.) atque $Q \times d = D$ (§. 171. Cor. 2. Geom.).

COR. I. Ideo ex Abaco Pythagorico etiam inveniri possunt quoti, si dividendum in tabula occurrat, et divisor sit numerus denario minor.

COR. II. Si numerus dividendus in tabula accuratus non occurrat, invenietur numerus, qui per divisorem multiplicatus producat factum dividendo immediate minus, si nempe factum dividendo immediate minus in tabula

bula investigetur, cujus factorum unus sit divisor, alter enim quotus erit.

COR. III. Si dividendum et divisor sint notae hujus generis, et habeant loca vacua adnexa vel dextrorsum, vel sinistrorsum, invenietur distantia notae dexterrimae quoti a loco unitatum subtracta distantia notae dexterrimae divisoris a simili distantia dividendi.

COR. IV. Numerus per eundem alium multiplicatus et divisus non mutatur.

§. 26.

Si dividendum est minus divisore, quotus est numerus fractus, cujus denominator est divisor et numerator est dividendum.

DEM. Sit dividendum = D , divisor = d , quotus = Q , et $D < d$. Dividatur D per d , ut prodeat Q , eritque $d : 1 = D : Q$ et $Q < 1$ (§. 172. Geom.) proinde Q ex unitate integra aliquoties repetita componi nequit, sed tantum ex parte ejus aliquota: et quia est $d : D = 1 : Q$, (§. 188. Geom.) unitas resolvenda est in tot partes aliquotas, quot sunt unitates in numero d , ex iisque tot sunt assumendae ad componendum Q , quot sunt unitates in D , unde patet propositum.

COR. I. Ex demonstratione consequitur propositio generalis, quod omnis quotus considerari possit ut numerus fractus, cujus numerator est dividendum, denominator vero divisor, unde quotus, qui divisione numeri A per E prodit, etiam generaliter ut numerus fractus $\frac{A}{E}$ designari solet.

COR. II. Porro ex analogia $d : D = 1 : Q$ patet, quod quotus sit exponens rationis divisoris ad dividendum: quare generaliter exponens rationis numeri A ad numerum B divisione ipsius B per A invenitur.

O

COR. III.

COR. III. Hinc quaevis ratio geometrica numeri A ad B instar fractionis $\frac{B}{A}$ et proportio geometrica $A : B = C : D$ etiam sequentem in modum $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ exprimi potest (§. 12. Cor. 1.).

COR. IV. Si exponens rationis numeri A ad numerum B notetur littera m , erit $\frac{B}{A} = m$, et proinde $B = mA$ (§. 25.). Quodsi jam ratio $C : D$ aequalis sit rationi $A : B$, erit quoque $\frac{D}{C} = m$, ideoque $D = mC$. Ubi notandum est, quod m possit esse numerus integer vel fractus quicumque. Proportio itaque $A : B = C : D$ coincidit cum ista $A : mA = C : mC$, atque hæc est forma generalis proportionis rationalis cujuscunque.

§. 27.

Datum numerum integrum per alium integrum priori minorem dividere.

SOL. Sit datum dividendum A, divisor E.

E. 27)	5	8	4	3	5	A		2	0	0	0	M
	5	4	0	0	0	B		1	0	0	N	
									6	0	O	
	4	4	3	5	D				4	P		
	2	7	0	0	E							
	1	7	3	5	G	2		1	6	4	B	
	1	6	2	0	H							
			1	1	5	I						
			1	0	8	K						
					7	L						

In divisore concipiantur omnia loca vacua esse praeter primum versus sinistram pariterque in dividendo, nisi
nota

nota finissima ipsius minor sit nota finissima divisoris, quo casu omnia dividendi loca praeter duo finissima sunt vacua concipienda. Quaeratur jam quotus M ex §. 25. Cor. 3. Multiplicetur divisor E per hunc quotum, et productum C subtrahatur ab A , si eodem minus sit; si autem C dividendo A majus inveniatur, quoti M nota finissima unitate est minuenda, et multiplicatio tentanda donec inveniatur productum C dividendo A immediate minus. Differentia D hujus producti C a divisore A sumatur pro novo dividendo per divisorem E , similibus operationibus repetitis quaeratur quotus N , qui multiplicatus per divisorem E producat factum F priori residuo D immediate minus, hocque facto F a D subtracto notetur differentia G . Eaedem operationes repetantur, donec relinquatur residuum aliquod L , quod divisore E minus sit. Addantur quoti partiales M, N, O, P , et

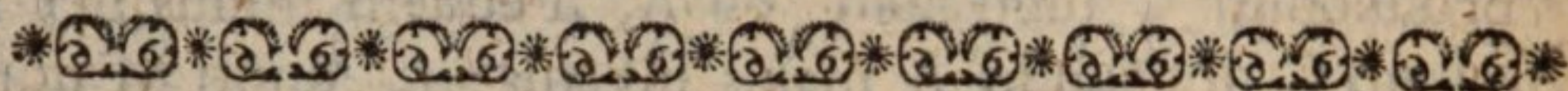
summa sit $= B$, quo facto erit $B + \frac{L}{E}$ quotus, qui quaerebatur.

DEM. Est enim $C + F + H + K + L = A$, et $C = M \times E$, $F = N \times E$, $H = O \times E$, $K = P \times E$ (*per operat.*) ideo $A = M \times E + N \times E + O \times E + P \times E + L = (M + N + O + P) \times E + L$. Praeterea est $M +$

$N + O + P = B$, hinc $A = B \times E + L$, et $\frac{A}{E} = B + \frac{L}{E}$ (§. 15. coll. §. 25. Cor. 4.).

COR. Quodsi divisor et dividendum loca decimalia habeant adnexa, inveniuntur loca decimalia quoti ex §. 25. Cor. 3. Ex quo patet, hoc casu in dividendo plures post locum unitatis notas debere adnexas esse, quam ad sunt in divisore. Quod si fecus se habuerit, tot loca va-

cua dividendo versus dextram adnecti debent et divisio, quousque lubet, continuari potest, donec quoti notae ultimae eas minutias denotent, quae in praxi negligi possunt.



SECTIO III.

ALGORITHMVS FRACTIONVM.

§. 28.

Datam fractionem per numerum integrum multiplicare.

SOL. 1. Datae fractionis $\frac{A}{B}$ numerator A multiplicetur per numerum datum C, ut fiat $\frac{A \times C}{B}$.

DEM. Quia est $A : A \times C = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B}$ (§. 17.) et $A : A \times C = 1 : C$ (§. cit. coll. §. 14. Cor. 3. et 25. Cor. 4.) erit $1 : C = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B}$, ideoque $\frac{A \times C}{B} = \frac{A}{B} \times C$.

2. Fractionis $\frac{A}{B}$ denominator B dividatur per integrum C, numeratore retento.

DEM. Nam $A \times C : B = \frac{A \times C}{C} : \frac{B}{C}$ (§. 17. Arithm.) et quia $\frac{A \times C}{C} = A$, (§. 25. Cor. 4.) exinde sequi-

sequitur, fore $A \times C : B = A : \frac{B}{C}$, id est, $\frac{A \times C}{B}$
 $= \frac{A}{B : C}$ (§. 26. Cor. 3.) $= \frac{A}{B} \times C$. (sol. 1)

§. 29.

Datam fractionem per numerum integrum dividere.

SOL. 1. Datae fractionis $\frac{A}{B}$ numerator dividatur per integrum datum C , retento denominatore, erit $\frac{A : C}{B}$ quotus. Vel

2. Denominator B multiplicetur per integrum C , retento numeratore, quod prodit, $\frac{A}{B \times C}$ erit quotus.

DEM. Numerus enim, qui multiplicatus per divisorem producit dividendum, est quotus. Sed $\frac{A : C}{B}$

$$\times C = \frac{A : C \times C}{C} = \frac{A}{B}, \text{ et } \frac{A}{B \times C} \times C = \frac{A}{B \times C : C} = \frac{A}{B}.$$

COR. Ex hac propositione cum praecedente collata perspicitur, valorem fractionis non mutari, si ejusdem numerator et denominatur per eundem numerum multiplicetur vel dividatur. Ultimo subsidio saepius fractio ad minores terminos reduci potest, si nimirum inveniri possit numerus quidam tertius, qui utrumque fractionis terminum absque residuo dividit.

§. 30.

Datae fractioni aliam datam addere.

SOL. 1. Si datarum fractionum denominatores sint iidem, addantur earundem numeratores, retento denominatore.

DEM. Si datae sint fractiones $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ erit $\frac{A}{C}$ quotus ex divisione ipsius A per C, et $\frac{B}{C}$ quotus ex divisione ipsius B per C emergens (§. 26. Cor. 1.) quare erit $\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$.

2. Si datarum fractionum denominatores non sint iidem, additio institui nequit, nisi reduci possint ad alias fractiones ipsis aequales, quarum denominatores sint iidem, id est *ad eandem denominationem*. Si hoc factum sit, reliqua peragi possunt, uti in casu primo.

Si vero datae sint fractiones $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ uterque vero utriusque fractionis terminus per denominatorem alterius multiplicetur, ut habeantur fractiones $\frac{A \times D}{B \times D}$

et $\frac{C \times B}{D \times B}$; fractiones datae ad eandem denominationem erunt reductae.

DEM. Est enim $\frac{A \times D}{B \times D} = \frac{A}{B}$ et $\frac{C \times B}{D \times B} = \frac{C}{D}$ (§. 29. Cor.) et $B \times D = D \times B$ (§. 14. Cor. 2.).

COR. Quia omnis numerus integer quoque spectari potest, ut fractus, cujus denominator est unitas, iisdem regulis absolvitur additio numeri integri ad fractum.

§. 31.

Datam fractionem ab alia data subtrahere.

SOL.

SOL. Fractionibus, si non habeant eundem denominatorem, ad eandem denominationem reductis, numerator datae fractionis subtrahatur a numeratore alterius, retento denominatore: quod prodit, erit differentia quaesita.

DEM. Sit generatim fractio $\frac{B}{C}$ subtrahenda a fractione $\frac{A}{C}$. Cum $\frac{B}{C}$ sit quotus ex divisione ipsius A per C emergens, (§. 26. Cor. I.) erit $\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A - B}{C}$ (§. 16.).

COR. Ex iis, quae in Cor. §. praec. sunt monita, patent simul regulae, quarum usu fractio a numero integro, vel numerus integer a fractione subtrahi potest.

§. 32.

Numerum fractum $\frac{A}{B}$ per alium fractum $\frac{C}{D}$ multiplicare.

SOL. Factum ex numeratoribus datarum fractionum sumatur pro numeratore, et factum ex denominatoribus datarum pro denominatore fractionis $\frac{A \times C}{B \times D}$, quae erit factum.

DEM. Multiplicato numeratore A per alterum C, erit $1 : A = C : A \times C$, Sed $C : A \times C = \frac{C}{D} : \frac{A \times C}{D}$ (§. 17.) ideo $1 : A = \frac{C}{D} : \frac{A \times C}{D}$ (§. 170.

Geom.) vel $1 : \frac{C}{D} = A : \frac{A \times C}{D}$ (§. 188. Geom.)

Jam vero $A : \frac{A \times C}{D} = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B \times D}$ (§. 17. et

29.) ergo $1 : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} : \frac{A \times C}{B \times D}$ et $\frac{A \times C}{B \times D} =$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}.$$

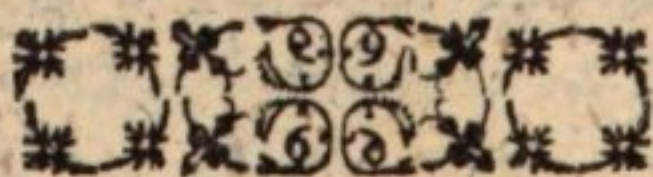
§. 33.

Numerum fractum $\frac{A}{B}$ per alium numerum fractum $\frac{C}{D}$ dividere.

SOL. Numerator dividendi multiplicetur per denominatorem divisoris, et denominator dividendi per numeratorem divisoris. Prius factum $A \times D$ est numerator, et posterius $B \times C$ denominator quoti $\frac{A \times D}{B \times C}$.

DEM. Numerus, qui multiplicatus per divisorem producit dividendum est quotus (§. 25.). Sed numerus $\frac{A \times D}{B \times C}$ multiplicatus per divisorem $\frac{C}{D}$ producit dividendum $\frac{A \times D \times C}{B \times C \times C}$ (§. 32.) $= \frac{A}{B}$; (§. 29. Cor.)

proinde numerus $\frac{A \times D}{B \times C}$ est quotus.



SECT.

SECTIO IV.

DE

PROBLEMATVM QVORVNDAM ARITHMETICORVM, QVAE PROPOR- TIVM THEORIA NITVNTVR, SOLVTIONE.

§. 34.

In omni proportione arithmetica est summa terminorum mediorum aequalis summae extremorum.

DEM. Generalis proportionum arithmeticarum forma est $A - A + d = B - B + d$, vel $A + d - A = B + d - B$. Utroque casu summa terminorum mediorum est $A + B + d$, et summa extremorum $A + B + d$, quæ summæ aequales sunt.

COR. Si igitur proportio arithmetica fuerit continua, duplum termini medii aequalis est summae extremorum.

§. 35.

Datis tribus numeris A, B, C, invenire terminum quartum arithmetice proportionalem.

SOL. Addantur terminus secundus B et tertius C, atque a summa subtrahatur terminus primus A, quod prodit, erit terminus quartus proportionalis quæsitus.

DEM. In omni proportione arithmetica $A - B = C - D$ est $A + D = B + C$ (§. praec.). Proinde terminus quartus $D = B + C - A$ (§. 21. Geom.).

COR. Si igitur fuerit $A + D = B + C$, erit $A - B = C - D$. Sit enim $A - B = C - X$, erit $X = B + C - A$. Ex hyp. vero est $A + D = B + C$, et proinde $D = B + C - A$; hinc $X = D$ et $A - B = C - D$.

§. 36.

Datis duobus numeris A et C invenire terminum medium arithmetice proportionalem

SOL. Addantur numeri dati A et C, atque summa inventa dividatur per numerum 2, quotus erit terminus medius quaesitus.

DEM. Quia in proportionem arithmetica continua $A - B = B - C$ est $A + C = 2B$, erit terminus medius

$$B = \frac{A + C}{2}.$$

§. 37.

Datis tribus numeris A, B, C, invenire quartum proportionalem.

SOL. 1. Numerus secundus B dividatur per primum A, et quod prodit multiplicetur per numerum C.

Factum $\frac{B}{A} \times C$ erit numerus quartus proportionalis quaesitus.

2. Vel numerus secundus B multiplicetur per tertium C. Factum $B \times C$ dividatur per numerum pri-

imum A et quotus $\frac{B \times C}{A}$ erit numerus quartus proportionalis quaesitus.

DEM. Quotus $\frac{B}{A}$ est exponens rationis numeri

A ad numerum B. Sit $\frac{B}{A} = m$, erit $B = mA$ et A:

$mA = C : mC$ (§. 26. Cor. 4.) proinde numerus quartus

proportionalis quaesitus erit $mC = \frac{B}{A} \times C$. Quia

vero est $B : \frac{B}{A} = B \times C : \frac{B}{A} \times C$ (§. 17.) et

proin.

proinde $B : B \times C = \frac{B}{A} : \frac{B}{A} \times C$, atque praeter-

ea $B : B \times C = \frac{B}{A} = \frac{B \times C}{A}$ (§. 17.), erit

$\frac{B}{A} : \frac{B}{A} \times C = \frac{B}{A} : \frac{B \times C}{A}$ (§. 170. *Geom.*) ideo-

que $\frac{B}{A} \times C = \frac{B \times C}{A}$.

COR. I. In omni proportione geometrica $A : B = C : D$ est factum terminorum mediorum aequale facto extremorum. Quia enim est $D = \frac{B \times C}{A}$, utrinque per numerum A multiplicando fit $A \times D = B \times C$ (§. 15.).

COR. II. Vicissim quoque si fuerit $D = \frac{B \times C}{A}$, erit $A : B = C : D$. Sit enim X quarta proportionalis ad quanta A, B , et C , ut vera sit proportio $A : B = C : X$, erit $X = \frac{B \times C}{A}$. Sed $D = \frac{B \times C}{A}$ (*hypo.*) ideo $X = D$ (§. 13. Cor. 2. *Geom.*) et $A : B = C : D$ (§. 169. *Geom.*).

COR. III. Proinde si fuerit $A \times D = B \times C$, erit $A : B = C : D$. Quia enim $A \times D = B \times C$ (*hypo.*) erit $D = \frac{B \times C}{A}$ (§. 15.) id est $A : B = C : D$.

§. 38.

Si A et B fuerint duo quanta incommensurabilia, impossibile est, ut B ex A tanquam numerus ex unitate possit componi. Atque si fingatur aliquis numerus, qui quantum B ex A tanquam unitate exprimat, is Numerus Irra-

Irrationalis vocatur. Reliqui numeri dicuntur *Rationales*. Exponens igitur rationis quanti *A* ad quantum *B* erit numerus irrationalis, si *A* et *B* sunt quanta incommensurabilia.

COR. Si numerus irrationalis, in quem evadit *B*, si *A* sumatur pro unitate, sit *m*, erit hoc quoque casu $1:m = A:B$ et $B = mA$ (§. 14.). Atque si fuerit $A:B = C:D$, ratio $C:D$ pariter erit irrationalis, et $1:m = C:D$ (§. 170. *Geom.*) proinde $D = mC$, ita ut hoc quoque casu forma proportionis generalis sit $A:mA = C:mC$. Ex quo patet, solutionem problematis in §. praec. etiam locum habere, licet ratio $A:B$ sit irrationalis, si quidem exponens rationis sit quarta proportionalis ad quanta *A*, *B*, et tertium aliquod quantum quodcumque pro unitate assumtum. Atque sub eadem hypothese quoque verum erit, in omni proportionem geometrica factum terminorum mediorum aequale esse facto extremorum; et vice versa si factum aliquod $A \times D$ aequale sit facto $B \times C$, esse $A:B = C:D$.

§. 39.

Si numerus quidam *A* multiplicetur per se ipsum, factum $A \times A$ dicitur *numerus quadratus*, sive *Quadratum* simpliciter, atque ipse numerus *A* *radix hujus quadrati* vocari solet. Signum radice quadratica hoc est $\sqrt{}$, quadrato, cujus radix indicanda, praefigendum.

COR. I. In omni igitur proportionem geometrica continua $A:B = B:C$, quadratum termini medii aequale est facto termini primi in tertium.

COR. II. Si radix quadrati sit numerus integer cum adnexis fractionibus decimalibus; quadratum bis tot loca decimalia adnexa habet, quam ejus radix (§. 24. Cor. 2.).

COR. III. Quadratum numeri integri est numerus integer. Quadratum vero fractionis verae iterum est fractio vera.

§. 40.

Numerus quilibet quadratus, cujus radix constat ex duabus partibus utcumque, continet quadratum unius partis
cum

cum duplo facto earum partium, atque quadratum alterius partis.

DEM. Sit $A + B$ radix quadratica, illius quadratum erit $(A + B) \times (A + B)$. Est vero $(A + B) \times (A + B) = (A + B) \times A + (A + B) \times B$. Praeterea $(A + B) \times A = A \times A + B \times A$ et $(A + B) \times B = A \times B + B \times B$ (§. 16.). Cum igitur sit $B \times A = A \times B$, erit $(A + B) \times (A + B) = A \times A + 2A \times B + B \times B$.

§. 41.

Quadratum numeri per notas simplices diversorum ordinum expressi constat ex quadrato primae a sinistris notae, duplo facto notae primae in secundam, quadrato secundae, duplo facti ex prima et secunda in tertiam, quadrato tertiae, duplo facti ex prima, secunda et tertia in quartam etc. servatis ubique notarum valoribus.

DEM. Sit numeri A quadratum formandum, atque is numerus concipi potest constare ex partibus 6 et 7340. Quarendum igitur est B, quadratum partes 6, tum C, duplum facti ex partibus et quadratum partis reliquae. Illa autem pars iterum in duas alias 7300 et 40 divisa concipiatur, quare ejus quadratum componetur ex quadrato partis 40 D, ex E duplo facti ex partibus, et ex quadra-

		73	46A
			36B
8	80	80C	
□	73	40	
	16	00D	
58	40	00E	
□	73	00	
9	00	00F	
4	20	00G	
49	00	00H	
53	96	37	16

to partis 7300. Denique quadratum partis 7300 iterum ex quadrato partis 300 F, duplo facti 7000 $\times$ 300 G, et ex H quadrato partis 7000 constat, unde patet propositum.

COR. Ex demonstratione patet, diviso quadrato in classes binarum notarum a dextra versus sinistram, qua-

dra-

drata omnium notarum radice incipere a primis earum classium notis, facta vero ex partibus a secundis.

§. 42.

Dati quadrati radicem reperire.

SOL. Reperienda sit radix numeri 53963716. Dividatur numerus datus in classes binarum notarum inci-

	53	96	37	16	7 3 4 6
	49	.	.	.	H
14)	4	96	.	.	.
	4	2	.	.	G
		9	.	.	F
146)	67	37	.	.	.
	58	4	.	.	E
		16	.	.	D
1468)	88	1	16		C
	88	0	8		B
			36		
	88	1	16		
					0

piendo a dextris, ita ut finistima classis unam tantum notam contineat, si notarum numerus impar fuerit. Hoc facto a sinistris versus dextras procedendo ex abaco Pythagorico excerpatur quadratum 49, notis primae classis immediate minus, notetur ejus radix 7 atque quadratum 49 a notis primae classis subtrahatur, notato residuo 4. Ad hoc residuum referatur prima nota classis proximae, ut fiat 49, quod divisum per duplum radice repertae dabit quotum 3, qui erit radice pars altera. Augeatur classis secunda nota 6, ut jam sit 496, ab eaque subtrahatur factum ex quoto 3 per divisorem 14, quod est 42, ut et quadratum quoti 9. Notetur residuum 67, atque ad illud referatur prima nota 3 classis proximae ut jam sit 673. Dividatur 673 per duplam par-

tem

tem radicis hactenus repertam, quae est 146, et quotus 4 erit pars radicis tertia. Factum ex quoto in divisorem 584, ut et quoti quadratum 16 subtrahatur a numero 6737, qui est dividendus cum sequente nota conjunctus, et notetur residuum 881, ad quod denuo referri debet prima nota classis sequentis, ut fiat 8811, isque numerus dividatur per duplam partem radicis jam repertam, ut habeatur pars sequens radicis. Eodem modo procedendo habentur partes radicis reliquae, quod patet, comparando schema hujus calculi cum schemate calculi *Spbi praec.*

COR. I. Si datus numerus non fuerit quadratus numeri cujusdam integri, per easdem operationes reperietur numerus integer, cujus quadratum numero eo proxime minus sit.

COR. II. Potest hoc casu quoque inveniri numerus integer cum adjunctis fractionibus decimalibus, cujus quadratum a numero dato deficit differentia quantumvis parva; si numero dato adjiciantur tot classes binarum cifrarum, quot opus esse videtur, et operatio instituat, ut in problemate, a radice vero refecentur tot numeri pro fractionibus decimalibus, quot sunt classes cifrarum adjectarum.

§. 43.

Si fuerit numerus integer n major numero integro m, atque numerus n absque residuo non divisibilis per numerum

m, ut $\frac{n}{m}$ sit fractio spuria, aequipollens numero integro cum adjuncta fractione vera; quadratum hujus numeri iterum erit fractio aequipollens numero quodam integro cum adjuncta fractione vera.

DEM. Si quadratum $\frac{n \times n}{m \times m}$ aequale foret numero quodam integro p, esset $\frac{n \times n}{m} = pm =$ nume-

ro quodam integro. Ergo $n \times n$ debet esse talis numerus, qui dividi potest per numerum m absque residuo. Sed numerus m non dividit numerum n absque residuo *per hypotesin*. Proinde numerus m ipse debet esse productum ex duobus factoribus r et s , quorum unus r divideret unum factorem n absque residuo et alter s alterum factorem n . Sed unus factor n cum altero idem est. Proinde uterque factor r et s , tam unum, quam alterum factorem n divideret, et ideo ipse numerus m esset factor ipsius n eundem absque residuo dividens *contra hyp.* Ergo quadratum $\frac{n \times n}{m \times m}$ non potest esse numerus integer.

COR. I. Si igitur radix quadratica numeri integri non sit numerus integer, eadem nec fractio vera erit, nec integer cum adjuncta fractione vera. Si enim radix foret fractio vera, etiam quadratum esset fractio vera: si autem radix foret integer cum adjuncta fractione vera, etiam quadratum ejusmodi numerus foret, utrumque *contra hyp.*

COR. II. Radix quadratica non aliud est, nisi terminus medius geometrice proportionalis inter unitatem et quadratum. Si igitur quadratum sit numerus integer cujus radix non est numerus integer, radix quadratica unitati illi incommensurabilis est, et proinde ipsa est numerus irrationalis.

§. 44.

Datis duobus numeris A et C invenire medium geometricae proportionalem.

SOL. Dati numeri A et C multiplicentur in se invicem, atque ex producto extrahatur radix quadratica, quae erit medius proportionalis quaesitus.

DEM. In omni proportionem geometrica continua $A : B = B : C$ est $A \times C = B \times B$. Proinde $B = \sqrt{A \times C}$.

§. 45.

Si dentur duae proportionēs geometricae, atque termini earum ordine in se invicem multiplicentur vel dividantur; facta vel quoti iterum erunt in proportione geometrica.

DEM. Proportionum $A : nA = B : nB$ et $C : mC = D : mD$ terminis ordine in se invicem multiplicatis habetur $A \times C : n \times m \times A \times C = B \times D : n \times m \times B \times D$; divisus vero terminis hisce ordine in se invicem, invenitur

$$\frac{A}{C} : \frac{n}{m} \times \frac{A}{C} = \frac{B}{D} : \frac{n}{m} \times \frac{B}{D}. \quad \text{U.}$$

tramque harum proportionum veram esse, patet ex (§. 38. Cor.).

COR. Hinc et plurium, quam duarum proportionum terminis ordine in se invicem multiplicatis, facta erunt in proportione geometrica.

§. 46.

Rationem geometricam, quae ex quocunque aliis in numeris datis $K : L$, $M : N$, $O : P$, etc, componitur, per duos numeros exprimere.

SOL. Multiplicentur datarum rationum termini ordine in se invicem, et facta erunt in ratione composita ex rationibus datis.

DEM. Si fuerit $A : B = K : L$

$B : C = M : N$

$C : D = O : P$, etc.

erit ratio $A : D$ composita ex rationibus $K : L$, $M : N$, $O : P$, atque $A \times B \times C : B \times C \times D = K \times M \times O :$

$L \times N \times P$ (§. praec. Cor.). Est vero $A \times B \times C : B \times C \times D = A : D$ (§. 17.). Ideo $A : D = K \times M \times O :$

$L \times N \times P$.

§. 47.

Series est numerorum communi quadam lege se se consequentium multitudo. Series in qua numerus quilibet antecedens ad consequentem est in eadem ratione

P

arith-

arithmetica dicitur *Series* five *Progressio Arithmetica*. Series in qua antecedens numerus quilibet ad consequentem est in eadem ratione geometrica vocari solet *Series* f. *Progressio Geometrica*.

COR. I. Series arithmetica datur dato quocunque terminorum ipsius cum denominatore rationis ad terminum proximum. Addendo enim hunc denominatorem ad terminum datum vel subtrahendo, series utrinque, quousque lubet, potest continuari.

COR. II. Series geometrica datur, dato quolibet ipsius terminorum et ratione ejus ad proximum. Tum enim terminus dato proximus potest reperiri et hoc reperto proximus per §. 37.

§. 48.

Quodsi series numerorum A, B, C, D, E, F, G, H, I, etc. fuerit geometrica, et ratio A : B concipiatur ut simplex, erit A : C duplicata A : D triplicata, A : E quadruplicata, A : F quintuplicata, etc, rationis A : B; atque tum concipi potest numerus exprimens, quomodo ratio numeri A ad terminum quemcunque progressionis ex simplici A : B est composita. Dependet autem magnitudo hujus numeri a ratione, quae ut simplex concipitur. Nimirum, si ratio A : B concipiatur ut simplex, erit is numerus in ratione A : C, = 2, in ratione A : D, = 3, in ratione A : E, = 4, etc. Si vero ratio A : D concipiatur ut simplex, erit is numerus in ratione A : G, = 2, et in ratione A : K = 3, ficque porro. Unde sub hac hypothese numerus exprimens, quomodo ratio A : B, vel A : F, vel alia similis ex simplici A : D componatur, non potest esse, nisi numerus fractus. Vocatur autem is numerus exprimens, quomodo ratio quaecunque geometrica, ut A : F, ex assumpta simplici componatur *Logarithmus illius rationis* A : F atque si A fuerit unitas, logarithmus rationis 1 : F etiam dici solet *Logarithmus numeri* F.

COR.

COR. I. Sumatur progressio numerorum geometrica quaecunque ab unitate incipiens e. gr. ea 1 10. 100. 1000. 10000. 100000, etc. atque ratio 1 : 10 concipiatur ut simplex, erit Logarithmus unitatis = 0, Logarithmus numeri 10 = 1, Logarithmus numeri 100 = 2, Logarithmus numeri 1000 = 3, numeri 10000 = 4, numeri 100000 = 5, etc. Jam vero ultro patet, Logarithmum numeri integri denario minoris, fore numerum fractum unitate minorem, logarithmum numeri centenario minoris et denario majoris fore numerum fractum unitate majorem sed numero 2 minorem et ita porro.

COR. II. Quodsi non ratio 1 : 10 sed alia atque alia concipiatur ut simplex, etiam pro eodem numero invenitur Logarithmus alius atque alius, ita, ut totum systema logarithmicum dependeat a magnitudine numeri, cujus logarithmus est unitas, qui eam ob causam vocatur *Basis Logarithmica*.

COR. III. Quodsi seriei geometricae P,
P. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. etc.
L. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8,
ratione quacunque, ut 1 : 2, pro simplici assumpta, adscribantur logarithmi L, logarithmus rationis quorumvis terminorum seriei P invenitur subtracto logarithmo prioris termini a logarithmo posterioris. Sic erit e. g. $l. (8 : 128) = l. 128. - l. 8 = 4$.

§. 49.

Tabulae Logarithmorum vulgares exhibent logarithmos numerorum naturalium ab 1 ad 10000 pro base 10 computatos. Calculus vero, cujus ope sunt reperti, non in Mathesi Elementari sed Sublimiori est explicandus. A Briggrio quidem et Vlacquo constructae sunt tabulae calculo admodum operoso, postea autem in Mathesi Sublimiori eximia inventa sunt compendia, quorum ope logarithmi multo expeditius supputari possunt.

Notari autem meretur, ex §. 48. Cor. 1. quod logarithmi omnium numerorum praeter eos, qui in serie geometrica 1. 10. 100. 10000. etc. occurrunt, in fractionibus decimalibus exhibeantur, adeoque numerorum inter 1 et 10 contentorum logarithmi intra limites 0 et 1, numerorum inter 10 et 100 contentorum logarithmi intra limites 1 et 2, et ita porro, contineantur, ita ut logarithmus quisque constet ex numero integro et fractione decimali. Ille numerus integer vocari solet *Characteristica*; fractio decimalis autem *Mantissa*.

COR. Characteristica igitur unitate deficit a numero notarum simplicium, quibus constat numerus logarithmo respondens.

§. 50.

In eodem systemate logarithmico rationes, quarum logarithmi aequales sunt, ipsae sunt aequales: rationes vero inaequales sunt, quorum logarithmi sunt inaequales.

DEM. 1) Sint Logarithmi rationum $A : E$ et $F : K$ aequales, e. g. $= 4$, et inter A et E pariter atque inter F et K quatuor intercedent rationes simplices, quae omnes erunt aequales. Adeo si fuerint rationes $A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$ illae, quae inter A et E intercedunt, atque rationes inter F et K intercedentes istae $F : G$, $G : H$, $H : I$, $I : K$; erit

$$A : B = F : G$$

$$B : C = G : H$$

$$C : D = H : I$$

$$D : E = I : K,$$

unde sequitur esse $A : E = F : K$ (§. 175. Cor. Geom.).

2) Si praeterea logarithmus rationis $A : E$ fuerit 4, et logarithmus rationis $F : I$ fuerit 3; ratio $A : E$ componitur ex quatuor rationibus aequalibus, ratio autem $F : I$ tantum ex tribus, quae figillatim sumtae prioribus figillatim sumtis aequales sunt. Ideo rationes $A : E$ et $F : I$ aequales esse nequeunt.

COR,

COR. In eodem igitur systemate logarithmico aequalium rationum aequales sunt logarithmi. Si enim inaequales fuerint logarithmi, etiam rationes essent inaequales, *contra hyp.*

§. 51.

Datis logarithmis trium numerorum invenire logarithmum numeri quarti proportionalis.

SOL. Dati sint logarithmi lA , lB , lC numerorum A , B , C , sitque reperiendus numeri quarti proportionalis D logarithmus: dico fore $lB + lC - lA = lD$.

DEM. Logarithmus rationis $A : B$ est $lB - lA$ et logarithmus rationis $C : D$ est $lD - lC$ (§. 48. Cor. 3.) Ponitur autem $A : B = C : D$, ideo est $lB - lA = lD - lC$ (§. 50. Cor.) et proinde $lB + lC - lA = lD$ (§. 21. Geom.).

COR. I. Si fuerit $A = 1$, erit $lA = 0$, ideoque $lD = lB + lC$. Tum vero est $D = B \times C$: ideo logarithmus facti invenitur, si factorum logarithmi addantur.

COR. II. Deinde si fuerit $B = 1$, est $lB = 0$, atque ideo $lD = lC - lA$. Sed sub hac hypothese est $D = \frac{C}{A}$, proinde logarithmus quoti invenitur subtractione logarithmi divisoris a logarithmo dividendi.

COR. III. Quia est quadratum numeri $A = A \times A$ et $l. A \times A = lA + lA = 2lA$; erit logarithmus quadrati duplum logarithmi radicis, hincque logarithmus radicis logarithmi quadrati dimidium. Patet ex his modus ope logarithmorum extrahendi radicem quadraticam.

§. 52.

Invenire numerum respondentem logarithmo, qui in tabulis accuratus non occurrit, non autem major est iis, qui in tabulis continentur.

SOL. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime maiore, itemque a logarithmo dato. Tum vero iuferatur: Ut differentia prior ad differen-

tiam secundam, sic 1 ad numerum inveniendum et numero, qui logarithmo proximo minori in tabulis respondet addendum, ut habeatur numerus *proxime verus*, cui logarithmus datus respondet. Dico numerus *proxime verus*, differentiae enim logarithmorum differentiis numerorum exacte proportionales non sunt; ad praxin tamen, ubi errores haud sensibiles negliguntur, methodus tradita sufficit.

EXEMPLVM. Quaerendus sit numerus respondens logar. 2, 1758774, erit logarithmus proxime major 2, 1760913, et proxime minor 2, 1731863, proinde differentia prima 26050, et differentia secunda 26911; praeterea numerus logarithmo proxime minori respondens 149, ideo concludendo $29050 : 26911 = 1, 0000 : 0, 9264$, erit numerus quaesitus 149, 9264.

COR. Patet simul ex solutione problematis, qualis operatio sit instituenda, si quaeratur logarithmus conveniens numero integro cum adnexis fractionibus decimalibus, si major non sit numero 10000. Quaerendus nimirum est logarithmus integri illius ex tabulis, isque a logarithmo proxime maiore subtrahendus, tum vero est concludendum: ut 1 ad fractionem decimalem integro dato adnexam, ita differentia logarithmorum inventa ad numerum logarithmo minori addendum, ut prodeat logarithmus quaesitus proxime verus.

EXEMPLVM. Quaerendus sit logarithmus respondens numero 149, 9264, erit numeri integri 149 logarithmus 2, 1731863, et logarithmus proxime major 2, 1760913, differentia eorum 29050, hinc inferendo, $1 : 0, 9264 = 29050 : 26911$, erit logarithmus quaesitus 2, 1758774.

Tabularum logarithmicarum amplissimus usus in contrahendis calculis numericis ex his satis elucet, eo quod ex eiusmodi tabulis non solum dati cujuscunque numeri logarithmus, sed etiam cujuscunque logarithmi propositi numerus conveniens reperiri potest. Verum
tamen

tamen in praxi propositus esse potest numerus major numero 10000, cujus proinde logarithmus in Tabulis Vulgaribus non prostat: prodit quoque, calculo propositi problematis ad finem perducto, saepius logarithmus numero 4 major, cujus logarithmi numerus conveniens pariter in Tabulis vulgaribus frustra quaeritur. Haec est ratio, cur duo adhuc solvenda sunt problemata, quae sequuntur.

§. 53.

Invenire logarithmum convenientem numero majori iis, qui in tabulis vulgaribus exhibentur.

SOL. 1. Quaerantur numeri maximo tabulae minores, quorum in se invicem multiplicatione numerus propositus produci potest. Logarithmi ejusmodi factorum ex Tabula excerpti addantur, et summa erit logarithmus quaesitus. (§. 51. Cor. 1.) Sit e. gr. propositus numerus 36480, qui oritur ex multiplicatione numerorum 304 et 120, quaeratur logarithmus utriusque, eorum summa est logarithmus numeri 36480.

2. Si propositus numerus ita in factores integros non est resolubilis vel non cogniti sint factores eum producentes, dividatur is per numerum 10, vel 100, vel 1000, vel 10000 etc., ut prodeat quotus numero 10000 minor, qui erit numerus integer cum adjunctis fractionibus decimalibus. Quaeratur hujus numeri logarithmus, (§. 52. Cor.) logarithmo invento addatur logarithmus illius numeri, per quem facta est divisio, et summa erit logarithmus quaesitus (§. 51. Cor.).

EXEMPLVM. Quaerendus sit logarithmus numeri 3567894. Quotus, qui prodit hoc numero per 1000 diviso, erit 3567, 894. Hujus numeri logarithmus secundum §. 52. Cor. quaesitus est 3, 5524118. Si igitur eidem addatur logarithmus numeri 1000, qui est 3, habetur 6, 5524118 pro logarithmo quaesito.

§. 54.

Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, quos Tabulae Vulgares exhibent.

SOL. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, etc. donec relinquatur logarithmus ultimo tabulae minor. Quaeratur numerus ei respondens per §. 52, qui multiplicatus per numerum, cujus logarithmus a dato fuit subtractus, dabit numerum quaesitum (§. 51. Cor. 1.).

EXEMPLVM. Quaerendus sit numerus respondens logarithmo 7, 7589982. Subtrahatur ab eo logarithmus numeri 10000, qui est 4, erit residuum 3, 7589982. Numerus, qui huic logarithmo respondet, est 5741, 14, ideoque numerus quaesitus est $5741, 14 \times 10000 = 57411400$.



SECTIO V.

BREVIS INTRODVCTIO IN ARITHMETICAM PRACTICAM.

§. 55.

Explicatae huc usque sunt operationes praecipuae, quibus ex datis numeris et datis relationibus eorundem ad incognitos, ipsi incogniti inveniuntur. Sed ipsas relationes quantorum ad alia quanta docere, non est Arithmetici. Repetendae sunt istae relationes quantorum ex aliis disciplinis, in quibus quaelibet quantitatum genera speciatim exponuntur, atque ab eo demum adplicari potest Arithmetica, qui easdem disciplinas habet perspectas. Multae tamen harum rationum et solo sensu communi perspiciuntur: aliae ab arbitrio hominum pendent, vel

vel a pactis et legibus, quae omnia cum negotiis in vita communi expediendis adeo connexa sunt, ut a nemine ferre ignorentur. Atque huiusmodi exempla quaedam adferamus, praegustum quendam adplicationis Arithmetices Mathefeos Studiosis suppeditaturi.

§. 56.

Quantum aliquod per numerum expressum per alium exprimere numerum, cujus unitates ab unitatibus prioris numeri diversae sunt.

SOL. Cognitum esse debet, quot unitates prioris generis aliquem numerum unitatum posteriorum producant, ex quo ratio ipsarum unitatum colligitur. Sint unitates A et B, atque si 5A efficiant 7B erit $5A = 7B$, id est $A : B = 7 : 5$ (§.37. Cor.3.). Deinde si dentur 36A et quaeratur quot unitates B sint ipsis 36A aequales; numerus quaesitus unitatum B denotetur littera x et habebitur $36A = xB$, unde fit $B : A = 36 : x$, proinde $x =$

$$\frac{A}{B} \times 36 = \frac{7}{5} \times 36, \text{ quia } \frac{A}{B} = \frac{7}{5} \text{ per antecedentia.}$$

EXEMPLA.

Si pecuniae summa expressa per numerum thalerorum, qui in ea continetur, exprimenda sit per numerum florenorum; cognitum esse debet, quot thaleri efficiant determinatum numerum florenorum. Constat vero, 2 thaleros efficere 3 florenos, ergo est $2 \text{ th.} = 3 \text{ fl.}$, et $\text{th.} : \text{fl.} = 3 : 2$. Si igitur quaeratur, quot floreni sint 31 thaleri, ponatur $31 \text{ th.} = x \text{ fl.}$, erit $\text{fl.} : \text{th.} = 31 : x$, et cum $\text{fl.} : \text{th.} = 2 : 3$ inferatur $2 : 3 = 31 : \frac{31 \times 3}{2} = \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2} \text{ fl.}$

Si dentur 136 fl. et quaeratur, quot efficiant thaleros, ponatur $136 \text{ fl.} = x \text{ th.}$ eritque $\text{th.} : \text{fl.} = 136 : x$, id est $3 : 2 = 136 : \frac{136 \times 2}{3} = \frac{272}{3} = 90\frac{2}{3} \text{ fl.}$

P 5

Dantur

Dantur 397 grossi, quaeritur quot sint thaleri. Cum 24 grossi efficiant 1 thalerum, erit primo $24 \text{ gr} = 1 \text{ th}$, proinde $\text{gr} : \text{th} = 1 : 24$. Deinde ponatur $397 \text{ gr} = x \text{ th}$, et erit $\text{th} : \text{gr} = 397 : x$, ergo inferatur $24 : 1$

$$= 397 : \frac{397}{24} = 16 \frac{13}{24} \text{ thal.}$$

Dantur 238 thaleri, quaeritur, quot sint grossi. Ponatur $238 \text{ th} = x \text{ gr}$, erit $\text{gr} : \text{th} = 238 : x$. Inferatur itaque $1 : 24 = 238 : 238 \times 24 = 5712 \text{ grossi}$.

Ita quoque in aliis similibus casibus procedendum est. Si v. g. quantitas secundum aliquam mensuram mensurata exprimenda sit per aliam mensuram a priori diversam; cognita esse debet ratio mensurarum. Sit p pes parisius et r pes rhenanus, erit $p : r = 14400 : 13913$. Si igitur aliqua longitudo mensurata sit secundum pedem parisiinum, et horum pedum contineat 328, quaeraturque, quot contineat pedes rhenanos; ponatur $328 p = x r$ erit $r : p = 328 : x$, vel $13913 : 14400 = 328 : x = \frac{14400 \times 328}{13913}$. Atque ex his alii casus hisce similes satis promte resolvuntur.

§. 57.

Data fractione invenire aliam datae aequalem, cujus denominator datus est.

SOL. Fractionum aequalium denominatores ad numeratores eandem habent rationem. Si igitur datae fractioni alia aequalis reperienda sit, cujus denominator est datus; inferatur ut denominator fractionis datae ad ipsius numeratorem, sic denominator datus ad numeratorem quaesitum.

EXEMPLA.

Dantur $\frac{3}{5}$ thal. quaeritur, quot sint grossi. Cum thalerum dividamus in 24 grossos, inferatur $5 : 3 = 24 :$

$$\frac{24 \times 3}{5} = \frac{72}{5} = 14 \frac{2}{5} \text{ grossi.}$$

Dan-

Dantur $\frac{2}{5}$ gross. quaeritur quot sint obuli. Grossum dividimus in 12 obulos. Ideo erit $5 : 2 = 12 :$

$$\frac{12 \times 2}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ obul.}$$

Dantur $\frac{7}{8}$ fl. quaeritur, quot sint asses. Asses 32 faciunt unum florenum. Proinde $8 : 7 = 32 :$

$$\frac{32 \times 7}{8} = \frac{224}{8} = 28 \text{ ass.}$$

§. 50.

Numeros ex diversis unitatibus compositos addere.

SOL. Addantur numeri dati unitatum earundem; atque summa exprimatur in maximis, quantum fieri potest, unitatibus.

	Thal.	Gross.	Obul.	
	15	23	9	} add.
	100	17	5	
	17	21	0	
	5	6	2	
Summa	137	67	16	
five	139	20	4	

§. 59.

A numero ex unitatibus diversorum generum composito subtrahere alium ejusmodi numerum.

SOL. Subtrahantur omnes ejusmodi numeri partes ab omnibus partibus alterius cum prioribus homogeneis; atque si aliqua partium numeri minoris parte respondente numeri majoris major sit, resolvatur aliqua unitatum proxime majorum in unitates minores.

	Thal.	Gross.	Obul.	
	18	3	9	} subtr.
	7	18	5	
Different. 10		9	4	

§. 60.

§. 60.

Numerum ex diversis unitatibus compositum per alium multiplicare.

SOL. Multiplicentur partes numeri dati per datum multiplicatorem seorsim. Tum vero factum exprimat per unitates, quantum fieri potest, maximas.

	Thal.	Gross.	Obul.
	5	16	7
			8 Multipl.
Factum	40	128	56
vel	45	12	8

§. 61.

Datum numerum, qui ex unitatibus diversorum generum componitur, per alium dividere.

SOL. 1. Quaelibet pars numeri seorsim dividatur per datum divisorem, incipiendo ab unitatibus maximis. Atque si alicubi maneat residuum, fractiones, quae inveniuntur, reducantur ad alias ipsis aequales ejusmodi denominationum, ut unitatibus proxime minoribus possint addi, sicque pergendo divisio per partes institui.

	Thal.	Gross.	Obul.
	19	13	2
divid.	5		
Quotus	$3\frac{4}{5}$	$2\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
vel	3	12	$2\frac{4}{5}$

2) Ad evitandas fractiones praestat fere, prius omnes dividendi partes in minimas unitates resolvere. Tum enim instituta divisione iterum quotus exprimi potest in maximis, quantum fieri potest, unitatibus.

Sic 19 thal. 13 gross. 2 obul. = 5630 obulis.

Est vero $\frac{5630}{5}$ obul. = 1126 obul. = 3th. 12gr. $2\frac{4}{5}$ ob.

§. 62.

§. 62.

Regula trium directa.

Iis quae huc usque exposita sunt perspectis facili negotio resolvi possunt omnia ista problemata, quae eo reducuntur, ut datis tribus numeris reperiendus sit quartus proportionalis. Sic pretia rerum earundem plerumque sunt uti ipsae rerum quantitates; mercedes operarum sunt vel uti tempora, quibus laboratum est, vel uti quantitates operum. Ideo per regulam proportionum ex datis duarum mercium quantitatibus, et pretio unius reperietur pretium alterius; ex duobus similium mercium pretiis, et quantitate unius habebitur quantitas alterius, et sic in reliquis. Ita si alicujus mercis 5 ℥ veneant thaleris 13, et quaeratur quanti veneant

17 ℥ , reperietur quartus proportionalis $\frac{17 \times 13}{5} = 44$

$\frac{1}{5}$ numerus thalerorum quaesitus.

Effectus a similibus causis temporibus aequalibus praestiti sunt uti causae, et si causae sint aequales, uti tempora. Si 17 operarii transferant aquae mensuras 39 certo aliquo tempore, quaeratur quae, quot requirantur operarii ad mensuras 87 eodem tempore per eandem

viam transferendas, invenietur eorum numerus $\frac{87 \times 17}{39}$

$= 37$ vel 38 . Si aliquis operariorum numerus transferat aquae mensuras 87 tempore 2 horarum, et quaeratur, quot aquae mensuras idem operarum numerus per eandem viam transferre possit tempore 5 horarum, fiet

quartus proportionalis $\frac{87 \times 5}{2} = 217\frac{1}{2}$, qui erit nu-

merus mensurarum quaesitus.

§. 63.

Regula trium inversa.

Saepe termini proportionis, quam problema continet, homologi sibi invicem ita non respondent, ut

ut v. g. merces et pretia, qui casus obtinet, quando duae quantitates sunt ut duae aliae reciproce. Arithmetica ipsa non tradit regulas ex quibus dijudicari potest, ubi iste casus habeat locum, sed ex notionibus rerum et earum relationibus ipsis aliunde cognitis illud dijudicari debet. Sic si effectus sunt iidem, tempora, quibus praestantur, sunt uti causae inverse. Si v. g. 6 homines transferant 100 mensuras aquae tempore 4 minutorum ut eadem quantitas tempore 2 minutorum transferatur, requirentur bis sex sive 12 homines. Per haec solventur hujus generis quaestiones omnes.

Homines 30 diebus 40 effodiunt certam terrae quantitatem. Quaeritur, quot homines eandem quantitatem terrae effodiunt, tempore 15 dierum. Infero

$15 : 40 = 30 : \frac{40 \times 30}{15} = 80$, qui erit numerus hominum quaesitus.

§. 64.

Regula quinque.

Proponi quoque saepius possunt ejusmodi problema, ubi ex datis quinque numeris reperiendus est sextus ita quidem, ut quintus sit ad sextum in ratione composita ex rationibus primi ad secundum et tertii ad quartum. Sic usurae aequalium fortium sunt in ratione temporum, quibus fortes illae commodatae sunt: si vero tempora sunt aequalia, inaequalium fortium usurae sunt uti fortes. Proinde horum computus per *regulam trium* absolvitur. Si autem tempora et fortes sint inaequales, ac verbi gratia 330 thaleri tempore 17 mensium dent usuram 15 thalerorum, quaeraturque, quantum usurae reddituri sint 500 thaleri commodati 30 mensibus; ponatur usura, quam 500 thaleri reddunt tempore 17 mensium aequalis n et usura quaesita sit x , erit

$$330 \text{ thal.} : 500 \text{ thal.} = 15 : n$$

$$17 \text{ mens.} : 30 \text{ mens.} = n : x$$

Usura

Usura igitur data 15 est ad usuram quaesitam x in ratione composita ex rationibus fortium et temporum, et proinde hæc ratio aequalis est rationi factorum ex fortibus per tempora, atque in hoc casu $330 \times 17 : 500 \times 30$

$$= 15 : x, \text{ et proinde } x = \frac{500 \times 30 \times 15}{330 \times 17} = 40 \frac{20}{187}$$

thal..

Simili modo plura hujus generis problemata solvuntur. Homines 36 transferunt aquae mensuras 80 tempore 25 minutorum. Quaeritur quot aquae mensuras transferre possint homines 50 tempore 40 minutorum. Ponatur aquae quantitas, quam homines 36 possunt transferre tempore 40m. aequalis n , et quaesita quantitas sit x , erit iterum

$$25 \text{ min.} : 40 \text{ min.} = 80 \text{ mens.} : n$$

$$36 : 50 = n : x$$

$$\text{erit } x = \frac{40 \times 50 \times 80}{25 \times 36} = 177 \frac{2}{9}.$$

§. 65.

Regula septem, novem, etc.

Sic quoque saepenumero ex datis septem numeris reperiendus est octavus, ut sit septimus ad octavum in ratione composita ex rationibus primi ad secundum, tertii ad quartum, quinti ad sextum; vel ex datis novem numeris decimus, ut sit nonus ad decimum in ratione composita ex rationibus primi ad secundum, tertii ad quartum, quinti ad sextum, septimi ad octavum, et ita porro. Quando vero ejusmodi casus locum habeant, id ex conditionibus problematis eruendum est, et ipsis relationibus datorum quatorum aliunde cognitiss. Sit proposita haec quaestio. Sors 3300 imperialium reddit tempore 18 mensium usuram 180. Sors autem 5000 commodata est 30 mensibus simili usura. Hujus sortis usura cum solvenda est, arbitrio judicis vel pacto reducitur eo, ut pro 5 imperialibus tantum solvendi sint 4.

Quod

240 AR. ELEM. SECT. V. BREVIS INTRODVCTIO

Quod ita solvitur, intra fratrem et sororem sic dividendum est, ut ex tribus partibus duas accipiat frater. Quaeritur pars fratris?

Inferendum est $3300 : 5000 = 180 : m$

$$18 : 30 = m : n$$

$$5 : 4 = n : p$$

$$3 : 2 = p : q,$$

erit m usura fortis 5000 tempore 18 mensium, n usura ejusdem fortis tempore 30 mensium, p usura haec sententia judicis vel pacto ad minorem quantitatem reducta, q pars ejus, quam accipit frater. Erit igitur $q =$

$$\frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3} = 242 \frac{14}{33}.$$

Ad abbreviandum calculum conducit, si numerus q primum in modum fracti ita scribatur, ut factum est. Quolibet enim factorum, qui in numeratore hujus fracti insunt, per aliquem numerum diviso, qui et aliquem eorum factorum dividit, qui sunt in denominatore, multiplicationes contrahentur, fientque saepe admodum faciles. Sic divisus 5000 et 3300 per 100, inveniuntur numeri 50 et 33, deinde divisus 50 et 5 per 5, prodeunt 10 et 1. Porro divisus 180 et 18 per 18, iterum habentur 10 et 1. Denique divisus 30 et 3 per 3 pari ratione invenitur 10 et 1.

His factis fit
$$\frac{10 \times 10 \times 4 \times 2 \times 10}{33 \times 1 \times 1 \times 1} = \frac{8000}{33}$$

$$242 \frac{14}{33}.$$

§. 66.

Possunt in ejusmodi problematum solutionibus quilibet analogiae, ut in praecedenti casu $3300 : 5000 = 180 : m$ separatim solvi et quaeri numerus m . Sicque deinde solvenda erit analogia $18 : 30 = m : n$, et quaerendus erit numerus n , sicque porro. Verum methodus in antecedentibus descripta brevior est, et ideo huic praefertur. Vocatur a quibusdam haec methodus *regula catenaria*

naria (die kettenregel). Atque haec methodus in multis aliis casibus magno cum fructu applicatur, veluti in comparatione monetarum, mensurarum, ponderum etc, quarum ratio datur mediantibus aliis hujus generis quantitibus. Sic ex datis 16 gross = 1 fl. 3 fl = 2 thal, 11 thal. = 4 duc. quaeritur quot grossi efficiant ducatum?

$$\begin{array}{lcl} \text{Erit} & \text{gross} : \text{flor.} & = 1 : 16 \\ & \text{flor} & : \text{thal} = 2 : 3 \\ & \text{thal} & : \text{ducat} = 4 : 11 \end{array}$$

Proinde gross : ducat = $1 \times 2 \times 4 : 16 \times 3 \times 11 = 8 : 528 = 1 : 66$, et ideo 66 gross = 1 ducat.

§. 67.

Datum numerum quendam a secare in aliquot partes, ita ut istae partes sint inter se in data ratione.

SOL. Secandus sit numerus a verbi gratia in 3 partes x, y, z , ita quidem, ut hi numeri x, y, z , sint inter se, ut numeri dati f, g, h . Inferendum est $f : g = x : y$, proinde $f + g : g = x + y : y$ et $f + g : x + y = g : y$. Praeterea est $y : z = g : h$ (per cond. probl.) vel $g : y = h : z$, ergo $f + g : x + y = h : z$ vel $f + g : h = x + y : z$, et $f + g + h : h = x + y + z : z$, $f + g + h : x + y + z = h : z = g : y = f : x$. Cum igitur sit $x + y + z = a$ (per cond. probl.) fiet $\frac{a \times h}{f + g + h}$

$$= z; \frac{a \times g}{f + g + h} = y; \frac{a \times f}{f + g + h} = x.$$

Si numerus a in plures hujusmodi partes datae rationis sit dividendus, haec ratiocinia continuari posse, ultro patet. Si in duas secandus sit partes x et y , quarum ratio data est $f : g$, est $z = 0$, est $h = 0$.

§. 68.

Regula societatis.

Ad praxes problematis *Sphi praec.* multi referri possunt quaestiones in vita comuni obviae. Sic lucrum

Q

cujus-

cujusque fociorum, qui ad fortem quandam aliquam contulerunt partem, est ad lucrum alterius, sicut se habent summae collatae.

Tres mercatores A, B et C contulerunt ad fortem quandam sequentes summas

$$A \ 1000 \text{ thal.} = f$$

$$B \ 700 = g$$

$$C \ 900 = h$$

$$2600 = f + g + h$$

Lucrum est 1500 thal = $x + y + z = a$; erit

$$2600 : 1500 = 1000 : x$$

$$\text{vel } 26 : 15 = 1000 : x = \frac{15 \times 1000}{26} = 576 \frac{12}{13}$$

$$= 700 : y = \frac{15 \times 700}{26} = 403 \frac{11}{13}$$

$$= 900 : z = \frac{15 \times 900}{26} = 510 \frac{3}{13}$$

§. 69.

Regula alligationis.

Alia praxis est, ubi quaeritur, quot materiae simplicis in datam massam compositam ingrediatur, si ratio simplicium data fuerit. Sic ad *pulverem pyrium* componendum ad 1000 lb Nitri requiruntur 6 L. carbonum et 4 L. Sulphuris. Quaeritur quot cujuslibet materiae simplicis requirantur ad 1000 lb Pulveris pyrii. Erunt rationes nitri, carbonum et sulphuris datae 32 L, 6 L, 4 L, vel quod idem est 16, 3, 2, ut sit $f = 16$, $g = 3$, $h = 2$, et $f + g + h$

$$= 21, \text{ erit } x = \frac{16000}{21} = 761 \frac{19}{21}, y = \frac{3000}{21}$$

$$= 142 \frac{6}{7}, z = \frac{2000}{21} = 95 \frac{5}{21}.$$

§. 70.

§. 70.

Regula falsi.

Sunt et alii modi ejusmodi problemata solvendi, ubi nimirum ex falso pro arbitrio assumpto eruitur verum quaesitum. Atque hic quidem tribus praeceptis omne negotium absolvitur. Primum est, ut is numerus ponatur verus esse, qui aptus videtur. Secundum, ut examinetur, an actu fuerit is, quem problema postulat. Tertium, ut ope regulae proportionum eruatur verum. In exemplo res clara erit.

Sit numerus 100 dividendus in tres partes, quarum prima sit tripla secundae, secunda dupla tertiae. Supponatur illa minima pars esse 2, secunda erit 6, tertia 12. Est vero $2 + 6 + 12 = 20$. Falsa igitur est suppositio.

Jam vero concluditur $20 : 2 = 100 : \frac{100 \times 2}{20} = 10 =$

parti minimae, cujus triplum est 30, hujusque duplum 60, est vero $60 + 30 + 10 = 100$.

Sunt et modi, quibus ex duobus suppositis falsis verum eruitur, quibus explicandis hic non immoror, cum Analysis mathematica ejusmodi problemata multo expeditius solvat, quam ipsam eodem hoc libro explico. Qui pluribus exemplis expositas methodos sibi reddere cupit familiares, scriptores practicos consulat.





CALCVLVVS EXTENSORVM.

SECTIO I.

DE

MENSVRATIONE LONGITVDINVM
ET ANGVLORVM PLANORVM RECTILINEO-
RVM, VVLGO DE LONGIMETRIA
ET TRIGONOMETRIA
PLANA.

§. 1.

Mensurare quantum est determinata quadam ipsius parte pro unitate assumpta quantum illud ut numerum exprimere. Pars quanti pro unitate assumpta *Mensura* dicitur.

COR. Mensura quanto mensurando debet esse homogenea. Quantum enim ex heterogeneo tanquam parte componi nequit.

§. 2.

Mensurare lineam rectam.

SOL. Assumatur aliqua ex mensuris receptis, ut *Pes*, isque supra mensurandam lineam aliquoties applicetur. Dividatur pes in decem partes aequales nomine *Pollicum*, et pollex unus iterum in decem partes alias, quae *Lineae* dicuntur. Linea in decem *Scrupulos primos* divisa concipitur, et horum quilibet in decem *Scrupulos secundos*, sicque porro, quod tamen raro opus est, quia scrupuli primi jam fiunt rectae adeo parvae, ut in praxi plerumque negligi queant. Constructa ejusmodi mensurarum scala linea recta data circino capta, eandem
super

super scalam adplicando, satis accurate mensurabitur. Practici scriptores varias explicare solent methodos, quibus admodum exactae construi possunt scalae, qui eum in finem consulendi sunt.

COR. I. Sumto pede pro unitate pollices fiunt partes unitatis decimae, lineae centesimae, scrupuli primi millesimae, secundi decies millesimae et ita porro, unde numerus 5, 8 3 7 sub hac hypothese notabit 5 pedes cum 8 pollicibus, 3 lineis et 7 scrupulis.

COR. II. Pro longioribus lineis mensurandis sumi solet recta decem pedes longa *Decempeda* dicta pro unitate, quo casu numerus 5, 8 3 7 notabit 5 decempedas cum 8 pedibus 3 pollicibus et 7 lineis. Ex quibus facile perspicitur, quomodo legendus sit ejusmodi numerus, si pollex vel linea etc. pro unitate fuerit assumpta.

§. 3.

Mensura aliae mensurae *analog*a est scala mensurarum eodem modo divisa, quo divisa est alia, quae mensura esse supponitur, etsi partes magnitudine differant. Si mensura analogica minor sit mensura, cui analogica est; *Mensura analogica minuta* vocatur.

COR. Mensura alteri analogica facile construitur, assumpta recta quacunque, quae pedi analogica sit, eaque in decem partes divisa pro pollicibus, deciesque repetita pro decempedis, etc. Tum vero rectae A et B atque C et D, si A et C atque B et D secundum mensuras analogas mensuratae per eosdem exprimantur numeros, proportionales sunt; et, si proportionales sint A, B, C, D, atque B et D secundum mensuras analogas mensuratae per eundem exprimantur numerum, etiam A et C per eundem numerum exprimentur, si A eadem cum B et C eadem cum D mensura mensuretur (§. 178. Cor. 2. et 13. Cor. Geom.).

§. 4.

Mensurare angulum planum rectilineum.

Q 3

SOL.

SOL. Pro mensura anguli plani angulus quidam planus determinatae magnitudinis est eligendus. Quinam eligatur, perinde est. Solet hunc in finem summa quatuor rectorum pro unitate assumi et in mensurando angulo explorari, quot partium earum, quae summam hanc constituunt, in angulo dato contineantur. Ex §. 220. Cor. 3. *Geom.* notum est, quod, si ex apice anguli ut centro describatur circulus radio magnitudinis arbitrariae, quatuor anguli recti sint ad datum angulum, uti tota peripheria ad arcum inter crura dati anguli interceptum. Proinde si peripheria sumatur pro unitate in mensurando arcu, hic arcus per eundem exprimetur numerum, in quem evaderet angulus, si quatuor recti sumantur pro unitate. Omnis igitur labor eo redit, ut peripheriam circuli in determinatum numerum partium aequalium divisam cogitemus. Atque in praxi receptum est, ut dividatur in 360 partes aequales, quae *gradus* vocantur. Gradus quilibet dividitur in 60 partes aequales, *minuta prima* dictas; minutum primum iterum subdividitur in 60 *minuta secunda*, et quodlibet eorum in 60 *minuta tertia*, sicque porro pergendo, quoad opus est. Gradus denotari solent, imposito eorum numero signo (o) minuta prima imposito (i) secunda impositis (ii) et ita porro.

P. 153. Jam peripheria in suos gradus et si necesse sit in minuta quoque divisa, adplicetur angulo mensurando ACB ita, ut C centrum peripheriae cadat in anguli apicem, et punctum peripheriae, a quo numeri graduum incipiunt in unum anguli crurium ut AC: quo facto numeratis gradibus minutis primis etc. inter crura interceptis mensura anguli habetur. Si anguli crura in plano ducta sint, instrumento admodum simplici res perficitur, quale figura exhibet, quodque *Instrumentum Transportatorium* appellari solet, prouti et hujus instrumenti ope facile ad datum punctum construitur angulus, cujus mensura in numeris data est.

COR. I. Mensura anguli duobus rectis aequalis est arcus 180 graduum, et mensura anguli recti arcus 90 graduum. Hinc summa omnium angulorum trianguli plani rectilinei in numeris expressa efficit 180 gradus, et datis in ejusmodi triangulo summa duorum angulorum in numeris per calculum invenitur tertius, si datus numerus in gradibus et minutis primis expressus subtrahatur ab 180 gradibus, vel 179 gradibus et 90 minutis primis.

COR. II. In triangulo aequilatero mensura cujuslibet anguli est 60° .

SCHOL. Haec de mensuratione rectarum et angulorum planorum rectilineorum immediata mensurae adplicatione instituenda. In praxi ejusmodi mensurae immediata applicatio raro in potestate est, atque tum magnitudo rectarum linearum et angulorum planorum rectilineorum in numeris expressa ex aliis rectis vel angulis datis, quibus immediate adplicari potest mensura, elicienda est per calculum magno in practicis commodo, cujus regulae jam erunt explicandae.

§. 5.

Quodsi supra diametrum AC centro D descriptus F.206. sit semicirculus ABC, atque in peripheria sumatur punctum F quodcunque, a quo ducta sit ad AC perpendicularis FG, haec FG dicitur *sinus* arcuum AF, FC, in quas peripheriam dividit, ut et angulorum ADF, FDC super hac recta AC sibi contiguorum, qui ab his arcubus mensurantur. Recta FH perpendicularis ad radium DB vel ei aequalis GD, quae est sinus complementi anguli ADF ad angulum rectum, vocatur *Cosinus* ejusdem anguli ADF, et AG hujus anguli *Sinus versus*.

§. 6.

Quodsi ex radii DA puncto extremo A erigatur perpendicularis, ea circum ABC in puncto A tanget (§. 156. Geom.). Producta autem recta DF donec istam tangentem in E secet, AE dicitur *tangens arcus AF* ut et

anguli ADF, cujus mensura est arcus AF. Ducta praeterea NB ad radium DB perpendiculari eaque producta, donec ipsam DE in N fecet, haec BN, quae est tangens anguli BDN complementi ipsius ADF ad angulum rectum, *cotangens arcus* AF vel *anguli* ADF vocari solet. Denique DE dicitur hujus arcus vel anguli *secans* DN vero ejus *coscans*.

§. 7.

Ejusdem anguli sinus, cosinus, sinus versi, tangentes, cotangentes, secantes, coscantes, ad diversos radios relati, sunt inter se ut illi radii.

DEM. Dati anguli ADF mensurae radiis AD = FD et KD = LD descriptae sint AF et KL, sinus ad diversos radios relati FG, LM, cosinus GD, MD, sinus versi AG, KM, tangentes AE, KI, secantes ED, ID. Jam rectae EA, FG, IK, LM sunt parallelae (§. 89. Cor. 1. *Geom.*) proinde $FD : LD = FC : LM = GD : MD$ (§. 202. Cor. 3. *Geom.*). Set et $FD : LD = AD : KD$ proinde $AD - GD : KD - MD = AD : KD$, id est $AG : KM = AD : KD$. Praeterea est $AD : KD = AE : KI = ED : FD$. De contagentibus et coscantibus idem exinde patet, quia sunt tangentes et secantes complementi dati anguli ADF.

COR. Ratio igitur radii ad sinum, tangentem, et quae sunt reliqua, ejusdem anguli eadem prodit, quicumque sumatur radius, ideoque eadem ratio ad quemvis angulum ut per lineas rectas ita et per numeros quantumvis adcuratos exhiberi potest.

SCHOL. Supputatae sunt istae rationes pro omnibus angulis, qui gradibus atque minutis primis mensurantur, in Tabulis, quae *Canonem Sinuum et Tangentium* efficiunt, calculo satis laborioso, quem hic exponere nimis longum foret, quippe qui potius spectat ad Mathefin sublimiorem, quam elementarem.

§. 8.

In triangulo rectangulo EAD est hypotenusa ED ad quem-

quemcunque cathetorum EA , ut Radius ad sinum anguli EDA illi catheto oppositi; et unus cathetorum AD est ad alterum AE ut radius ad tangentem anguli EDA posteriori catheto oppositi.

DEM. Radio quocunque $DL = DK$ describatur anguli EAD mensura KL , ejus sinus LM et tangens KI , atque patet, esse $ED : EA = LD : LM = R : \sin. EDA$; et $AD : AE = KD : KI = R : \tan. EDA$.

COR. Si in triangulo ABC ex apice anguli B ducatur F.205.
 BD ad latus oppositum AC , si opus sit productum, perpendicularis, erit $BD : DA = R : \tan. DBA$, et $BD : DC = R : \tan. DBC$, ideo est $DA : DC = \tan. DBA : \tan. DBC$.

§. 9.

In omni triangulo ABC duo quaevis latera AB , BC sunt inter se, ut sinus angulorum iis oppositorum ad eundem radium relati.

DEM. Quodsi ex B ad latus oppositum AC , si opus sit, productum demissa sit perpendicularis BD , erit $AB : BD = R : \sin. A$, et $BC : BD = R : \sin. C$ (§. 8.). Proinde $AB : BC = \sin. C : \sin. A$ (§. 193. Cor. I. Geom.).

§. 10.

Datis in triangulo plano rectilineo ABC duobus angulis A , B , et uno latere AB in numeris, invenire latera reliqua per calculum.

SOL. Datis duobus angulis A et B in numeris simul habetur mensura anguli tertii C (§. 4. Cor.). Deinde inferatur $\sin. C : \sin. A = AB : BC$ (§. 9.). Cujus analogiae, cum terminus tertius sit datus in numeris, et terminus primus cum secundo habeantur in canone sinuum et tangentium, per calculum invenitur quartus BC ex §. 37. Ar. Invento sic latere BC porro inferatur $\sin. A : \sin. B = BC : AC$, et per similem calculum invenietur mensura lateris AC .

Cum in Canone sinuum et tangentium radius pro unitate sumtus concipiatur in partes 10000000, divisus,

atque ideo numeri harum partium, quibus constant sinus et tangentes arcuum vel angulorum sint admodum prolixi; multiplicatio et divisio in *sol. probl.* instituenda, ut habeatur terminus quartus proportionalis, fit nimis operosa. Ad hunc calculum et alios huic similes abbreviandos computati sunt *logarithmi* sinuum et tangentium in Tabulis vulgaribus, qui sinibus et tangentibus e regione adscripti sunt, quorum usus in solvendis hujusmodi problematibus ex §. 51. seq. *Ar.* perspicitur.

EXEMPLVM. Sit angulus $A = 53^{\circ} 24'$, $B = 60^{\circ} 18'$, eritque $A + B = 113^{\circ} 42'$, et $C = 66^{\circ} 18'$. Præterea sit latus $AB = 171'$: quaerendum sit latus BC per calculum ope logarithmorum. Quia est *sin.* $C : \text{sin. } A = AB : BC$, erit $l. \text{sin. } A + l. AB - l. \text{sin. } C = l. BC$. Logarithmis igitur trium terminorum datorum ex Canone Vulgari excerptis calculus ita erit instituendus.

$$l. \text{sin. } A = 9, 9046168$$

$$l. AB = 2, 2329961$$

$$l. \text{sin. } A + l. AB = 12, 1376129$$

$$l. \text{sin. } C = 9, 9617355$$

$$l. \text{sin. } A + l. AB - l. \text{sin. } C = 2, 1758774$$

$= l. BC$. Logarithmus inventus in Canone vulgari accuratus non occurrit. Invenitur nimirum 2, 1760913 $= l. 150$ justo major, et præcedens 2, 1731863 $= l. 149$ justo minor; quare numerus mensuram lateris BC exprimens major est, quam 149^r sed minor quam 150^r, quod indicio est, latus illud præter 149^r aliquot pollices, lineas, scrupula etc. continere, quae minutiae in praxi saepe negligi possunt, si tamen desiderentur, inveniri possunt ex problemate, quod solutum est §. 52. *Ar.*

§. II.

Datis in triangulo ABC uno angulo A et præterea duobus lateribus AB et BC angulum datum A non comprehendentibus, invenire latus tertium AC .

SOL.

SOL. Generatim anguli omnes trianguli ante debent esse cogniti, quam latera investigari possunt. Quaeri igitur debet angulus C dato lateri AB oppositus, quod fiet, concludendo $BC : AC = \sin A : \sin C$ (§. 9.) et calculo ope logarithmorum instituendo secundum praecepta §phi 10. Invento angulo C simul innotescit magnitudo anguli B, quare porro inferendo $\sin A : \sin B = BC : AC$, invenitur latus quaesitum. Ex §. 86. cum Cor. Geom. notum est, datis angulo A, et lateribus AB et BC eum non comprehendentibus non determinari triangulum unicum, sed indifferenter duo triangula diversa, nisi latus BC angulo dato A oppositum majus sit latere AB angulo A adjacente, vel saltem triangulum sit rectangulum, in quo latus AB dato angulo adjacens est hypotenusa. Idem et calculum hujus problematis reddit dubium, si latus BC latere AB minus est. Potest enim hoc casu angulus C indifferenter acutus vel obtusus esse, quia $\sin C$ per calculum inventus ad hunc aequae ad illum pertinet. (conf. §. 86. Cor. 1. Geom.) nisi inveniatur $\sin C = 10000000$, quo casu angulus C est rectus.

§. 12.

Datis in triangulo aequicruro ABC tribus lateribus sigillatim in numeris, invenire ejus angulos.

SOL. Ex apice anguli A basi oppositi demittatur F.156. AD ad basin BC perpendicularis, quae basin bisecabit et triangulum dividet in duo triangula apud D rectangula et aequalia (§. 94. Cor. 2. Geom.). Dantur ideo in quolibet horum triangulorum ut ABD latera AB et BD praeter angulum rectum D, ex quibus datis inveniuntur reliqui hujus trianguli anguli per Sol. §phi praec. Est vero $B = C$, quare simul omnes trianguli aequicruri ABC anguli sunt cogniti.

§. 13.

Datis in triangulo scaleno ABC omnibus lateribus sigillatim in numeris invenire ejus angulos.

SOL.

P. 157. SOL. Ex apice anguli A lateri maximo oppositi tanquam centro, radio AC, quod laterum minimum est, describatur circulus. Producatur AB donec occurrat peripheriae apud E, ducaturque AD, erit ADC triangulum aequicrurum latus AC et angulum C cum dato ABC communem habens, qui angulus invenitur, si cognita sit mensura basis DC, secundum praecepta *Sphi praec.* Invenitur autem DC sequentem in modum argumentando. Ex §. 203. *Geom.* constat, esse $BC : BE = BF : BD$, hinc reperitur BD ex §. 37. *Ar.* vel ope logarithmorum, si data sint BC, BE, BF in numeris. Sed BC est unum datorum laterum trianguli ABC, $BE = BA + AC$ et $BF = BA - AC$. Proinde quoque BE et BF sunt data. Denique reperta BD, est $DC = BC - BD$. Quaeratur jam angulus C ex §. *praec.* Tuin vero reliqui anguli inveniuntur per Sol. §. 10.

§. 14.

Si semisummae duorum quantorum inaequalium addatur eorundem semidifferentia, invenitur quantum majus: si vero a semisumma subtrahatur semidifferentia, quod praedit, est quantum minus.

DEM. Sit A quantum majus, B vero quantum minus, horumque quantorum differentia = D, erit $A - B = D$, et $A = B + D$. Addatur utrinque B, ut fiat $A + B = 2B + D$, deinde dividatur utrinque per 2,

eritque $\frac{A+B}{2} = \frac{2B+D}{2} = B + \frac{D}{2}$. Ex quo

porro fluit, si utrinque addatur $\frac{D}{2}$, esse $\frac{A+B}{2} + \frac{D}{2}$

$= B + \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = B + D = A$, si vero

utrinque subtrahatur $\frac{D}{2}$, esse $\frac{A+B}{2} - \frac{D}{2} = B +$

$\frac{D}{2} - \frac{D}{2} = B$.

§. 15.

§. 15.

Si A et B denotent duos arcus ejusdem circuli dimidia peripheria minores, vel angulos, qui ab iis acubus mensurantur, atque $\text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ denotet tangentem dimidiaeorum summae pariter ac $\text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ tangentem dimidiaeorum differentiae eorum arcuum vel angulorum, erit $\text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = (\sin. A + \sin. B) : (\sin. A - \sin. B)$.

DE M. Dimidia summa arcuum A et B est vel minor quadrante, vel major. Si prius, in circulo centro C , radio CD descripto sit $DE = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ et $EF = EG = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Ducantur radii FC et EC atque producat FG , donec radium CD productum secet in puncto I . Hoc facto erit CE secans chordam GF in puncto H ipsi perpendicularis (§. 140. Cor. 6. *Geom.*) et proinde in triangulo ICF est $HI : (HF = HG) = \text{tang. } ICH : \text{tang. } HCF = \text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Deinde arcus $DG = DE - EG = (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) - (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = B$, (§. 14.) ideo $GM = \sin. B$. Praeterea arcus $DF = DE + EF = (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) + (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = A$, (§. 14.) proinde $FN = \sin. A$. Quare si per punctum G ducatur recta diametro DP parallela, secans FN in K , erit $FK = \sin. A - \sin. B$. Est vero $GF : GH = 2 : 1 = FK : HL$, ergo $HL = \frac{1}{2}\sin. A - \frac{1}{2}\sin. B$, ideoque $HO = HL + GM = \frac{1}{2}\sin. A - \frac{1}{2}\sin. B + \sin. B = \frac{1}{2}\sin. A + \frac{1}{2}\sin. B$. Denique est $HI : GH = HO : HL$, proinde $\text{tang. } (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : \text{tang. } (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = (\frac{1}{2}\sin. A + \frac{1}{2}\sin. B) : (\frac{1}{2}\sin. A - \frac{1}{2}\sin. B) = (\sin. A + \sin. B) : (\sin. A - \sin. B)$.

Sit posterius, atque vocetur arcus major B minor vero A , et ponatur $PE = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, EF vero vel $EG = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Jam hoc quoque casu est $IH : (HF = GH) = \text{tang. } (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{tang. } (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Est vero $PG = PE + EG = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = B$ (§. 14.) ideoque $GM = \sin. B$. Praeterea $PF = PE - EF = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = A$, proinde $FN = \sin. A$; ideo

et

et in hoc casu est $\text{tang. } (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{tang. } (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) = (\sin. A + \sin. B) : (\sin. A - \sin. B)$.

§. 16.

Datis in triangulo ABC duobus lateribus AC et BC cum angulo C ab hisce lateribus comprehenso, invenire angulos reliquos ut et latus tertium AB.

SOL. 1. Dato angulo C simul datur summa reliquorum $B + A = 180^\circ - C$, et hujus dimidium $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$. Inferatur $AC + BC : AC - BC = \text{tang. } (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{tang. } (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Reperta hoc modo per calculum jam satis cognitum dimidia angulorum quaesitorum differentia erit angulus major $B = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) + (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ et minor $A = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ (§. 14.). Deinde investigabitur latus AB per *sol. §phi* 10.

DEM. In triangulo ABC est $AC : CB = \sin. B = \sin. A$ (§. 10.) ideo $AC + CB : CB = (\sin. B + \sin. A) : \sin. A$, vel $AC + CB : (\sin. B + \sin. A) = CB : \sin. A$. Praeterea $AC - CB : CB = (\sin. B - \sin. A) : \sin. A$, vel $AC - CB : (\sin. B - \sin. A) = CB : \sin. A$ proinde $AC + CB : (\sin. B + \sin. A) = AC - CB : (\sin. B - \sin. A)$ vel $AC + CB : AC - CB : \sin. B + \sin. A : (\sin. B - \sin. A)$ sed est $(\sin. B + \sin. A) : (\sin. B - \sin. A) = \text{tang. } (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{tang. } (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$, ergo et $AC + CB : AC - CB = \text{tang. } (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : \text{tang. } (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$.

SOL. 2. Si triangulum datum fuerit rectangulum, ut ABD, et angulus datus D rectus, quilibet angulorum acutorum ut A separatim calculo breviori inveniri potest, si dati sint catheti AD, et BD, inferendo $AD : BD = R : \text{tang. } A$ (§. 8.). Invento autem angulo A simul inventus est B ejus complementum ad angulum rectum.

§. 16.

Invenire rationem diametri circuli ad peripheriam in numeris proxime veris.

P. 159. SOL. Radius circuli AB divisus concipiatur in partes 10000000, uti in Canone sinuum et tangentium fieri solet.

let. Inscribatur circulo polygonum regulare 1080 laterum, ac totidem laterum polygonum circulo circumscribatur. Sint dimidia polygonorum latera DE et CA, eritque angulus DBA 10 minutorum, DE sinus ejus anguli, CA vero ejus tangens. Jam in Tabulis sinuum invenitur $DE = 29089$ radii partium, et totidem quoque partium invenitur CA, ita ut CA a DE non differat unica radii parte 10000000ma. Proinde latus polygoni inscripti $= 2DE = 58178$, et ejus peripheria $= 58178 \times 1080 = 62832240$. Idem numerus etiamquam proxime exprimit peripheriam polygoni circumscripti, unde tanto magis peripheria circuli erit 62832240 radii partium. Est igitur radii duplum sive diameter ad peripheriam, ut 2, 0000000 ad 6, 2832240 sive ut 1, 0000000 ad 3, 141612, aut in numeris minoribus $= 1, 00 : 3, 14, = 100 : 314$.

COR. I. Hinc data diametro in numeris reperitur peripheria, et data in numeris peripheria reperitur diameter ex §. 37. *Ar.*

COR. II. Dato arcu circuli quocunque per gradus et minuta expresso datur ejus ratio ad peripheriam nimirum 360° . Dato igitur radio et arcu in gradibus expresso, reperta peripheria *per Cor. I.* invenitur longitudo arcus in mensura consueta expressa ex §. 37. *Ar.*

COR. III. Si peripheria fuerit 360 partium, diameter erit partium 114, et radius partium 57. Data igitur longitudine arcus et numero graduum quem continet facile reperitur radii longitudo.

§. 17.

Circuli dati peripheriam in datum numerum partium aequalium dividere.

SOL. Dividatur numerus 360° per datum partium numerum. Ad centrum circuli dati instrumenti transportatorii ope construatur angulus, cujus mensura est quotus jam inventus. Crura hujus anguli determinabunt unam ex partibus peripheriae aliquotis, quae desiderantur.

tur. Reliqua divisio peragitur auferendo arcum inventum a peripheria quoties fieri potest *per* §. 142. Cor. *Geom.*

COR. Hinc habetur solutio mechanica problematis *Sphi* 150. et 158. *Geom.*

§. 18.

Invenire mensuram anguli cujuscunque polygoni regularis per calculum.

SOL. Numerus 360° dividatur per numerum laterum polygoni dati et quotus subtrahatur ab 180° , differentia, quae prodit, est mensura quaesita. Si enim n denotet numerum laterum, est angulus polygoni $= 2R$

$$= \frac{4R}{n} \quad (\S. 202. \text{Cor. 2. } \textit{Geom.}).$$

§. 19.

Super data recta AB construere polygonum regulare dati numeri laterum.

SOL. Quaeratur angulus polygoni dati numeri laterum (§. 18.). Dimidium ejus ope instrumenti transportatorii statuatur ad utrumque extremum A et B lateris AB dati, atque crura AC et BC producantur, donec sese apud C fecerint, quod tandem fiet (§. 96. *Geom.*). Centro C radio CA vel CB describatur circulus, qui erit is cui polygonum desideratum est inscribendum, latere AB peripheriae toties applicando, quoties fieri potest.

DEM. Est angulus CAB — CBA dimidius angulus polygoni, proinde CAB + CBA ipse angulus polygoni $= 2R - \frac{4R}{n}$ (§. 202. Cor. 2. *Geom.*). Quia praeterea

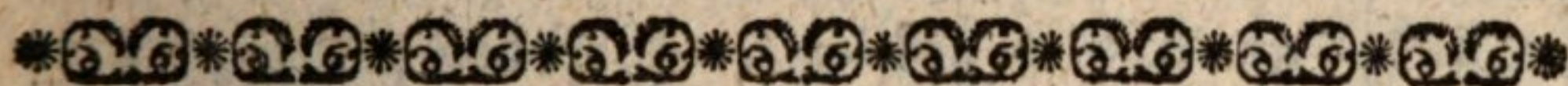
$$\text{CAB} + \text{CBA} + \text{C} = 2R, \text{ erit } 2R - \frac{4R}{n} + \text{C} = 2R, \text{ et}$$

$$\frac{4R}{n} \text{ utrinque addito fit } 2R + \text{C} = 2R + \frac{4R}{n} \text{ adeo-}$$

que

que $C = \frac{4R}{n}$. Sed mensura anguli, qui est $= 4R$, est tota circuli peripheria, quae ponatur $= P$, erit mensura anguli $C = \frac{P}{n} =$ arcui AB.

COR. In hexagono triangulum ACB fit aequilaterum, quod igitur super dato quolibet latere facile constructur.



SECTIO II.

DE

MENSURATIONE SUPERFICIERVM ET SOLIDORVM VVLGO DE PLANI- METRIA ET STEREOMETRIA.

§. 20.

Mensurare Parallelogrammum

SOL. Sit mensurandum parallelogrammum P, cujus basis est B et altitudo A. Pro mensura sumatur quadratum Q, cujus latus est aliqua ex mensuris receptis e. g. *Pes*. Mensuretur basis B parallelogrammi pariterque ejus altitudo A ex *Pede* pro unitate assumpta sitque numerus exprimens basin $= b$, et numerus exprimens altitudi-

nem $= a$, erit $Q : P = \left\{ \begin{matrix} 1 : b \\ 1 : a \end{matrix} \right\}$ (§. 210. Cor. 1. *Geom.*)

vel $Q : P = 1 : a \times b$ (§. 46. *Ar.*). Mensura igitur parallelogrammi habebitur mensurata ejus base et altitudine mensura quadam longitudinum recepta, hisque numeris in se invicem multiplicatis; quod prodit, erit area parallelogrammi expressa in numeris ex quadrato, constructo

structo super ea longitudinum mensura, ex qua basis et altitudo exprimuntur, pro unitate assumto.

COR. I. Area quadrati habetur, si numerus, qui exprimit ipsius latus, per se ipsum multiplicetur, quae ratio est, cur in Arithmetica numerus, qui ejusmodi multiplicatione alterius numeri per seipsum invenitur, *numerus quadratus* vocatus est, et factor in seipsum ductus hujus numeri *radix quadratica*.

COR. II. Cum pes in decempeda decies contineatur, quadratum pedis in quadrato decempedae centies continebitur, quadratum pollicis in quadrato pedis pariter centies, et ita porro, quod probe notandum est in determinandis valoribus numerorum, qui figurarum planarum areas exprimunt.

§. 21.

Mensurae triangulum planum rectilineum.

PROBL. SOL. Datum sit triangulum ABC, cujus basis AB = b , et altitudo CD = a . Quodsi super eadem basi constructum fuerit parallelogrammum ejusdem altitudinis, foret hoc = $a \times b$. Sed triangulum ABC est hujus dimidium, (§. 115. Geom.), ideo est ejus area = $\frac{a \times b}{2} = a \times \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \times b$.

COR. I. Ex his simul habetur mensura earum figurarum planarum, quae in Geometria cum triangulis sunt comparatae. Sic polygoni regularis area erit dimidium factum ex ejus peripheria in perpendicularem ex centro circuli cui inscribi potest ad latus. Circuli area est dimidium factum ex peripheria in radium, et area sectoris est dimidium factum, quod prodit radio per arcum sectoris multiplicato. Hinc area segmenti invenitur, quaerendo aream sectoris, qui ab eodem arcu terminatur, deinde vero aream trianguli, qui terminatur iisdem cum sectore radiis et segmenti chorda; differentia area posterioris a priori est quaesita segmenti area.

COR. II.

COR. II. Si diameter circuli sit 100, peripheria *proxime* est 314 et area $= 25 \times 314 = 7850$. Ideo est circuli area ad quadratum suae diametri *proxime* ut 7850 ad 10000, five ut 785 ad 1000.

COR. III. Quaelibet figura plana rectilinea mensurabitur, si dividatur in triangula per lineas diagonales, atque eorum sigillatim sumtorum areae quaerantur, quae in summam collectae dabunt integrae figurae mensuram.

COR. IV. Prismatum igitur et pyramidum superficies mensurantur, omnibus figuris planis ea solida terminantibus separatim mensuratis, iisque mensuris in summam collectis.

COR. V. Prismatis recti superficies deuntis basibus aequalis est rectangulo cujus basis aequalis est peripheriae baseos solidi, et altitudo prismatis altitudini aequalis (§. 113. Cor. 3. *Geom.*) ideo superficies prismatis recti deuntis basibus mensuratur multiplicata peripheria baseos per corporis altitudinem.

COR. VI. Cylindri quoque recti superficies deuntis basibus mensuratur multiplicata peripheria baseos per altitudinem cylindri. Coni recti superficies est dimidium factum ex latere coni in baseos peripheriam.

COR. VII. Superficies sphaerae mensuratur, diametro sphaerae per circuli maximi peripheriam multiplicata. § 360. *Geom.*

§. 22.

Super data base AB. construere triangulum datae areae.

SOL. Quia si trianguli altitudo est CD, ejus area F. 211. est $= \frac{1}{2} AB \times CD$; reperietur altitudo trianguli, area data per dimidium baseos divisa. Quodsi tum ducatur recta EF basi AB parallela in distantia CD; quodvis triangulum super AB constructum, cujus vertex cadit in E_r erit datae areae.

COR. Si super AB construendum sit parallelogram-

mun datae areae, quia hoc, si ejus altitudo fuerit CD , erit $= AB \times CD$, data area per integram basin dividenda erit, ut habeatur altitudo. Si igitur et hoc casu ducatur EF ipsi AB parallela in distantia CD , omne parallelogrammum cujus latus basi AB oppositum cadit in parallelam EF , erit areae datae.

§. 23.

Data quacunque figura plana earum, quae in Geometria Elementari sunt consideratae, invenire quadratum eidem figurae aequale.

SOL. Quaeratur area hujus figurae per calculum. Ex numero, qui aream exprimit extrahatur radix quadratica, quae erit mensura lateris quadrati quaesiti.

§. 24.

Duobus trianguli rectanguli cathetis per numeros expressis invenire numerum exprimentem hypotenusam, vel data hypotenusam et uno cathetorum in numeris, invenire numerum, qui exprimit alterum cathetorum.

SOL. I. Quaerantur quadrata numerorum datorum, iisque additis ex summa extrahatur radix quadratica, quae erit hypotenusam.

2. A quadrato numeri, qui exprimit hypotenusam, subtrahatur quadratum numeri, qui exprimit datum cathetum: ex differentia eorum quadratorum extrahatur radix quadratica, quae erit lateris quaesiti mensura.

COR. Per eadem invenitur numerus exprimens diametrum circuli, qui aequalis est summae vel differentiae duorum datorum ex summa nimirum vel differentia quadratorum ex diametris extrahendo radicem quadraticam, quae erit diameter circuli quaesiti.

EXEMPLVM. Sit $AB = 1$, et $BC = 1$, erit $AC =$ radici quadraticae ex numero 2, quae cum non sit numerus integer, nec erit numerus fractus, quare hoc casu recta AC ex AB vel BC pro unitate assumpta ut numerus exprimi nequit, ideo nec ratio $AB : AC$ numeris exprimi potest, quae proinde irrationalis est.

§. 25.

§. 25.

Prisma mensurare.

SOL. Pro mensura sumatur cubus, cujus latus est aliqua ex mensuris receptis, e. g. *Pes*, eritque basis cubi $= 1$, ut et ejus altitudo $= 1$. Sit B numerus prismatis basin exprimens secundum eandem mensuram, et A numerus exprimens ejus altitudinem, ac erit cubus pro mensura sumtus ad prisma mensurandum, ut $1 \times 1 \times B \times A$ (§. 329. Cor. 3. *Geom.* coll. §. 46. *Ar.*). Hinc generaliter prisma mensurabitur, si numerus exprimens basin multiplicetur per numerum, qui exprimit altitudinem.

COR. I. Eodem modo ex cubo, cujus latus est 1 , mensurabitur cylindrus (§. 344. Cor. 3. *Geom.*).

COR. II. Soliditas cubi habetur si quadratum numeri, qui exprimit latus cubi, denuo per radicem multiplicetur. Unde ejusmodi numerus, qui prodit, si quadratum numeri A cujuscunque multiplicetur per radicem, vocatur *numerus cubicus*, et hujus respectu numerus A vocatur *radix cubica*.

COR. III. Cubus, cujus latus est *pes*, millies continetur in cubo, cujus latus est *decempeda*, ac toties etiam continetur cubus, cujus latus est *pollex*, in cubo, cujus latus est *pes*, sicque porro, quod notandum est in legendis numeris, qui exprimunt volumina solidorum.

COR. IV. Pyramides et coni mensurantur multiplicando basin in altitudinis partem tertiam (§. 345. Cor. 5. *Geom.*).

COR. V. Sphaera mensuratur reperto volumine cylindri, cujus basis circulo sphaerae maximo et altitudo diametro sphaerae aequalis est, sumtisque ejus duabus partibus tertiis (§. 350. Cor. 2. *Geom.*).

§. 26.

Dato numero qui exprimit latus cubi cujuscunque AB invenire latus cubi dupli.

SOL. Sit BC latus cubi dati. Fiat recta $F = 2BC$, F. 212. et quaerantur duae aliae rectae D et E inter BC et F

continue proportionales, i. e. tales, ut sit $BC : D = D : E$, et $D : E = E : F$, atque ideo quatuor rectae BC , D , E , F , sint in proportionem geometricam. Erit igitur ratio $BC : F$ triplicata rationis $BC : D$. Quodsi vero ex latere D fiat cubus, erit AB ad hunc cubum in ratione triplicata rationis $BC : D$, proinde ut $BC : F$, id est ut 1 ad 2. Recta igitur D est latus cubi quaesiti.

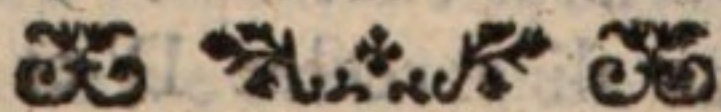
Geometrica esset haec solutio eaque simul ita universalis, ut non tantum latus cubi dupli, sed n tupli cuiuscunque inveniatur, sumendo $F = nBC$; si inventio duarum mediarum continue proportionalium esset in potestate Geometriae Elementaris. Solius autem circuli cum recta combinatione, mediae istae proportionales reperiri nequeunt, saltem nulla methodus illud efficiendi hucusque cognita est, licet multis modis id praestari queat, aliis curvis in subsidium vocatis, quorum igitur explicatio pertinet ad Geometriam Sublimiorem.

Calculo autem in subsidium vocato inveniri potest latus cubi dupli vel n tupli cuiuscunque, si numerus, qui exprimit cubi dati volumen, duplicetur, vel multiplicetur per numerum n datum, tum vero quaeratur hujus facti, quod prodiit, radix cubica, quae invenietur ope logarithmorum.

Numeri enim cuius radix cubica quaerenda est logarithmo per 3 diviso, habebitur logarithmus radice. Est nimirum cubus numeri cuiuscunque $A = A \times A \times A$, ideo ejus logarithmus $= lA + lA + lA = 3lA$, proinde logarithmus cubi est triplum logarithmi radice, et logarithmus radice logarithmi ipsius cubi pars tertia.

COR. Generatim inveniri potest latus cubi, dato solido quocunque vel pluribus datis simul sumtis aequale, si ex numero qui exprimit volumen solidi dati vel solidorum datorum simul sumtorum, extrahatur radix cubica.

Haec erit latus quaesitum.



MATHESIS
THEORETICA
SVBLIMIOR.

THEORY
OF
THE
EARTH



ANALYSIS MATHEMATICA. SECTIO I.

DE
ALGORITHMO SPECIOSO.



§. I.

LEMENTARIS ARITHMETICA in eo convenit cum SVBLIMIORI, quod utraque sit scientia inveniendi quantitates generatim spectatas per calculum. In utraque enim scientia datae quantitates signis exprimuntur horumque signorum ope et certa eorundem inter se combinatione ac substitutione eruitur non ipsa quaesita quantitas, sed signum quantitatis quaesitae. Differunt vero istae scientiae primum in eo, quod signa in Arithmetica Elementari sint determinata et praecipue tantum numeris denotandis accommodata; Sublimior vero Arithmetica, ALGEBRA etiam seu ANALYSIS MATHEMATICA vocata signis utatur adeo universalibus; ut cujuscunque generis magnitudines possint denotare. Deinde etiam discrimen harum scientiarum in eo quaerendum est, quod Arithmetica Elementaris problemata solvat sub conditionibus specialibus, et simplices tradat operationes in determinatis casibus actu instituendas, ut prodeat signum determinatum numeri quaesiti; Analysis vero Mathematica modos detegat generales solvendi proble-

mata cum arithmetice per computum, eliciendo signa quae expriment, quatenam ex operationibus Arithmetices simplicibus et quo ordine in determinatis casibus applicandae sint, tum geometricae per constructiones figurarum.

§. 2.

Cum igitur Analysis Mathematica doceat modum signorum ope ex conditionibus problematis inveniendi solutionem problematis generalem; duo sunt momenta, ad quae Analysta debet attendere. Ac *primo* quidem conditiones problematis per signa apte sunt exprimendae. *Deinde* ex signis conditiones problematis exprimentibus derivari debet signum, quod solutionem problematis indicat generalem. Quod attinet ad primum, in quovis problemate dari debet relatio quantorum datorum ad quaesitum, alias enim nulla possibilis foret inventio. Expressio itaque conditionum problematis per signa consistit in expressione relationis quantitatum datorum ad quaesitam. Quantitates considerari possunt aut generatim, aut speciatim, quorum posterior casus huc non spectat, sed prior. Ideo conditiones problematis algebraice exprimuntur, si signa formentur relationum, quae quantitibus datis et quaesitis generatim spectatis intercedunt.

§. 3.

Relationes, quantitibus generatim spectatis competentes consistunt in determinata earundem inaequalitate vel aequalitate. Determinatas vero quantitatum inaequalitates satis distincte concipere possumus per modum determinatum, quo mediante per operationes arithmeticas fieri possunt aequales. Id itaque agendum est ei, qui problemata per signa exprimere cupit, ut exprimat modum, quo quantitates datae et quaesitae certo modo per operationes arithmeticas combinatae aequales redduntur aliis vel datis vel quaesitis certo quoque modo per operationes arithmeticas combinatis. Quaevis
ex-

expressio indicans, quomodo combinari debeant quantitates, ut aliis certo modo combinatis fiant aequales, dicitur *Aequatio Algebraica* sive *Analytica*. Quodvis igitur problema algebraicum involvit aequationem quandam, signo perfecto exprimendam. Indicat autem aequatio, quomodo quantitates combinari debeant, ut aliis certo modo combinatis fiant aequales. Ideo indigemus primo signis quantitatum, deinde signis operationum, per quas combinantur.

§. 4.

Pro signis quantitatum commode usurpantur litterae alphabeticae, quarum tamen priores *a*, *b*, *c*, etc, ad datas, postrema *z*, *y*, *x*, etc, ad quaesitas exprimendas usurpantur. Illae quarum aequalitas manifesta est, quantitates, eadem littera denotantur, sique plures fuerint, earum numerus exprimitur signo illius numeri litterae praescripta. Loco $a + a$ scribitur $2a$, loco $a + a + a$, $3a$, loco $a + a + a + a$, $4a$, loco $2a + 3a$, $5a$, et sic in ceteris similibus. Unitas non scribitur, nisi sola occurrat, vel majoris lucis gratia. Diversi generis quantitates ac illae, quae ejusdem sunt generis, sed inter se inaequales vel quorum aequalitas manifesta non est, diversis denotantur litteris. Signa combinationis quantitatum in aequatione debent esse signa quatuor operationum Arithmetices simplicium, quae in Mathesi Elementari jam usurpantur. Sic additionis signum manet (+) et subtractionis signum est (—), quorum illud per vocem *plus* et hoc per *minus* effertur. Porro factum ex duabus quantitatibus per litteras *a*, *b*, signatis designet ab , vel quoque $a \times b$ seu $a.b$, vel a, b . si peculiares rationes id svadeant. Factum ex tribus quantitatibus *a*, *b*, *c*, vel pluribus modo simplicissimo sic exprimitur abc , vel bca , vel acb , utcunque transpositis litteris. Aliter quoque indicari potest sequentem in modum $a \times bc$, vel $ab \times c$, $ab.c$, $a.bc$, $a \times b \times c$, $a.b.c$. Si litteris, quae quantitates designant, adjuncti sint numeri, loco $2a \times$

3b scribitur $6ab$, numeris in se invicem multiplicatis, vel si numeri illi ob rationes illud suadentes distinguendi sint, saltem initio scribuntur sequentem in modum $2.3.ab$. Quotus, qui prodit divisione quanti b per a , hic quoque signatur ita $b : a$ vel $\frac{b}{a}$.

§. 5.

Si factores sunt aequales ut aa , aaa , compendii gratia unus tantum factor scribitur, eique ad apicem versus dextram adjungitur numerus, qui tot continet unitates, quot factores aequales in se invicem multiplicandi sunt propositi. Sic pro aa ponitur a^2 , pro aaa ponitur a^3 , a^4 pro $aaaa$, a^3b^2 pro $aaabb$, $a^4b^3c^2$ pro $aaaabbbcc$, et sic in reliquis. Generatim autem facta ex factoribus inter se aequalibus quocunque numero orta vocantur *Dignitates* vel *Potestates* ejus factoris, ac *Secunda* quidem si bis positus fuerit ejusmodi factor, *Tertia* si ter, *Quarta* si quater, et sic porro. Numerus ad apicem versus dextram adjectus, qui exprimit, quot sunt factores inter se aequales, quibus dignitas produci-
tur, vocatur *Exponens* five *Index illius dignitatis*. Ipse vero factor respectu dignitatis suae dicitur *Radix ejus dignitatis*. Ex quo patet, quid sit radix secundae, tertiae, quartae etc. dignitatis numeri cujusdam propositi. Signum sequens ($\sqrt{}$) est signum radiceis, cui superscribitur numerus ordinem radiceis indicans. Sic

$\sqrt{}$ vel $\sqrt{}$ absque numero denotat radicem dignitatis secundae. Radiceis tertiae dignitatis signum est $\sqrt[3]{}$, quartae $\sqrt[4]{}$, quintae $\sqrt[5]{}$ et ita porro. Praeponitur hoc signum illi quantitati, ex qua radix desiderati ordinis est extrahenda.

§. 6.

Si ex pluribus quantitatibus collecta quantitas tanquam una spectetur, littera quibus designatur, cum signis suis inclu-

includuntur in parenthesin (), tuncque quod ita connexum est, non aliter tractari solet, ac si littera aliqua singularis esset. Notat igitur $a(b+c)$ factum ex quanto a et summa quantorum b et c , $a(b-c)$ factum ex a et differentia quantorum b et c , $(b+c)(b-c)$ factum ex summa quantorum b et c in eorundem differentiam; $(a+b)^2$ est dignitas secunda seu quadratum summae quantorum a et b , $\sqrt{a+b}$ et ejusdem summae radix quadratica. Copulae seu parenthesis hujus vicem saepe linea sustinet, quantis uniendis inducta. Sic pro $(a+b)$ scribitur $\overline{a+b}$. Si quoti per modum fractionum exprimantur, ipsa linea dividendum a divisore separans copulae loco est, ita ut

$\frac{ab+cd}{e+f-g}$ denotet summam $ab+cd$ dividendam esse per summae $e+f$ a quanto g differentiam.

§. 7.

Facta dignitatum ejusdem radice iterum sunt dignitates ejusdem radice, quarum exponens ultro se offert. Sic $a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa = aaaaaaa = a^8$, $a^7 \times a^2 = a^9$, $(a+b)^2 \times (a+b)^3 = (a+b)^5$. Inde regula: Si dignitates ejusdem radice proponantur in se invicem multiplicandae, addantur exponentes factorum, et summa erit exponens facti. Ideo generaliter est $a^m \times a^n = a^{m+n}$, si m et n numeros integros denotent. Præ-

terea cum $\frac{a^5}{a^3} \times a^3$ fit $= a^5$, et pariter $a^2 \times a^3 = a^5$,

erit $\frac{a^5}{a^3} \times a^3 = a^2 \times a^3$, et utroque aequationis membro

per a^3 diviso $\frac{a^5}{a^3} = a^2$. Vel generaliter, cum fit

$\frac{a^m}{a^n} \times a^n = a^m$ et $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$, fit

$a^{m-n} \times a^n = \frac{a^m}{a^n} \times a^n$ et utrinque per a^n diviso, est

a^{m-n}

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. Inde regula: Si dignitas quaecunque dividenda sit per dignitatem ejusdem radice; exponents divisoris subtrahatur ab exponents dividendi, residuum erit exponents quoti.

§. 8.

Dignitas secunda seu quadratum ipsius a^n est $a^n \times a^n = a^{n+n} = a^{2n}$. Cubus ipsius a^n est $a^n \times a^n \times a^n = a^{3n}$. Pari ex ratione est $(a^n)^4 = a^n \times a^n \times a^n \times a^n = a^{n+n+n+n} = a^{4n}$, et generaliter $(a^n)^m = a^{mn}$. Ex quo iterum sequitur regula ista: Si dignitas cujuscunque gradus iterum elevanda est ad dignitatem cujuscunque exponentis; exponents radice multiplicetur per exponentem ejus dignitatis, ad quam evehi debet. Factum erit exponents dignitatis quaesitae. Ex his porro concludo se-

quentem in modum $(\sqrt[n]{a})^3 = a$ et generaliter $(\sqrt[n]{a})^n =$

a . Porro $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, et $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$

Ideo est $(\sqrt[n]{a^m})^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$, et quia radices ejusdem gradus ex quantis aequalibus aequales sunt, erit

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Inde nova fuit regula pro invenienda radice cujuscunque gradus ex dignitate quacunque data; Exponents radice est quotus, qui invenitur divisione exponentis datae dignitatis per exponentem radice quae-

sitae. Est igitur $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$, quia est $a = a^1$. Reductio ista quantorum sub signo radicali contentorum ad exponentes fractos calculo in sequentibus explicando haud raro eximium afferet commodum.

§. 9.

Permulta occurrunt quantorum genera, quae conceptum aliquem communem agnoscunt, praeterea vero ad se invicem relationem habent contradictoriam, ita ut uno eorum posito et cum eodem altero conjuncto, tantum prioris negetur, sive destruat, quantum posterioris fuerit positum. Talia sunt v. g. ascensus et descensus, progressus et regressus corporis in eadem recta, fors et debita, hujusque generis alia. Corpus A in recta AB a puncto A versus B 7 pedes progressum, si 4 pedes regreditur, revera a puncto A post regressum 3 pedes tantum distat, et regressu hoc ex distantia priori 7 pedum destruantur 4 pedes. Quodsi retrogradatur per 7 pedes, integra distantia destruitur, et perinde est, ac si corpus omnino non fuisset motum. Si corpus A per 10 pedes regredi ponatur, non tantum punctum A iterum attinget, sed ultra punctum A versus C motu integro absoluto progressum erit. Distabit igitur a puncto A 3 pedes non versus dextram sed versus sinistram. Si igitur motus corporis referatur ad punctum A; progressus versus dextram et regressus versus sinistram sibi contradictorie opponuntur, ut posito corpore a termino A v. g. 3 pedes moto in recta BC et negato progressu versus B, certum sit, corpus 3 pedes versus C esse regressum; negato vero regressu versus C certum sit, idem corpus 3 pedes versus B esse progressum. Fieri igitur potest, ut ex unius quantorum contradictorie oppositorum negatione intelligatur, quantum alterius ponendum sit, et ejusmodi quantitas, quae poni intelligitur per negationem ejus, quae ipsi contradictorie opponitur, quantitas *negativa* vocatur, ipsa vero quantitas huic contradictorie opposita dici solet *quantitas positiva*. Signum negationis hic est illud, (—), quod alias etiam subtractionem denotat, quippe quae operatio arithmetica contradictorie opposita est additioni, hocque praefigitur signo illius quantitatis, per cujus negationem quantitas negativa indigita-

gitatur. Litteris, quae quantitates positivas denotant, nullum omnino signum tribuitur, si solæ occurrant, vel alicujus seriei initio, si autem alias litteras sequantur, ipsis signum (+) praescribitur.

§. 70.

F.213. Si recta AB indicetur signo $+a$, et fiat $AC = AB$, recta AC priori in directum opposita indicanda erit signo $-a$. Si vero AB vocetur $-a$, AC indicabitur signo $+a$. Initio igitur perinde est, quodnam ex duobus quantis sibi contradictorie oppositis ut positivum vel negativum concipitur, dum modo postea idem signandi modus retineatur. Quodsi una rectarum AB vel AC exprimenda sit per numerum v. g. AB, quae posita est $= +a$, pars quaecunque ut AD assumi potest pro unitate, ita ut sit $AD = +1$, et adeo $AB = +7$. Numerus igitur positivus fit ex unitate positiva, dum ipsa unitas continuo crescat, vel decrescat, ita tamen ut non prorsus in nihilum abeat et hoc incremento vel decremento producat quantitas, quae ipsam unitatem, vel unam ex ejus partibus aliquotis in se aliquoties continet. Posito $AD = +1$, et $AE = AD$, est $AE = -1$, atque ex hac unitate negativa idem numerus positivus $+7$ ortus esse concipi potest. Quodsi enim AE continuo decrescere concipiatur, puncto E versus B fluente, tandem AE evadet $= 0$, si punctum E jam ulterius versus B fluat, oritur numerus, qui oppositum ipsius unitatis AE, vel partis cujusdam ipsius aliquotae in se aliquoties continet, qui est positivus, et puncto E cum B coincidente, evadit $= +7$. Ex his simul patet, quomodo numerus $-7 = AC$ ex unitate negativa AE non tantum, sed etiam ex positiva AD ortus esse concipi queat. In universa autem Analyfi omnes numeri sive positivi sunt, sive negativi, ex unitate positiva orti esse sunt concipiendi.

§. II.

Conditionibus problematis per signa apte expressis, ejus negotii regulas primarias hucusque tradidimus, Analystae est, ut ex signis conditiones problematis exprimentibus signum eruat generalem problematis solutionem exhibens. Ea aequatio, quae conditiones problematis exprimit, dicitur *Aequatio fundamentalis*. Analysis proprie non docet, quomodo aequatio problematis fundamentalis inveniri queat. Generalia tantum hunc in finem praescribere potest. Nisi enim cognita sit relatio datarum quantitatum ad quaesitam, aequatio problematis fundamentalis inveniri nequit. Sed ipsae illae relationes ex disciplinis petendae sunt, quae de quibuslibet quantis per signa analytica exprimendis speciatim agunt. Unde Analysis ab illo, qui eas disciplinas perspexit, adplicari demum poterit, licet occurrant quantorum relationes aliquae solo communi sensu nixae, quaedam etiam ab arbitrio hominum et pactis pendentes, ad quas, si solae problema aliquod ingrediantur, analysis sine magna difficultate applicatur. Inventa vero aequatione fundamentali incipit Analysis, eaque sola tum elicit problematis solutionem. Aequatio nimirum fundamentalis ita mutanda est, ut ex altera ejus parte quaesita quantitas solitarie consistat, hoc enim facto resultabit aequatio exprimens, quomodo combinari debeant quantitates datae, ut quaesitae fiant aequales. Sed datae quantitates combinantur cum quaesita vel additione vel subtractione, vel multiplicatione, vel divisione, additio autem tollitur subtractione et contra, ut et multiplicatio divisione et contra. Ideo separatio desiderata fieri potest per operationes Arithmeticas. Analysta utitur signis quantorum indeterminatis et universalibus, a quibusdam *species* dictis. Ergo prae omnibus explicandae sunt regulae, quibus convenienter operationes Arithmeticae simplices institui debeant, si quanta expressa sint signis adeo universalibus. Complexus harum regularum dicitur

S

citur

citur *Algorithmus speciosus*, five *Logistica speciosa*, five *Calculus Litteralis*.

§. 12.

Quaevs operatio simplex arithmetica est methodus ex dato cognito quanto ejusque ratione mathematica ad incognitum quoddam ipsum hoc incognitum inveniendi. Si data ratio quanti cogniti ad incognitum est arithmetica, praeter quantum cognitum dari debet denominator rationis ejus ad incognitum. Atque si duo quanta A et B concipiuntur in ratione arithmetica, cujus denominator est D, unum B oritur ex altero A aut ita, ut ipsum A totum et praeterea D ponatur, aut ita, ut A quidem totum ponatur, sed D tollatur five negetur. Si termini rationis arithmeticae sint 3 et 5, erit denominator 2, atque 5 oritur ex 3, posito 3 toto, et praeterea numero 2: sed 3 oritur ex 5 posito 5 toto et insuper numero 2 ex eodem sublato five negato. Ideo si ex uno termino ejusmodi rationis et denominatore dato, alter terminus est inveniendus; praeter quantum cognitum denominator rationis aut ponendus, aut negandus erit. Si prius, operatio instituenda est *additio*, si vero posterius, est *subtractio*. Si discrimen quanti positivi a negativo in censum non venit, uti in Mathesi Elementari; quantum cognitum additione denominatoris D eodem augetur, et ideo summa quantitate data est major: contra quantum cognitum subtractione ipsius D eodem quanto minuitur, ita ut differentia quaesita quantitate, a qua fit subtractio, sit minor. In Analyfi Mathematica idem accidit, si utrumque datorum quantorum sit positivum, vel utrumque negativum. Sic manifestum est, quod summa quantorum $+5a$ et $+7a$ fit $+12a$: quantorum vero $-5a$ et $-7a$ summa fit $-12a$. Inde prima additionis regula deducitur, nimirum ista: *Si quanta addenda iisdem litteris sunt notata, et idem habent signum, addantur numeri praefixi, et signum praefixum retineatur.*

§. 13.

§. 13.

Si quanta, quae proponuntur addenda, diversa habent signa, res aliter se habet. Proposita sit quantitas $+7a$, eique sit addenda $-3a$, atque ponenda sunt $+7a$ et insuper $-3a$. Quare cum $+7a$ sit ipsi $-3a$ contradictorie opposita, tantum prioris $+7a$ negatur, quantum posterioris $-3a$ est positum. Summa igitur quaesita est $+4a$. Pari ratione summa quantorum $-9a$ et $+7a$ est $-2a$, et ipsarum $+3a$ et $-3a$ summa est 0. Quare si quanta addenda iisdem litteris sunt notata, unum vero sit positivum et alterum negativum, major minuenda est minore, est residuo praefigendum est signum majoris, quod prodit, erit summa quaesita. Denique si quanta diversis litteris notata proponantur addenda, eadem immediate sibi junguntur, iisdem signis, quae ipsis praefixa sunt, retentis. Sic summa quantorum $+a$ et $+b$ est $a+b$; quantorum $+a$ et $-b$ summa est $a-b$, atque summa ipsorum $-a$ et $-b$ est $-a-b$, quae omnia ex notione additionis, vi cuius ponenda est quantitas data et insuper denominator rationis ipsius ad quantum quaesitum, sunt manifesta. In additione plurium aut magis compositarum quantitatum convenit observare formam operationis similem illi, qua utimur in Arithmetica Elementari numeros determinatos addentes. Si quanta $17ax - 14a + 3$ et $4a - 8ax + b$ addenda sunt; disponuntur eadem in serie descendente ita, ut termini iisdem litteris notati consistent in iisdem columnis sequentem in modum: tum vero cuilibet columnae subscribitur summa terminorum, qui in eadem occurrunt, quemadmodum illud schema calculi adjunctum exhibet.

$$\begin{array}{r}
 17ax - 14a + 3 \\
 - 8ax + 4a \quad + b \\
 \hline
 9ax - 10a + 3 + b
 \end{array}$$

§. 14.

Ad normam horum exemplorum facile absolvitur quaecunque additio, five quantitates propositae sint dignitates five radices cujuscunque ordinis, five fractiones

Dignitates enim, quarum eadem est radix et idem exponens, ac radices, si quanta sub signo contenta sunt eadem et exponens radicalis idem, non aliter tractandæ sunt, quam si littera unica eaque eadem fuerint expressæ. Fractiones vero, nisi denominatorem habeant eundem, reducendæ sunt ad eandem denominationem juxta regulas communes. Sic

quantorum	summa est
$+ 7a^3$ et $- 15a^3$	$- 8a^3$
$+ 3a^5$ et $+ 8a^5$	$+ 11a^5$
$- 9a^6$ et $- 7a^6$	$- 16a^6$
$+ 3(a+b)^3$ et $+ 7(a+b)^3$	$+ 10(a+b)^3$
$+ 8\sqrt[5]{b}$ et $- 19\sqrt[5]{b}$	$- 11\sqrt[5]{b}$
$- 7\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$	
et $- 5\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$	$- 12\sqrt[5]{(ab+fx-gx^2)}$
$+ \frac{ab}{c}$ et $+ \frac{7ab}{c}$	$+ \frac{8ab}{c}$
$- \frac{a}{bc}$ et $- \frac{g}{k}$	$\frac{- ak - bcg}{bck}$
$+ 9a^8$ et $- 7a^3$	$+ 9a^8 - 7a^3$
$- 5b^3$ et $- 3x^7$	$- 5b^3 - 3x^7$
$- 7\sqrt[3]{(ax+b)}$ et $+ 5\sqrt[3]{xy}$	$- 7\sqrt[3]{(ax+b)} + 5\sqrt[3]{xy}$

§. 15.

Quantitates radicales, si exponentem radicalem eundem habent, et idem quantum sub signo radicali, vocantur *communicantes*, licet numeri vel generatim signa præfixa signo radicali differant. Ex §. præc. patet, quod additio ejusmodi quantitatum radicalium communicantium absolvatur additione signorum radicali signo præfixorum, ita ut quantorum $a\sqrt[3]{(b+x)}$ et $- f\sqrt[3]{(b+x)}$ summa sit $(a-f)\sqrt[3]{(b+x)}$. Occurrunt sæpius quantitates radicales non communicantes, quæ mutari non-

nonnunquam possunt in communicantes, si quantum sub signo radicali contentum resolubile est in factores, et ex uno eorundem extrahi queat radix ejus gradus, quem exponens radicalis indicat. Tum enim ea radix actu extrahenda est, et altero factore solo sub signo radicali relicto, haec mutata quantitas radicalis per radicem inventam multiplicanda. Factum, quod prodit, quantitati radicali propositæ aequale est. Dico, quod

fit $\sqrt[n]{a^n b^m} = a \sqrt[n]{b^m}$, et veritas hujus asserti jam demonstranda est.

§. 16.

Ut demonstratio asserti eo evidentior evadat, propositiones quaedam lemmatum loco sunt præmittendae, eaeque sunt sequentes.

1. Si fuerit $a : b = c : d$, erit quoque $a^n : b^n = c^n : d^n$, si n sit numerus integer. Scripta enim proportionem $a : b = c : d$ toties, quoties in numero n est unitas et terminis ordine in se invicem multiplicatis, facta sunt proportionalia (§. 45. Ar.).

2. Si fuerit $a : b$ in $c : d$, erit $a^n : b^n$ in $c^n : d^n$. Quia enim $a : b$ in $c : d$, alia quantitas a quanto d diversa erit quarta proportionalis ad quanta a , b , et c . Sit e ista quantitas; erit $a : b = c : e$, et proinde $a^n : b^n = c^n : e^n$ (per n. 1.). Si jam praeterea foret $a^n : b^n = c^n : d^n$, exinde concluderetur $c^n : e^n = c^n : d^n$, proinde $e^n = d^n$, et $e = d$, contra hyp.

3. Si fuerit $a : b = c : d$, erit $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$. Ponatur enim $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ in $\sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$, erit $a : b$ in $c : d$ (per n. 2) quod contra hyp. ex quo patet propositum.

4. Si factum ex quocunque factoribus, ut $p q r s$ elevandum sit ad potentiam gradus m , quilibet factor ad potentiam ejusdem gradus elevandus est, factum ex omnibus hisce potentiis, erit potentia quaesita. Dico

enim quod generaliter sit $(ab)^m = a^m b^m$. Quia ex natura multiplicationis est $1 : a = b : ab$ et ideo $1 : a^m = b^m : (ab)^m$ (per n. 2.) erit $a^m b^m = (ab)^m$. Quia jam $pqrs = pq \times rs$, erit $(pqrs)^m = (pq)^m \times (rs)^m = p^m q^m r^m s^m$. Quae argumentatio ad quemcunque alium casum, ex quotcunque factoribus ad factum constet, facile adplicatur.

5. Radix gradus m ex ejusmodi facto ut $pqrs$ est factum ex radicibus gradus m singulorum factorum sive

$$\sqrt[m]{pqrs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s} = p^{\frac{1}{m}} q^{\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}} s^{\frac{1}{m}}. \text{Pri-}$$

mo nimirum patet, quod sit $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$, sequentem in modum. Ex natura multiplicationis est $1 : a =$

$$b : ab, \text{ ideo } 1 : \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b} : \sqrt[m]{ab} \text{ (per n. 3.), et } \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$$

$$= \sqrt[m]{ab}. \text{ Praeterea est } pqrs = pq \times rs, \text{ ideo } \sqrt[m]{pqrs} =$$

$$\sqrt[m]{pq \times rs} = \sqrt[m]{pq} \times \sqrt[m]{rs} = \sqrt[m]{p} \times \sqrt[m]{q} \times \sqrt[m]{r} \times \sqrt[m]{s}. \text{ Ex quotcunque autem factis constet factum, argumentatio haec poterit applicari.}$$

$$\text{Proposita jam sit expressio } \sqrt[n]{a^n b^m}, \text{ erit ea } = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} \text{ (per n. 5.) et quia } \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ erit } \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a \sqrt[n]{b^m}, \text{ hincque } \sqrt[n]{a^n b^m} = a \sqrt[n]{b^m}.$$

Quo usus hujus reductionis perspiciatur, addenda sit $\sqrt[3]{8}$ ad $\sqrt[3]{18}$, erit $\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{2}$; ideo summa quaesita est $5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(2 \cdot 25)} = \sqrt[3]{50}$. Sic inve-

$$\text{nitur } \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}.$$

§. 17.

Haec de additione algebraica, sequitur subtractio atque ex notione subtractionis concludimus regulam, quae sequitur, generalem: *Quanti subtrahendi signum mute-*
tur

tur in signum contrarium; quod prodit, ad quantum, a quo fieri debet subtractio, addatur. Regulae hujus demonstratio ex notione subtractionis sponte se offert, dummodo natura quanti positivi et negativi contradictorie oppositi, vi cuius tantum unius ponitur, quantum alterius negatur et v. v. simul in censum veniat. Differentia enim per subtractionem quanti D a quanto A quaesita est quantitas, quae oritur ex A, ponendo quantum A totum, deinde vero quantum D tollendo sive negando, seu quod idem est, tantum quanti ipsi D contradictorie oppositi ponendo, quantum ipsius D est negandum. Sed operatio, quae ex quanto A toto et opposito ipsius D posito elicit tertium, est additio quanti ipsi D oppositi ad quantum A. Proinde patet veritas regulae expositae. Sic quantum subtrahendo a quanto, differentia est

$+ a$	$+ b$	$a - b$
$+ a$	$- b$	$a + b$
$+ 3a$	$+ 7a$	$- 4a$
$+ 5a$	$- 8a$	$+ 13a$
$- 9a$	$+ 3a$	$- 12a$
$- 5a^3$	$- 18a^3$	$+ 13a^3$
$+ 6(ax + b)^5$	$+ 9(ax + b)^5$	$- 3(ax + b)^5$
$\frac{ab}{c}$	$\frac{-g}{k}$	$\frac{abk + gc}{kc}$
3	3	3
$+ 5\sqrt[3]{ax}$	$+ 7\sqrt[3]{ax}$	$- 2\sqrt[3]{ax}$

Si quantum radicale a radicali sit subtrahendum, et radicales istae quantitates non sint communicantes, reductione ad simpliciores expressionem, si ea possibilis est, saepe fiunt communicantes. Caeterum ea, quae supra de additione plurium et magis compositarum quantitatum sunt monita, et hic notari merentur. Quodsi v. g. a quanto $5ax^3 + 3\sqrt[3]{(f+y)} - 4a^2 - 16b$ subtrahendum sit quantum $8ax^3 + 3ax^2 - ax - 5\sqrt[3]{(f+y)} - b$, schema calculi hoc erit.

$$\begin{array}{r}
 5ax^3 \quad * \quad * \quad + 3r(f+y) - 4a^2 - 16b \\
 8ax^3 + 3ax^2 - ax - 5r(f+y) \quad * \quad - \quad b \\
 \hline
 - 3ax^3 - 3ax^2 + ax - 2r(f+y) - 4a^2 - 15b
 \end{array}$$

Asterisimi hic poni solent cyphrarum loco.

§. 18.

Multiplicatio et divisio dignitatum fit additione et subtractione earundem exponentium. Factum ex a^m et a^n est a^{m+n} . Si a^3 dividatur per a^5 , quotus est a^{-2} , et generaliter, si a^m dividatur per a^{m+n} , quotus est a^{-n} . Denique si a^m dividatur per a^m , quotus est $a^{m-m} = a^0$. Quaevis autem dignitas a^{-m} cujus exponens est negativus aequipollet fractioni cujus numerator est unitas, denominator vero eadem quantitas a cum eodem quidem exponente m sed cui signum contrarium praefixum est. Nam $a^{-n} \times a^{m+n} = a^{m+n-n} = a^m$, et

$$\frac{1}{a^n} \times (a^{m+n} = a^m \times a^n) = a^m, \text{ ideo } a^{-n} \times a^{m+n}$$

$$= \frac{1}{a^n} \times a^{m+n}, \text{ et utrinque per } a^{m+n} \text{ divisio fit } a^{-n}$$

$$= \frac{1}{a^n}. \text{ Praeterea quaecunque quantitatem denotet } a,$$

semper est $a^0 = 1$. Est enim $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$,

et $1 \times a^m = a^m$, proinde $a^0 \times a^m = 1 \times a^m$, hincque

$a^0 = 1$. Methodus tradita dignitatem quanti algebraici

per aliam multiplicandi vel dividendi adeo universalis

est, ut quoque ad dignitates, quarum exponentes sunt

fracti, extendatur. Quodsi enim fuerit $a^m = a^r a^s$,

erit $m = r + s$. Utrinque igitur radice ordinis n sumpta,

$$\text{si fiat } a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{r}{n}} a^{\frac{s}{n}}, \text{ erit } \frac{m}{n} = \frac{r+s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{s}{n}.$$

$$\text{Si autem fuerit } a^m = \frac{a^r}{a^s}, \text{ erit } m = r - s, \text{ et utrin-}$$

que

que radice ordinis n sumpta, ut fiat $a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{a^{\frac{s}{n}}}$, est $\frac{m}{n}$
 $= \frac{r-s}{n} = \frac{r}{n} - \frac{s}{n}$. Fit igitur exponens $\frac{m}{n}$ ex

fractis $\frac{r}{n}$ et $\frac{s}{n}$ eodem modo, quo exponens m ipsius a^m ex integris r et s , addendo nimirum exponentes dignitatum radices a , quarum altera per alteram est multiplicanda, et subtrahendo exponentem divisoris ab exponente dividendi, si dignitas per aliam ejusdem radices dividenda proponatur.

§. 19.

Quod attinet ad multiplicationem et divisionem reliquarum quantitatum algebraicarum, iterum habemus regulam generalem sequentem: *Si duo quanta, quorum unum multiplicandum est per alterum, vel dividendum, eadem habent signa, facti vel quoti signum est (+), sin contraria habent signa, tam facti, quam quoti signum est (-).* Cognitum enim jam est ex Mathesi Elementari, si fuerit $A : B = C : D$. et A habeatur pro unitate; D esse factum ex quantitatibus C et B : si vero B sit unitas, D esse quotum quanti C per A divisi. Si igitur primo $+a$ per $+b$, vel $-a$ per $-b$ multiplicandum sit, habemus analogias sequentes:

$$+1 : +a = +b : +a \times +b$$

$$\text{et } +1 : -a = -b : -a \times -b,$$

Jam vero numerus positivus oritur ex unitate vel aliquota ejus parte aliquoties posita, numerus negativus autem ex unitate vel aliquota ejus parte aliquoties negata. Est igitur $+a$ ex $+1$ aliquoties posita ortus, ideo et $+a \times +b$ ex $+b$ aliquoties posita componi debet. Quantum, quod oritur ex quanto positivo aliquoties posito, est po-

fitivum, proinde $+a \times +b$ est quantum positivum $= +ab$. Sed vero $-a$ ex $+1$ aliquoties negata, seu quod idem est, ex quanto ipsi $+1$ opposito aliquoties posito ortum est, ideo quoque $-a \times -b$ ex $-b$ aliquoties negata componi debet, seu quod idem est ex quanto ipsi $-b$ opposito aliquoties posito. Quantum, quod ipsi $-b$ contradictorie opponitur, est $+b$. Hinc et $-a \times -b$ ex quanto positivo aliquoties posito est componendum, ideoque est quantum positivum $= +ab$.

Quodsi deinde $+a$ per $-b$, vel $-a$ per $+b$ erit multiplicandum, habemus analogias

$$+1 : -b = +a : +a \times -b$$

$$\text{et } +1 : +b = -a : -a \times +b,$$

ex quibus patet, $+a \times -b$ ex $+a$ aliquoties negato, et $-a \times +b$ ex $-a$ aliquoties posita componi debere. Sed quantum, quod oritur ex positivo aliquoties negato, vel negativo aliquoties posito, est negativum. Proinde est $+a \times -b = -ab$, et $-a \times +b = -ab$.

Quod adtinet ad divisionem, habemus analogias.

$$+b : +1 = +a : +\frac{a}{b}$$

$$-b : +1 = -a : +\frac{a}{b}$$

$$+b : +1 = -a : -\frac{a}{b}$$

$$-b : +1 = +a : -\frac{a}{b},$$

in quibus iisdem ut ante ratiociniis institutis signum quarti proportionalis reperitur.

§. 20.

Quantitates radicales, quarum exponens radicalis idem est, dicuntur *eandem habere denominationem*. Quodsi ejusmodi quantitates radicales ejusdem denominationis in se invicem multiplicandae vel dividendae proponantur, *multi-*

multiplicentur aut dividantur quantitates sub signo radicali; ibi facto, hic quoto praefigatur signum idem radicale cum suo exponente. Quod quidem attinet ad multiplica-

tionem supra, jam demonstratum est, quod sit $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (§. 16. n. 5.). Simili vero argumentatione de-

monstratur, esse $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a : b)}$. Ex notione

enim divisionis est $1 : b = (a : b) : a$, ideo $1 : \sqrt[m]{b} =$

$\sqrt[m]{(a : b)} : \sqrt[m]{a}$. et consequenter $\sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{(a : b)} =$

$\sqrt[m]{a}$. Quare si utrinque dividatur per $\sqrt[m]{b}$, fit $\sqrt[m]{b} \times$

$\sqrt[m]{(a : b)} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a : b)} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$. Quod si quanti-

tates radicales in se invicem multiplicandae vel dividendae non sint ejusdem denominationis, possunt eadem ad eandem denominationem reduci, si in memoriam revo-

cetur, quod $\sqrt[m]{a}$ sit $= a^{\frac{1}{m}}$ et $\sqrt[n]{b^s} = b^{\frac{s}{n}}$. Diversitas igitur denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quae ad alias ipsis aequales, sed ejusdem denominationis reduci possunt.

Erit ideo $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n}$ et $\sqrt[n]{b^s} = b^{\frac{s}{n}} =$

$b^{\frac{ms}{mn}} = \sqrt[mn]{b^{ms}}$, hincque $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b^s} = \sqrt[mn]{(a^n b^{ms})}$, et $\sqrt[m]{a} :$

$\sqrt[n]{b^s} = \sqrt[mn]{(a^n : b^{ms})}$.

§. 21.

Si quaeratur factum ex duobus factoribus, quorum vel alteruter, vel uterque ex pluribus terminis per signa + et — connexis constet; illud erit aggregatum factorum partialium, quae prodeunt singulis terminis cujuslibet factoris multiplicatis in singulos terminos alterius factoris. Sit enim primo $a + b - c$ multiplicandum per f , erit factum $= af + bf - cf$, quia ex natura multiplicationis est

$1 : f$

$$1 : f = a : af$$

$$1 : f = b : bf$$

$$1 : f = -c : -cf,$$

et proinde $1 : f = a + b - c : af + bf - cf$ (§. 186. Cor. Geom. Elem.), ex quo patet, esse $(a + b - c) f = af + bf - cf$. Si jam ponatur $f = g + h - k$, erit

$$af = a(g + h - k) = ag + ah - ak$$

$$bf = b(g + h - k) = bg + bh - bk$$

$$-cf = -c(g + h - k) = -cg - ch + ck,$$

ergo factum componitur ut regula poscit. Hinc patet, quomodo absolvatur multiplicatio quantitatis complexae per aliam ejusmodi quantitatem. Primo multiplicantur numeri, deinde signantur facta e quantitatibus per litteras expressis, cumque in his litterarum ordo arbitrarius sit, plerumque observatur ordo, quo litterae in alphabeto se invicem excipiunt, quia per id promptius adparet, quae facta eadem sint, quae diversa. Reperta sic facta partialia, e quibus factum quaesitum componitur, addenda sunt, ut quaesitum quam simplicissime exhibeatur. Hujus calculi specimina sunt sequentia.

$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$	$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline -ab + bb \\ aa - ab \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array}$	$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa - bb \end{array}$
$\begin{array}{r} yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ - 2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \frac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad \cdot \quad - (3 + \frac{1}{2}) aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$		

$$\frac{2ax}{c}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2ax}{c} - r \frac{a^3}{c} \\
 3a + r \frac{abb}{c} \\
 \hline
 \frac{2ax}{c} r \frac{abb}{c} - \frac{aab}{c} \\
 \frac{6aax}{c} - 3a r \frac{a^3}{c}
 \end{array}$$

Factum ita repertum commode secundum dignitates alicujus litterarum sic ordinabitur, ut praecedant ejus litterae dignitates altiores, reliquae gradatim descendendo sequantur; ubi simul observandum est, quod, ubi dimensiones litterae, secundum quas ordinatio fit, non in eadem ubique progressionem arithmetica procedunt, locis vacuis substituatur signum *, quod cyphram hic notare, jam monuimus.

§. 22.

Si quantum complexum per aliud complexum dividendum proponatur, regulis prorsus similibus iis, quibus in Arithmetica Elementari utimur, absolvitur divisio. Sit quantum $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ dividendum per $a + b$. Terminus primus dividendi secundum dignitates alicujus in eodem litterae ordinati dividatur per terminum primum divisoris, pariter secundum dimensiones ejusdem litterae ordinati, quam divisionem facile instituet, qui in memoriam revocat, quod, si factum dividatur per unum factorum, quotus sit factorum alter. Quotus inventus qui hoc casu est a^2 notetur, atque per eundem multiplicetur divisor integer. Factum $a^3 + a^2b$ a dividendo subtrahatur, et residuum iterum eodem modo tractetur, donec vel perveniatur ad residuum, quod per datum divisorem descripto modo dividi amplius nequit, ideoque quoto invento addenda sit fractio, cujus

nume-

numerator est ultimum residuum et denominator divisor; vel ultimum residuum evanescat. Schema calculi hoc est.

<i>Divisor</i>	<i>Dividendum</i>	<i>Quotus</i>
$a + b$	$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ $a^3 + a^2b$ $- 2a^2b - ab^2 + b^3$ $- 2a^2b - 2ab^2$ $ab^2 + b^3$ $ab^2 + b^3$ $0 \quad 0$	$(a^2 - 2ab + b^2$

Fractus numerus, qui forte partem quoti exhibet, hic omitti non semper potest, quemadmodum numeri fracti, qui cum aliis pro quoto prodeunt, si numerus dividatur per numerum, errore admodum parvo subinde negliguntur. Nam et ea fractio, in qua post divisionem ultimam adquievimus, evolvi ulterius potest hunc in modum.

<i>Divisor</i>	<i>Dividendum</i>	<i>Quotus</i>
$a + b$	$aa + 2ab - b^2$ $aa + ab$ $ab - b^2$ $ab + b^2$ $- 2b^2$ $- 2b^2 - \frac{2b^3}{a}$ $+ \frac{2b^3}{a}$ $+ \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{a^2}$ $\frac{2b^4}{a^2}$	$(a + b - \frac{2bb}{a} + \frac{2b^3}{a^2} \text{ etc.}$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{2b^4}{a^2} - \frac{2b^5}{a^3} \\
 \hline
 + \frac{2b^5}{a^3} \\
 + \frac{2bb}{a}
 \end{array}$$

Fit igitur quotus universus sequens, $a + b - \frac{2bb}{a} +$

$\frac{2b^3}{a^2} - \frac{2b^4}{a^3} + \frac{2b^5}{a^4(a+b)}$. Nam et hic fractio ex residuo et divisore negligi non debet, nisi de ejus parvitate constet.

§. 23.

Cum quaevis operatio arithmetica simplex sit methodus, ex dato quanto quodam cognito et ratione mathematica hujus quanti cogniti ad incognitum quantum ipsum hoc quantum inveniendi; patet, omnem mutationem quanti cujuscunque dati, qua vel crescit, vel decrescit, vel ex statu positivo in negativum, vel ex negativo statu in positivum transit, vel alio quocunque modo variatur, esse ejusmodi operationem arithmeticam, dum modo inter quantum, quod ante fuerat datum, et id, quod post mutationem provenit, ratio mathematica concipi, eaque signis analyticis exprimi queat. Inter mutationes istas notatu digna est ea, qua quantitas prorsus evanescit seu nihilum evadit. Habet vero quantitas quaecunque determinatae magnitudinis rationem quandam mathematicam ad nihilum, quia concipi potest modus, quo nihilum fit ex quanto determinato quocunque. Hoc enim continuo decrescendo tandem potest prorsus evanescere. Licet igitur 0 proprie non denotet quantitatem, sed quantitatis defectum, nihilo secius tamen in calculum ingredi potest, quia statum quendam quantitatis indicat, quem subire potest, postquam operatione quadam arithmetica simplici passa est mutationem. Sic nemo unquam negabit, quod numerus 5 a numero 5 subtractus

tractus relinquat nihilum, seu quod sit $5 - 5 = 0$, ex quo porro sequitur, esse $5 + 0 = 5$, et $5 - 0 = 5$. Quæ omnia cum sint evidentissima, ipsam 0 in calculum ingredi posse, certissimum est. Cyphra igitur in additione et subtractione denominator rationis quanti cogniti ad quaesitum, atque in multiplicatione et divisione exponens rationis quanti cogniti ad incognitum esse potest: qui casus peculiarem merentur attentionem.

§. 24.

Quod quidem adtinet ad additionem et subtractionem, calculus nulla prorsus laborabit difficultate. Notiones enim harum operationum clare ostendunt, esse $a + 0 = a$ et $a - 0 = a$, seu quantum cui nihilum additur, vel a quo nihilum subtrahitur, nullam pati mutationem. Gravem vero errat errorem, qui quantum per nihilum multiplicatum vel divisum nullam mutationem pati, contendit. In scholis arithmeticae trivialibus jam docetur, quod numerus per 0 multiplicatus ipse 0 evadat, quod quidem verissimum est, et clare ostendit, aliud esse, *quantum per 0 multiplicare*, aliud vero *quantum plane non multiplicare*. Aliud igitur quoque est, *quantum per 0 dividere*, aliud, *quantum plane non dividere*. Dicimus quidem, in multiplicatione et divisione praeter quantum cognitum dari exponentem rationis ipsius ad incognitum, vere autem datur ratio unitatis ad exponentem; quia multiplicatio est operatio, qua incognitum fit ex cognito uti exponens ex unitate, divisio vero est operatio, qua incognitum fit ex cognito, uti unitas fit ex dato exponente. Sit igitur primo quantitas quaecunque determinata a per 0 multiplicanda, et erit ex notione multiplicationis $1 : 0 = a : a \times 0$. Ideo $a \times 0$ fieri debet ex a , uti 0 fit ex 1. Sed vero 0 non fit ex unitate, nisi eadem plane destruat, proinde et a prorsus debet destrui, ut prodeat $a \times 0 = 0$. Idem quoque exinde patet, quia vi analogiae $0 : 1 = a \times 0 : a$, quantitas a ita componenda est ex $a \times 0$, uti 1 potest ex 0 componi. Sed 1 ex 0 prorsus

fus non componi potest, ideo etiam a ex $a \times 0$ nulla prorsus ratione poterit componi; ex quo luculentissime patet, quod $a \times 0$ non possit non esse $= 0$. Si enim $a \times 0$ poneretur fractioni quantumvis exiguae aequalis, possibile esset, ut a ex eadem aliquoties repetita componeretur, quod demum impossibile fit, si $a \times 0 = 0$ statuatur.

Ex hoc simul patet, esse $\frac{0}{a} = \frac{1}{a} \times 0 = 0$. Deinde sit quantitas a per 0 dividenda, atque ex notione divisionis erit $0 : 1 = a : \frac{a}{0}$, quae analogia indicat primo, esse $\frac{a}{0} > a$, quia sine dubio est $1 > 0$; secundo

patet $\frac{a}{0}$ esse quantitatem omni quanto dabili majorem.

Cum enim unitas ex cyphra quotiescunque repetita componi nullo modo possit; etiam $\frac{a}{0}$ est quantitas, quae ex quanto a non componi potest, quotiescunque id repetatur, ideo $\frac{a}{0}$ non potest non esse quacunque

quantitate dabili major. Ejusmodi quantitas, quae omni quantitate dabili major est, dicitur *quantitas infinita*, seu *infinite magna*, eaque sequenti signo ∞ solet

denotari, ita ut sit $\frac{a}{0} = \infty$. Reliquae quantitates, quae non sunt infinitae, *quantitates finitae* dicuntur.

Quodsi igitur quantitas finita per cyphram dividatur, quotus est infinite magnus.

§. 25.

Ex aequatione $\frac{a}{0} = \infty$ fluit esse $a = 0 \times \infty$ et

T.

$\frac{a}{\infty}$

$\frac{a}{\infty} = 0$, seu *quotus, qui prodit, quantitate finita per infinitam divisa, nihilo aequalis est.* Idem et ex notio-

ne divisionis fluit, vi, cujus est $1 : \infty = \frac{a}{\infty} : a$, ideo a

fit ex $\frac{a}{\infty}$, uti ∞ ex 1 componitur. Sed ∞ ex unita-

te, quotiescunque repetatur, nulla prorsus ratione com-

poni potest, proinde etiam a ex $\frac{a}{\infty}$ nulla prorsus ra-

tione componi poterit: ex quo patet, necessario esse $\frac{a}{\infty}$

$= 0$. Quaecunque enim pro $\frac{a}{\infty}$ sumatur quantitas

utcunque parva, semper possibile manet, ut a ex eadem

componatur, quod demum impossibile est, si $\frac{a}{\infty} = 0$

ponatur. Ob similitudinem, quia fractio $\frac{a}{0}$ est quan-

titas infinite magna, fractio $\frac{a}{\infty}$ dici potest *quantitas*

infinite parva, quae igitur nihil aliud erit nisi quantitas

evanescens seu nihilo aequalis. Tum vero vox quanti-

tas infinite parva, seu quantitas evanescens, non erit ter-

minus derivativus, sed primitivus, quia quantitas infi-

nite parva non est quantitas sed defectus quantitatis. At-

que ejusmodi locutiones tolerari possunt, quia in analy-

si non tam ipsarum quantitatum, quam signorum earun-

dem habetur ratio, neque insolitum sit, ipsa quantorum

signa, quanta vocare, atque proinde signum 0 vel

$\frac{a}{\infty}$ hic tractari soleat, ac si esset quantitas. Quod

qui-

quidem Analystam in errorem inducere non poterit, cum in aliis scientiis termini huic plane similes adhuc frequentius occurrant, neque tamen in errores necessario inducant. Sic bonum apparens, ut in Moralibus vocatur, non est bonum, malum apparens non est malum, nihilo tamen fecius termini isti usu recepti sunt. Definiri solet alias quantitas infinite parva, quod sit quantitas omni quantitate dabili minor, atque ejusmodi quantitas certe non alia esse poterit, nisi quantitas evanescens, seu nulla. Si enim eadem non esset $= 0$, assignari posset quantitas ipsi aequalis, quod est contra hypothefin.



SECTIO II.

DE

SOLVTIONE PROBLEMATVM SIMPLICIVM.

§. 26.

Quando problema aliquod analytice solvendum propositum est, aequatione fundamentali inventa, cognitae quantitates ab incognita ita sunt separandae, ut quantum incognitum solum ex una aequationis parte, quanta vero cognita ex altera ipsius parte consistant. Quantitas vero quaesita, in aequatione fundamentali cum datis secundum conditiones problematis certo modo combinata, aut ad dignitatem quandam prima majorem evecta est, aut non. Aequatio, in qua non nisi dignitas prima quantitatis incognitae occurrit, *aequatio simplex*, et problema, cujus conditiones ejusmodi aequatione exprimi possunt, *problema simplex* vocatur. Quaevis alia aequatio, in qua incognita quantitas ad dignita-

tem prima majorem evecta occurrit, *aequatio non simplex*, et problema, quod ad ejusmodi aequationem conducit, *problema non simplex* in posterum vocabitur. Methodus, ex aequatione simplici inveniendi valorem incognitae quantitatis datarum ope, nihil difficultatis habet. Combinantur enim datae quantitates cum quaesita in aequatione fundamentali vel additione vel subtractione vel multiplicatione vel divisione. Quare cum additio tollatur subtractione et contra, ut et multiplicatio divisione et contra; patet, cognitae quantitates a quaesito separari posse ab eo, qui sequentes observaverit regulas. *Quanta cognita in aequatione fundamentali quaesitae addita utrinque subtrahantur, et quanta cognita a quaesito subtracta utrinque addantur. Quodsi vero quantum quaesitum cognitis multiplicatum vel divisum sit; priori casu iisdem quantis cognitis aequatio utrinque dividatur, posteriori vero multiplicetur.*

§. 27.

Supra quidem monuimus, inventionem aequationis problematis fundamentalis in Analyfi proprie non doceri posse, sed modum eandem inveniendi petendum esse ex disciplinis, ad quas problema propositum pertinet. Sed vero quaestiones arithmeticae, quae circa numeros vel abstractas quantitatum relationes solummodo versantur, omnium sunt facillimae, ac plerumque nihil aliud fere requirunt, quam ut e sermone, in quo proponuntur, transferantur, in characteres supra expositos, qui apti sunt, ut nostros de quantitatum relationibus conceptus designent. Quare cum cujusvis artis natura sit, ut generalibus praeceptis non addiscatur, nisi ad quaedam saltem exempla applicatio fiat, et ideo quorundam problematum solutiones subjungere consultum sit; primo arithmeticas quasdam proponam quaestiones, cum quibus deinde ex aliis quoque disciplinis jungam quaedam sed facillima tantum exempla.

§. 28.

§. 28.

PROBLEMA. I. Mercator quidam a nummis suis quotannis 100 impendit, residuum annuatim triente auget, et post tres annos fit duplo ditior. Quaeritur nummorum numerus.

Quaestio latine enuntiata.

Eadem algebraice.

Mercator habet nummos quosdam, ex quibus anno primo 100 impendit et reliquum ad auget triente, anno secundo expendit 100 et reliquum ad auget triente anno tertio expendit 100 et reliquum auget triente fitque duplo ditior quam sub initio.

$$\begin{aligned}
 & x \\
 & x - 100 \\
 & x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3} \\
 & \frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3} \\
 & \frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9} \\
 & \frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9} \\
 & \frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27} \\
 & \frac{64x - 14800}{27} = 2x
 \end{aligned}$$

Quaestio itaque ad aequationem $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

redigitur, cujus reductione eruendus est numerus x , quod modo fiet sequenti. Multiplicetur utrinque per 27, et fiet $64x - 14800 = 54x$, subtrahantur $54x$, et erit $10x - 14800 = 0$, addatur utrinque 14800, ut sit $10x$

T 3

=:

$= 14800$. Denique dividatur per 10, et habemus $x = 1480$, qui est nummorum numerus quaesitus.

§. 29.

PROBLEMA II. *Dati sunt numeri 20 et 17, invenire tertium, qui a datis ablatus residua relinquat, quae sint in ratione 5 : 4.*

SOLUTIO. Distinguantur data a quaesitis, eumque in finem data prioribus alphabeti litteris, quaesitum aliqua ex ultimis denotetur. Ponatur itaque $20 = a$, $17 = b$, et ratio $5 : 4 = m : n$, numerus quaesitus $= x$, erit per conditionem problematis $a - x : b - x = m : n$. Hinc invenitur aequatio multiplicando media et extrema $(a - x) n = (b - x) m$

$$\text{five } na - nx = mb - mx$$

$$\text{add. } mx = mx$$

$$mx + na - nx = mb$$

$$\text{subtr. } na = na$$

$$mx - nx = mb - na$$

$$\text{id est } (m - n) x = mb - na$$

$$\text{divid. per } m - n = m - n$$

$$x = \frac{mb - na}{m - n}.$$

Problema jam solutum censetur, licet ipse numerus x nondum detectus sit, sed modus tantum, eundem ex datis eliciendi, quia ipsius x inventio expedita est, si pro a , b , m et n substituantur numeri determinati, cum detecta sit formula exprimens, quomodo per operationes arithmeticas simplices mutari debeant, ut quaesito fiant aequales. Sic restitutis valoribus $a = 20$, $b = 17$,

$$m = 5, \quad 4 = n, \quad \text{est } x = \frac{5 \times 17 - 4 \times 20}{5 - 4} = 85 - 80$$

$= 5$, qui numerus, si subtrahatur a datis, relinquuntur 15 et 12, quorum utique ratio est 5 : 4. Caterum ex hoc exemplo clare perspicitur, quantum sit commodum, quod

quod calculo afferunt signa ista universalia, seu species, quibus usi sumus. Non enim tantum ea re breviter et quam clarissime exponitur quantitatium, circa quas quaestio occupatur, connexio atque aliarum ab aliis dependentia, sed et solutio problematis detegitur adeo generalis, ut modus innumera problemata specialia solvendi simul innotescat. Pro signis, quae data denotant, substitui possunt, quaecunque lubet, quantitates aliae, et formula inventa sufficit, in omnibus illis casibus specialibus quaesitum inveniendi. Sic in problemate nostro

posito $a = 7$, $b = 9$, et $m : n = 5 : 6$, erit $x = \frac{3}{-1}$

$= -3$. Si vero a 7 subtrahitur -3 , provenit 10, et -3 a 9 subtracto, invenitur 12, est vero utique $10 : 12 = 5 : 6$.

§. 30.

PROBLEMA III. *Punctum A in linea recta BC versus F.214 punctum B urgetur a viribus datis a, b, et versus partem oppositam C a viribus itidem datis c, d, e. Quaesritur, quae vis illis addenda sit, ut punctum in aequilibrio constitutum quiescat, et versus quam partem.*

SOLVTIO. Aequatio hujus problematis fundamentalis sola Analyfi non invenitur. In Statica, quae est disciplina, ad quam problema pertinet, demonstratur, aequilibrium fore, siquidem summa virium absolute spectatarum, quae versus B agunt, aequalis fuerit summa earum, quae agunt versus C. Si autem vires spectentur cum directionibus suis, aequilibrium erit, si summa omnium algebraica fuerit nihilum. Dicatur igitur vis quaesita, quae prioribus addenda est, $= x$, ponaturque agere versus partem B, eritque ex primo principio $a + b + x = c + d + e$. Si vero secundo uti velimus principio, et vires versus B agentes positivae, adeoque reliquae negativae ponantur, erit $a + b + x - c - d - e = 0$, quarum aequationum quaevis ex altera terminis

transpositis sequitur. Ex utraque autem alia terminorum transpositione concludimus $x == c + d + e - a - b$.

Elegi hoc problema in se quidem facillimum, quo universalis significatio signorum analyticorum adhuc distinctius perspiciatur. Aequationes enim analyticae convenienter reductae ostendunt methodum, quaesitum ex iis, quae per litteras denotantur, quae datorum loco sunt, vel arithmetice vel geometricè eliciendi; arithmetice si data expressa sint per numeros; geometricè, si per lineas rectas exhibeantur, vel alia extensa, quae in Geometria solent considerari, arcus puta, angulos, superficies vel solida. Aequatio, qua x a reliquis separata exhibetur, si rectè intelligatur, utrumque laborem aequè dirigit. Neque enim ad Arithmeticam magis, quam ad Geometriam restricta est. Dentur itaque primo vires quaestionis in numeris sitque $a = 7$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 6$, $e = 3$, erit $x = 5 + 6 + 3 - 7 - 2 = 5$, ergo est affirmativa, ejusque directio cadit versus B. Si manente $a = 7$, $b = 2$, $c = 5$, ponatur $d = 3$, $e = 1$, erit $x = 5 + 3 + 1 - 7 - 2 = 0$. Hoc igitur casu, cum vires datae jam sint in aequilibrio, nulla vi superaddita opus erit. Si vero sit $a = 7$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 3$, $e = 2$, erit $x = 4 + 3 + 2 - 7 - 8 = -6$. Vis igitur ± 6 versus partem C dirigenda est, ut aequilibrium restitatur.

Quodsi vires a , b , c , d , e , per lineas rectas dentur, debeatque x geometricè reperiri, per punctum quodcumque A ducatur recta BC indefinita, ac ponantur lineae esse affirmativae, quae ab A versus C protenduntur: erunt illae, quae ab A versus C protenduntur negativae. Exhibeantur vires per lineas, quibus ad scriptae sunt litterae a , b , c , d , e , atque a puncto A versus B ponatur $AD = c$, a puncto D itidem versus B ponatur $DE = d$, atque a puncto E versus eandem partem $EF = e$, erit $AE = c + d$ et $AF = c + d + e$. Deinde a puncto F ver-

F versus partem oppositam C ponatur $FG = a$, quia hæc a negativa est, et a puncto G iterum versus C ponatur $GH = b$, quia et hæc est negativa. Erit igitur $AG = c + d + e - a$, quæ linea est affirmativa, sed $AH = c + d + e - a - b$ erit negativa, quia ab A versus C protenditur. Haec AH erit in hoc casu quaesita x , quæ evadit $= 0$, si mutatione datorum efficiatur, ut H cadat in A, affirmativa vero, si ita mutantur data, ut H cadat versus B. Si data exhibeantur per arcus circulares, vel angulos, vel superficies, vel solida, similem in modum proceditur. Cum autem linea recta sit simplicissima quantitatum, quæ in Geometria considerantur, atque omnium facillime tractetur, quandocunque problema per lineas rectas solvi potest, arcus, anguli, superficies, solida, merito seponuntur.

§. 31.

PROBLEMA IV. *Trianguli ABC singula latera sunt data. Ex apice anguli A in latus oppositum cadit perpendicularis AD. Reperienda sunt segmenta hujus lateris BD, et DC.*

SOLVTIO. Problema hoc geometricum est, ideo æquationem fundamentalem ejus conditiones exprimentem ipsa Geometria debet suppeditare, quam qui non callet, frustra solutionem tentabit. Sunt propositiones quaedam geometricæ palmariae, quæ ab eo ignorari nullo modo possunt, qui quaestionem geometricam analytice solvere cupit. Talia sunt ea, quæ de similitudine triangulorum, deque comparationibus figurarum planarum ut et solidorum traduntur, et in his præsertim theorema *Sphi* 120. *Geom. Elem.*, quod ab inventore Pythagoricum appellatur. Praeterea circuli attributa propria atque rectarum apud circulos descriptarum, quales sunt chordæ, sinus, tangentes et fecantes, esse debent satis familiaria. Quaestione vero geometrica ad æquationem reducta, methodus, qua ea per analysin solvitur, diversa non est ab illa, qua solvuntur arithmeticæ

F. 215.

quaestiones. Licet signa, quibus in Analyfi utimur, ad Arithmeticam restricta non sint, possintque per terminos geometricos non minus facile, quam per arithmeticos exprimi; nihil tamen impedit, quo minus litteras, quibus data a quaesitis distinguimus, numeros notare ponamus, quibus quantitates istae, siue lineae fuerint, siue superficies aut solida, vel quaecunque aliae ex unitate assumpta exprimuntur, si numeri irrationales non excludantur. Ea re calculus multum facilitatur, dum omnia ad eosdem conceptus redeunt. Sufficit, si ea, quae ultimo producuntur, vocabulis geometricis, ubi opus est, exprimere noverimus. Hoc enim facto ad inventionem quaesiti geometricam manuducimur.

Quod igitur attinet ad problema geometricum propositum, demisso perpendicularo AD ex A ad latus BC fiunt triangula ABD et ACD apud D rectangula. Ex theoremate vero Pythagorico, quod in Geometria Elementari demonstratur, patet esse $ABq - BDq = ADq$, et $ACq - DCq = ADq$, proinde $ABq - BDq = ACq - DCq$, quae est aequatio problematis fundamentalis signis analyticis exprimenda. Sit igitur $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, $BD = x$, erit $DC = a - x$, hinc $DCq = aa - 2ax + xx$, et aequatio problematis fundamentalis erit $bb - xx = cc - aa + 2ax - xx$.

$$\text{Hinc } bb = cc - aa + 2ax$$

$$aa - cc + aa = 2ax$$

$$\text{et } \frac{aa + bb - cc}{2a} = x$$

$$\text{vel } \frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} = x$$

et facto $bb - cc$ resoluta in suos factores $b + c$ et $b - c$, erit

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$$

Aequatio

Aequatio haec ultima non tantum ostendit modum, segmentum quaesitum BD per arithmetice reperiendi, lateribus BC, AB, AC, datis per numeros expressis, sed docet quoque inventionem ipsius BD per lineas in plano descriptas. Enuntiabitur enim ista aequatio geometricae, si dicatur segmentum istud componi, si $\frac{1}{2}a = BE$, dimidium lateris BC, augeatur ipsa $\frac{(b+c)(b-c)}{2a} =$

ED, quarta proportionali ad $2a$ (duplum lateris BC) $b+c$ (summam laterum BA et AC) et $b-c$ (eorundem laterum differentiam), et hoc quidem, si BA ipsa AC maior fuerit. Si enim BA ipsa AC minor sit, erit $b-c$ quantitas negativa, ideoque et $ED = \frac{(b+c)(b-c)}{2a}$

pariter negativa. Ideo hoc casu dicendum est, segmentum BD inveniri, si dimidium lateris BC quarta proportionali ad duplum lateris BC, summam laterum BA et AC, atque eorundem laterum differentiam minuatur. Jam vero inventio quaesiti x per lineas in plano descriptas ultro se offert. Bisectione enim lineae rectae ut et modus ex datis tribus rectis quartam proportionalem inveniendi docetur in Geometria Elementari. In praesenti casu per ipsum problema suppeditatur constructio longe simplicior ea, quam formula algebraica docet. Composito enim ex datis lateribus triangulo ABC demissaque ex A ad BC perpendiculari AD datur BD, Idem et alias saepe evenit, ut Geometria facile detegat, quod formulae algebraicae non sine ambagibus reperire docent. Atque tum nullus alius formularum usus est, quam ut ostendant modum quaesitum arithmetice per numeros exprimendi, si data per numeros expressa sint.

§. 32.

Plures saepius quantitates inveniendas poscit problema algebraicum. Tum vero, si satis determinatum sit problema, ex conditionibus ejusdem tot eruendae sunt aequa-

aequationes fundamentales, quot quantitates incognitae quaeruntur. Una in eam rem aequatio non sufficit, utpote per quam unum tantum quaesitorum determinatur ex caeteris tanquam datis. Si igitur primo duae incognitae quantitates x et y quaerendae proponuntur, ex conditionibus problematis eruendae sunt duae aequationes, quae sint A et B, et quarum quaelibet utramque incognitam involvit. Ex una harum aequationum A quaeratur valor unius quaesitorum x , isque in altera B pro ipso x substituatur, quo facto ex hac aequatione incognita x eliminabitur, atque haec aequatio praeter quaesitam y nullam aliam incognitam continebit. Hujus incognitae y valor ex eadem aequatione B secundum praecpta huc usque tradita jam poterit inveniri. Substitutus hic valor in aequatione A etiam valorem alterius incognitae x determinabit. Simili vero modo tractantur problemata omnia, in quibus et plures duabus incognitae quantitates proponuntur inveniendae. Totidem aequationibus opus est, quot sunt quantitates quaesitae. Sint quantitates istae x, y, z, u , et aequationes A, B, C, D. Quaeratur valor ipsius x ex prima aequatione, eoque in reliquis B, C, D, substituto, littera x ex his aequationibus eliminabitur. Deinde valor litterae y quaeratur ex aequatione, in quam ita mutata est B, ac substituatur in aequationibus, quae ortae sunt ex C, D, ut ex his littera y eliminetur. Tandem valor litterae z quaesitus ex aequatione ex C orta introducetur in eam, quae orta est ex D, quaeque jam praeter u nullam continebit litteram incognitam, cum reliquae jam eliminatae sint. Dabitur igitur per hanc aequationem incognita u , qua reperta regrediendo et reliquae incognitae dabuntur per aequationes praecedentes. Secundum haec solvi potest problema, quod sequitur.

PROBLEMA. *Quaeruntur duo numeri, a quorum posteriori si unitas dematur, addeturque ad priorem, fiat prior*

prior alterius duplus; si vero a priori detracta unitas addatur ad posteriorem, fiant numeri aequales.

SOLVTIO. Sit prior numerus x , alter y , erit per conditiones problematis

$$x + 1 = 2(y - 1) \text{ vel } x + 1 = 2y - 2$$

$$\text{et } x - 1 = y + 1.$$

Quærat^r valor ipsius x ex una harum æquationum, qui ex priori quæsitus erit $x = 2y - 3$. Hic numeri x valor substituatur in æquationum initio repertarum altera, quæ hoc facto mutabitur in eam $2y - 3 - 1 = y + 1$, ex qua jam quantitas x eliminata est, et ex qua deducitur $y = 5$. Detecto sic numero y reperitur x in æquatione $x = 2y - 3$, in locum litteræ y substituendo ejus valorem ita repertum 5, quo fit $x = 10 - 3 = 7$.

Poterat quoque incognita x eliminari *per æqualitatem valorum* ipsius. Si enim ex qualibet æquationum initio repertarum quærantur valores ipsius x , qui erunt $x = 2y - 3$, et $x = y + 2$, hi valores sibi æquales erunt, ideoque novam suppeditabunt æquationem $2y - 3 = y + 2$, alteram tantum incognitam y involventem, ex hac vero æquatione valor ipsius y quæri et in una priorum substitui debet, quo facto et hac via valor utriusque incognitæ ex solis cognitis poterit definiri. Similem methodum etiam in resolvendis quaestionibus, quae plures duabus incognitis poscunt inveniendas, adhiberi posse manifestum est.

§. 33.

Notari hic quoque meretur, quod ex problematis propositi conditionibus eruantur saepe æquationes non simplices, ex quibus tamen idonea reductione altiores incognitae dignitates eliminari, et duæ æquationes non simplices ad unam simplicem unius incognitæ revocari possunt. Specimen hujus rei exhibet sequens.

PROBLEMA. *Trianguli rectanguli ABC, cujus perimeter et area dantur, invenienda est hypotenusa BC.*

SOL.

F.215. **SOL.** Licet unum trianguli ABC latus BC tantum quaeratur, quod dicetur x , potest tamen et AB per litteram y denominatum in æquationem introduci. Quo facto autem duabus opus erit æquationibus, ut littera hæc vicissim eliminari queat. Sit perimeter $AB + BC + CA = a$, erit $AC = a - x - y$. Sit area trianguli $= bb$, atque æquationum, quæ ad solutionem requiruntur, primam dabit idea trianguli rectanguli, alteram suppetabit cognita ejus area. Quia enim $BCq = ABq + ACq$, exinde deducitur prima æquatio $x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2$, vel $0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2$. Area trianguli est $\frac{1}{2}BA \times AC$, id est $\frac{1}{2}y(a - x - y) = bb$, five $2bb = -yy - xy + ay$, et $4bb = -2yy - 2xy - 2ay$, quæ est æquatio secunda. Hujus æquationis membra adduntur membris primæ æquationis hoc modo

$$\begin{array}{r} 0 = 2y^2 + 2xy - 2ay - 2ax + a^2 \\ 4bb = -2y^2 - 2xy + 2ay \end{array}$$

$$\text{eritque } 4bb = -2ax + a^2$$

Ex hac æquatione jam concluditur

$$2ax = aa - 4bb$$

$$\text{atque } x = \frac{aa - 4bb}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a}.$$

Notanda est hæc methodus, qua $2y^2$ ex æquationibus eliminatum est. Singulare enim hoc est, quod $2xy$ est $2ay$ simul exciderint, et raro evenit. Quilibet vero æquationis terminus seorsim per aliam æquationem eliminari semper potest illa methodo, qua hic eliminatus est terminus $2y^2$. Necesse est, in altera illa æquatione litteram eliminandam inesse. Tumque multiplicabitur ea littera sic, ut producatum factum eliminandum, atque in eundem multiplicatorem ducuntur et termini æquationis reliqui, quod ut in casu præfenti contingeret, æquationis $2bb = -yy - xy + ay$ termini omnes duplicati sunt. Interdum quoque dividendi sunt

sunt termini æquationis ejusmodi, vel quoque termini alterius ipsi multiplicandi. Deinde æquationes addendo vel subtrahendo ita uniuntur, ut terminus ita præparatur excidat. Si itaque ex æquatione $mxy - axy = bx^2$ per alteram istam $bcy - 2nxy = 3cfx$ eliminandus est terminus, in quo est xy ; multiplico terminos posterioris æquationis per m , quod xy multiplicat in priori, prioris vero æquationis terminos multiplico per $2n$, qui factor multiplicat xy in posteriori æquatione. Sic prodeunt æquationes

$$2mnxy - 2naxy = 2nbxx$$

$$mbcy - 2mnxy = 3mcfx$$

quibus additis invenitur

$$mccy - 2naxy = 2nbxx + 3mcfx$$

ubi xy non deprehenditur.

§. 34.

Simili operatione repetita duæ æquationes sic uni-ri possunt, ut aliqua ex iis littera penitus excidat. Sint datæ æquationes

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0$$

$$\delta z^2 + \epsilon z + \vartheta = 0$$

sic uniendæ, ut excidat z . Ducta priori in δ et posteriori in $-a$ prodeunt æquationes

$$a\delta z^2 + \beta\delta z + \gamma\delta = 0$$

$$-a\delta z^2 - a\epsilon z - a\vartheta = 0$$

quibus additis fit

$$(\beta\delta - a\epsilon) z + \delta\gamma - a\vartheta = 0$$

in qua æquatione z^2 non inest. Si jam quoque z eliminandum fit, ducatur hæc æquatio in z , ut fiat

$$(\beta\delta - a\epsilon) z^2 + (\delta\gamma - a\vartheta) z = 0$$

sumtaque una ex superioribus, in quibus z^2 pariter inest, illud eliminetur eodem modo. Sumatur itaque

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0$$

$$(\beta\delta - a\varepsilon)z^2 + (\delta\gamma - a\vartheta)z = 0$$

atque multiplicata priori per $\beta\delta - a\varepsilon$ et posteriori per $-a$ fit

$$(\beta\delta - a\varepsilon)az^2 + (\beta\delta - a\varepsilon)\beta z + (\beta\delta - a\varepsilon)\gamma = 0$$

$$\text{et } -(\beta\delta - a\varepsilon)az^2 - (\delta\gamma - a\vartheta)az = 0$$

quibus additis habetur

$$(\beta\delta - a\varepsilon)\beta z - (\delta\gamma - a\vartheta)az + (\beta\delta - a\varepsilon)\gamma = 0$$

in qua z^2 non invenitur.

Ut denique z eliminetur, æquationes duæ, in quibus z^2 non inest, eodem modo tractandæ sunt: quæ quidem si loco $\beta\delta - a\varepsilon$ ponitur κ et π loco $\delta\gamma - a\vartheta$ brevius sic possunt exprimi

$$\kappa z + \pi = 0$$

$$\kappa\beta z - \pi a z + \kappa\gamma = 0$$

Priori jam per $\kappa\beta - \pi a$ et posteriori per $-\kappa$ multiplicata eadem sic mutantur

$$\kappa\kappa\beta z - \pi a\kappa z + \kappa\beta\pi - \pi\pi a = 0$$

$$- \kappa\kappa\beta z + \pi a\kappa z - \kappa\kappa\gamma = 0$$

et facta additione prodit

$$\beta\kappa\pi - a\pi\pi - \gamma\kappa\kappa = 0$$

ficque z prorsus eliminata est. Eodem quoque modo eliminabitur z , si præter z^2 atque z in æquationibus propositis fuerit z^3 vel z^4 vel superior quoque ipsius z potestas; sed labore tanto majori, quo altior est hæc dignitas.

§. 35.

Ceterum ex iis, quæ de æquationibus simplicibus hucusque sunt exposita, patet, quod omnis ejusmodi æquatio simplex reduci possit ad formam $x = A$, ubi A denotat quantitatem ex cognitis utcunque complicatam. Ipsa vero *reductio* absolvitur ea *transpositione*, qua termini, in quibus incognitum inest, in unam æquationis membrum transferuntur, ii vero, in quibus nihil incogniti

gniti inest, in alteram; deinde *unione*, qua auferuntur, quæ sese destruunt et reliquæ, quantum fieri potest, coalescunt, quaque multiplicatores ejusdem quantitatis colliguntur in unum multiplicatorem complicatum; denique *divisione* per multiplicatorem quantitatis incognitæ vel *multiplicatione* per divisorem ejusdem. Verum ut transpositio atque unio legitime absolvi queat, et absque multo labore, copula sæpe auferenda est et terminus complicatus in suos simplices solvendus, atque præterea quilibet denominator tollendus, quo quantitas incognita adficitur. Hoc ultimum cum et aliis modis effici possit, commodissime peragitur multiplicando primum omnes æquationis terminos per unum denominatorem, tum per alterum, deinde per tertium, et sic porro per reliquorum quemlibet, si plures fuerint. Possunt quoque omnes æquationes termini multiplicari per factum ex omnibus denominatoribus, atque denominatores deinde auferri per regulas, quibus fractiones spurix integro æquipollentes reducuntur ad integros.



SECTIO III.

DE

CALCVLO ANALYTICO-TRIGONOMETRICO.

§. 36.

Angulus non ingreditur æquationes, quibus problema geometrica solvuntur, nisi forte cum alio angulo comparetur, quia magnitudo anguli per lineas, superficies vel solida exprimi nequit. Ejus loco semper *ratio* aliqua adhibetur, sic ut dato angulo ponatur ratio

U

ea

ea data esse, et data ratione datus angulus. Scilicet si angulus A detur, ducaturque a puncto B, in aliquo ejus
F.216. laterum utcunque assumpto, ad alterum latus perpendicularis BC, datur ratio $AB : BC$ et ratio $AC : BC$, quæque ex his fluit, ratio $AB : AC$. Determinantur enim per rectam hanc DC omnes trianguli ABC anguli, sic, ut alii prodire non possint, quodcunque laterum AB et AC utcunque productorum punctum sumatur loco B. Fiunt enim omnia triangula ita descripta similia, atque hinc ratio lateris maximi ad latus angulo A oppositum in omnibus eadem atque æqualis est rationi $AB : BC$, et sic rationes reliquæ. Contra si detur ratio $AC : BC$, five per has rectas detur, five per alias quascunque, et connectantur binæ quævis earum rectarum sub angulo recto, si præterea ducatur latus tertium ut AB, triangula nunc quoque similia quoque fiunt, atque hinc anguli A vel B in omnibus iidem. Eodem modo eosdem angulos et per rationem $AB : AC$, vel $AB : BC$ dari, ex iis, quæ de similitudine triangulorum Geometria Elementaris docet, facile apparet. Erit vero $AB : BC$ ratio radii ad sinum anguli A, et $AB : AC$ ratio radii ad ejusdem anguli cosinum, vel ad sinum anguli B. Porro est $AC : CB$ ratio radii ad tangentem anguli A, et $BC : CA$ ratio radii ad tangentem anguli B. Quando autem arcuum vel angulorum sinus, cosinus, tangentes, et cotangentes in calculum introducuntur, non absolutæ tantum quantitatis, sed positionis etiam ejus, quæ per signa + vel — indicatur, ratio haberi debet. Ea enim re arcus quadrante minores vel anguli acuti ab eorum supplementis ad duos quadrantes vel duos angulos rectos distingui possunt.

§. 37.

Quod igitur primo attinet ad sinus arcuum circula-
 ium vel angulorum, qui ab iis arcubus mensurantur;
F.217. patet, quod sinus anguli parvi et ipse parvus fit, tantoque minus discernatur ab arcu suo, quo minor est angulus.

gulus. Crescente autem angulo acuto crescit sinus, estque finis crescendi angulus rectus ACD et quadrans AD , cujus sinus est ipse radius. Ab hoc enim termino si porro crescat angulus et ejus arcus, sinus decrescit sic, ut ad angulum duobus rectis aequalem prorsus evanescat. Ubique autem sinus anguli cum sinu supplementi sui ad duos rectos idem est, unde si FG sinus anguli acuti ACF positivus esse ponitur, etiam sinus anguli obtusi FCB illi supra diametrum contigui et proinde duobus rectis minoris positivus erit. Evanescente angulo ACF etiam sinus ipsius evanescit, sed ejus cosinus æquatur radio. Crescente vero angulo et cum eodem sinu ipsius, cosinus ejusdem anguli decrescit, atque prorsus evanescit, quando angulus æqualis est recto ACD . Ab hoc autem termino si porro crescat angulus, cosinus in parte diametri priori CA opposita denuo crescit, fitque radio æqualis, quando ipse angulus duobus rectis æqualis est. Ideo si cosinus anguli acuti positivus esse ponatur, cosinus anguli obtusi duobus rectis minoris fit negativus. Sinus OP anguli obtusi ACO duobus rectis majoris, et arcus semiperipheria majoris $ADBO$ est negativus et crescit, donec angulus fiat tribus rectis æqualis, quo casu radio negative sumtæ æquatur. Ab hoc termino ulterius crescente angulo, sinus decrescit, donec angulus quatuor rectis et arcus integræ peripheriæ æqualis sit, ubi sinus iterum est $= 0$. Cosinus CP anguli obtusi duobus rectis majoris negativus est et crescente angulo decrescit, donec fiat tribus rectis æqualis, ubi cosinus nihilo æquatur. Ab hoc termino si crescat angulus cosinus iterum fit positivus et crescit, donec angulus sit quatuor rectis æqualis, ubi cosinus iterum radio æquatur.

§. 38.

Circulum cujus diameter est AB et centrum C , in A tangat recta utrinque in indefinitum producta. Diametro AB normaliter insistat alia diameter DE , et apud D eundem circulum tangat
U 2
alia

alia recta pariter indefinita. Quodsi jam in quadrante AD sumatur punctum F quodcunque, atque per F et C ducatur tertia recta, quae duas priores rectas circulum tangentes apud H et I secet; erit AH tangens arcus AF et anguli ACF, et DI tangens arcus FD et anguli FCD, qui est prioris ACF complementum ad angulum rectum. Proinde ID cotangens erit arcus AF quadrante minoris vel anguli acuti ACF. Quodsi igitur tangentium illae, quae cadunt ad partem D diametri AB, pro positivis habeantur, cotangentium vero illae, quae versus partem A diametri DE protenduntur: non tantum tangens anguli acuti, vel arcus quadrante minoris, sed et ejus cotangens erit positiva. Crescente angulo acuto ACF, et proinde puncto F versus D fluente, recta FO circa centrum C convertetur, tangens AH crescet, cotangens vero DI decrescet, donec puncto F cum D coincidente, ubi arcus AF fit quadrans et angulus ACF rectus, tangens AH fit infinite magna, quippe cum recta CH parallela, cotangens DI vero est nihilo aequalis. Si punctum F a termino D porro fluat per quadrantem DB, ubi pervenit in K, recta FO revoluta est in KL, quae rectas circulum tangentes apud M et N fecat. Tangens igitur arcus DK, quo ADK quadrantem excedit, vel anguli DCK, quo angulus ACK rectum excedit, atque adeo anguli ACK vel arcus ADK cotangens, est DM, quae negativa est. Tangens ejus anguli ACK vel arcus ADK alia esse nequit, quam AN, quia KL producta rectam apud arcus initium A circulum tangentem praeter N nusquam fecat. Tangens igitur anguli obtusi duobus rectis minoris pariter ac ejus cotangens est negativa. Anguli obtusi duobus rectis aequalis tangens evanescit, et ejus cotangens est $= -\infty$. Quodsi ab hoc termino ulterius crescat angulus, ejus tangens pariter ac cotangens ex statu negativo indicit in positivum, ille quidem per terminum $= 0$, et hic per terminum $= \infty$ transiens, et quidem tangens crescit, cotangens vero decrescit, donec

donec angulus aequalis evadat tribus rectis, ubi est tangens ipsius $= \infty$ et cotangens $= 0$. Ulterius crescente angulo tangens et cotangens iterum fiunt negativi, cotangens quidem crescendo tangens vero decrecendo, donec ad terminum, ubi angulus quatuor rectis aequalis est, tangens evanescat et cotangens infinita evadat. Sinus anguli denotabitur per *sin*, cosinus per *cos*, tangens per *tang*, et cotangens per *cot*, litteris, quae angulos vel arcus denotant, praescriptis, hunc in modum *sin* A, *cos* A, *tang* A, *cot* A. Radii signum erit *r*, qui tamen in hujusmodi calculis sumitur unitati aequalis, eo quod ratio ipsius ad sinum, tangentem, cosinum et cotangentem eadem perpetuo sit, quicunque sumatur radius.

§. 39.

Quodsi π denotet semicirculum, vel angulum duobus rectis aequalem; erit *sin.* $0\pi = 0$, *cos.* $0\pi = 1$, *sin.* $\frac{1}{2}\pi = 1$, *cos.* $\frac{1}{2}\pi = 0$, *sin.* $\pi = 0$, *cos.* $\pi = -1$, *sin.* $\frac{3}{2}\pi = -1$, *cos.* $\frac{3}{2}\pi = 0$, *sin.* $2\pi = 0$, *cos.* $2\pi = 1$, *tang.* $0\pi = 0$, *cot.* $0\pi = \infty$, *tang.* $\frac{1}{2}\pi = \infty$, *cot.* $\frac{1}{2}\pi = 0$, *tang.* $\pi = 0$, *cot.* $\pi = -\infty$, *tang.* $\frac{3}{2}\pi = \infty$, *cot.* $\frac{3}{2}\pi = 0$, *tang.* $2\pi = 0$, *cot.* $2\pi = -\infty$. Denotante *z* arcum circuli, vel angulum quemcunque, erit *cos.* $z = \sin. (\frac{1}{2}\pi - z)$, *sin.* $z = \cos. (\frac{1}{2}\pi - z)$. Cosinus GC et sinus FC ejusdem anguli ACF perpetuo sunt catheti trianguli rectanguli FCG, cujus hypotenusa est radius CF. Ideo est $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = r^2 = 1$, denotante *z* angulum quemcunque ACF. Praeterea est CA (1) : CG (*cos.* z) = AH (*tang.* z) : GF (*sin.* z), proinde *sin.* $z = \cos z \times$

$$\textit{tang.} z, \textit{tang.} z = \frac{\sin. z}{\cos. z}, \text{ et } \cos z = \frac{\sin. z}{\textit{tang.} z}.$$

$$\text{Porro } CD (1) : CQ (\sin. z) = DI (\cot. z) : FQ (\cos. z) \text{ ideo quoque } \sin. z = \frac{\cos. z}{\cot. z}, \cos z = \sin. z \times$$

$\cot. z; \cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z}$. Denique est $HA : AC = CD$

$: DI$, vel $\tan. z : r = r : \cot. z$, hinc radii quadratum aequale rectangulo ex tangente in cotangentem, ideo-

que $\tan. z \times \cot. z = 1$, $\tan. z = \frac{1}{\cot. z}$ atque $\cot. z =$

$\frac{1}{\tan. z}$.

Quodsi igitur α et β denotent duos angulos diversos quoscunque, erit $\tan. \alpha \times \cot. \alpha = 1 = \tan. \beta \times \cot. \beta$, proinde $\tan. \alpha : \tan. \beta = \cot. \beta : \cot. \alpha$. Tangentes igitur et cotangentes duorum angulorum quorumcunque sunt in reciproca proportionem.

§. 40.

F. 218.

Ex formulis inventis pro sinu cosinu tangente vel cotangente anguli dati simul eliciuntur formulæ pro summa vel differentia duorum angulorum datorum. Sit enim angulus $GAK = \alpha$ et $CAG = \beta$. Ducantur perpendiculares $GI = \sin. \alpha$; $CD = \sin \beta$; $CB = \sin (\alpha + \beta)$, erit $AI = \cos. \alpha$, $AD = \cos. \beta$, et $AB = \cos (\alpha + \beta)$. Ex D ducantur ad BC et AK perpendiculares DE et DH, et fiet $AG : GI = AD : DH$, vel $1 : \sin \alpha = \cos \beta : DH = \sin \alpha \times \cos \beta$, praeterea $AG : AI = CD : CE$ vel $1 : \cos \alpha = \sin \beta : CE = \cos \alpha \times \sin \beta$. Proinde est $CE + DH = CE + EB = \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$. Posito $\alpha = \beta$ habetur finus anguli dupli $\sin. 2\alpha = \sin (\alpha + \alpha) = \sin \alpha \times \cos \alpha + \cos \alpha \times \sin \alpha = 2 \sin \alpha \times \cos \alpha$. Porro est $AG : AI = AD : AH$, vel $1 : \cos \alpha = \cos \beta : AH = \cos \alpha \times \cos \beta$, et $AG : GI = CD : DE$, vel $1 : \sin \alpha = \sin \beta : DE = \sin \alpha \times \sin \beta$. Proinde $AB = AH - BH = AH - DE = \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta$. Posito igitur $\alpha = \beta$, habetur cosinus anguli dupli $\cos 2\alpha = \cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2$. Quodsi quaeratur $\sin (\alpha - \beta)$ et $\cos (\alpha - \beta)$,
angulus

angulus β est negativus cosinu manente positivo; proinde est $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta - \cos \alpha \times \sin \beta$ et $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta + \sin \alpha \times \sin \beta$.

§. 41.

Ex hisce denique inveniuntur formulæ pro tangentibus et cotangentibus summae vel differentiae duorum

angulorum. Est enim $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

$$= \frac{\sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta}{\cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta}, \text{ quae est formula in-}$$

dicans, quo modo ex datis sinibus et cosinibus duorum angulorum invenitur tangens summae eorundem. Potest vero ex eadem elici alia formula exprimens, quo modo ex datis tangentibus angulorum α et β inveniri possit tangens summae eorundem. Est enim $\tan \alpha =$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ hinc } (\tan \alpha)^2 = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2}, \text{ praeterea est } \cos$$

$$\alpha^2 = 1 - \sin \alpha^2, \text{ proinde } \tan \alpha^2 = \frac{\sin \alpha^2}{1 - \sin \alpha^2}; \sin \alpha^2$$

$$= \tan \alpha^2 - \sin \alpha^2 \times \tan \alpha^2, \sin \alpha^2 + \sin \alpha^2 \times \tan \alpha^2 = \tan \alpha^2; (1 + \tan \alpha^2) \sin \alpha^2 = \tan \alpha^2, \sin \alpha^2$$

$$= \frac{\tan \alpha^2}{1 + \tan \alpha^2} \text{ hincque } \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha^2}. \text{ Ul-}$$

$$\text{terius quia } \sin \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2, \text{ est } \tan \alpha^2 = \frac{1 - \cos \alpha^2}{\cos \alpha^2};$$

$$\tan \alpha^2 \times \cos \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2, \tan \alpha^2 \times \cos \alpha^2 + \cos$$

$$\alpha^2 = 1; (1 + \tan \alpha^2) \cos \alpha^2 = 1, \cos \alpha^2 = \frac{1}{1 + \tan \alpha^2},$$

$$\text{ideoque } \cos \alpha = \frac{1}{1 + \tan \alpha^2}. \text{ Sic quoque patet,}$$

$$\text{esse } \sin \beta = \frac{\text{tang. } \beta}{r(1 + \text{tang } \beta^2)} \text{ et } \cos \beta = \frac{1}{r(1 + \text{tang } \beta^2)},$$

quibus valoribus substitutis fiet $\text{tang } (\alpha + \beta) =$

$$\frac{\frac{\text{tang } \alpha}{r(1 + \text{tg. } \alpha^2)} \times \frac{1}{r(1 + \text{tg. } \beta^2)} + \frac{\text{tang } \beta}{r(1 + \text{tg. } \beta)} \times \frac{1}{r(1 + \text{t. } \alpha^2)}}{}$$

$$\frac{\frac{1}{r(1 + \text{tang } \alpha^2)} \times \frac{1}{r(1 + \text{t. } \beta^2)} - \frac{\text{tang } \alpha}{r(1 + \text{t. } \alpha^2)} \times \frac{\text{tang } \beta}{r(1 + \text{t. } \beta^2)}}{}$$

$$= \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{r(1 + \text{tg. } \alpha^2) r(1 + \text{tg. } \beta^2)} : \frac{1 - \text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}{r(1 + \text{t. } \alpha^2) \times r(1 + \text{t. } \beta^2)}$$

$$= \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}. \quad \text{Anguli negativi tangens est}$$

$$\text{negativus, ideo } \text{tang } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta}{1 + \text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}.$$

$$\text{Sic quoque invenitur } \cot (\alpha + \beta) = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} =$$

$$\frac{\cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta}{\sin \alpha \times \cos \beta + \sin \beta \times \cos \alpha} = \frac{1 - \text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}$$

$$\text{atque } \cot (\alpha - \beta) = \frac{1 + \text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}{\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta}.$$

§. 42.

Per haec inveniuntur formulae analyticae angulum vel latus trianguli rectilinei quodcunque exprimentes.

Sit igitur primo triangulum ABC apud C rectangulum,

f. 216. et AB = a, BC = b, CA = c, angulus A = α, et erit

$$a : b = 1 : \sin A, \quad b : c = 1 : \cos A, \quad \text{ideo } \sin A = \frac{b}{a},$$

$$\cos A = \frac{c}{b}, \quad b = a \sin \alpha, \quad c = b \cos \alpha, \quad a = \frac{b}{\sin \alpha},$$

$b = \frac{c}{\cos \alpha}$. Si angulus B ponatur $= \beta$, erit $a : c = 1 :$

$\sin \beta$, et $a : b = 1 : \cos \beta$, proinde $\sin \beta = \frac{c}{a}$, et $\cos \beta$

$$= \frac{b}{a}, c = a \sin \beta, \text{ et } b = a \cos \beta, a = \frac{c}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \beta}.$$

Quodsi in triangulo obliq. ABC quaeratur angulus quicunque ut B, qui ponatur $= \phi$, et simul dati sint reliqui anguli α et c , erit $\phi + \alpha + c = 180^\circ$, proinde $\phi = 180^\circ - (\alpha + c)$, et hinc $\sin \phi = \sin (\alpha + c)$. Si unus tantum ex reliquis datur, simul dari debent duo latera, quae aut angulum datum comprehendent, aut non. Posteriori casu, si datur $AC = a$, $BC = b$, et ang. A $= \alpha$, erit $b : a = \sin \alpha$

$: \sin \phi$, hinc $\sin \phi = \frac{a \sin \alpha}{b}$. Si angulus datus sit

C $= \alpha$ et latera data $AC = a$ et $BC = b$, angulus quaesitus $BAC = \phi$; ducatur BD ad AC perpendicularis, eritque $b : CD = 1 : \cos \alpha$, et $b : BD = 1 : \sin \alpha$, hinc $CD = b \cos \alpha$, et $BD = b \sin \alpha$, hincque porro in figura 219. $AD = a - b \cos \alpha$ et in figura 220. $AD = a + b \cos \alpha$. Praeterea est $AD : BD = 1 : \tan \phi$, proinde in figura 219 $BD = AD \times \tan \phi = (a - b \cos \alpha) \tan \phi$, ex quo

fit $b \sin \alpha = (a - b \cos \alpha) \tan \phi$, et $\tan \phi = \frac{b \sin \alpha}{a - b \cos \alpha}$.

In figura 220 vero est $BD = AD \times \tan \phi = (a + b \cos \alpha) \tan \phi = b \sin \alpha$, ideo $\tan \phi = \frac{b \sin \alpha}{a - b \cos \alpha}$.

§. 43.

Datis omnibus trianguli rectilinei lateribus invenitur angulus quicunque ut $BCA = \psi$ sequentem in modum. Ducatur perpendicularis BD et statuatur angulus $BAC = \phi$, erit $BD = b \sin \psi$, et $BD = c \sin \phi$, $AD =$

$c \cos \phi$, et proinde $DC = a - c \cos \phi = b \cos \psi$, ex quo fit $aa - 2ca \cos \phi + c^2 \cos \phi^2 = bb \cos \psi^2$. Est vero $\cos \psi^2 = 1 - \sin \psi^2$, et ex $b \sin \psi = c \sin \phi$ fit $\sin \psi^2 = \frac{c^2 \sin \phi^2}{bb}$. Proinde est $aa - 2ac \cos \phi + c^2 \cos$

$$\phi^2 = bb \left(1 - \frac{c^2 \sin \phi^2}{bb} \right) = b^2 - \frac{bb \, cc \sin \phi^2}{bb} =$$

$bb - cc \sin \phi^2$, ex quo concluditur $aa - 2ac \cos \phi = bb - cc \sin \phi^2 - cc \cos \phi^2 = bb - cc$ et porro ob $c \cos \phi = a - b \cos \psi$ provenit $aa + 2ab \cos \psi = bb - cc$, atque $\cos$

$$\psi = \frac{aa + bb - cc}{2ab}. \text{ Notandum est, quod hic calcu-}$$

lus adcommodatus fit figurae 219, in qua perpendicularis BD cadit intra triangulum. Quodsi ea extra trian-

gulum cadat, ut in figura 220, manet $b \sin \psi = BD = c \sin \phi$, est vero $c \cos \phi = AD = a + CD = a + b \cos \psi$, proinde $aa + 2ab \cos \psi + bb \cos \psi^2 = cc \cos \phi^2$. Sed

$$\cos \phi^2 = 1 - \sin \phi^2, \text{ et ob } b \sin \psi = c \sin \phi \text{ erit } \sin \phi^2 = \frac{bb \sin \psi^2}{cc}, \text{ ideo est } aa + 2ab \cos \psi + bb \cos \psi^2 = cc$$

$$\left(1 - \frac{bb \sin \psi^2}{cc} \right) = cc - \frac{cc \, bb \sin \psi^2}{cc} = \frac{c^4 - cc \, bb \sin \psi^2}{cc}$$

$$= cc - bb \sin \psi^2. \text{ Ex quo concluditur } aa + 2ab \cos \psi = cc - bb \sin \psi^2 - bb \cos \psi^2 = cc - bb, \text{ } 2ab \cos \psi = cc$$

$$- bb - aa, \text{ et } \cos \psi = \frac{cc - bb - aa}{2ab}. \text{ Jam ex } \cos \psi$$

dato elici potest formula pro sinu ejusdem anguli ψ , quia est $\sin \psi = r(1 - \cos \psi^2) = r(1 + \cos \psi)(1 - \cos \psi)$. Deducitur vero ex formula pro $\cos \psi$ § praec. inventa

$$1 + \cos \psi = \frac{2ab + aa + bb - cc^2}{2ab} = \frac{(a + b)^2 - cc}{2ab} =$$

$$\frac{a + b}{2}$$

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}, \text{ atque } 1 - \cos \psi = \frac{2ab - aa - bb + cc}{2ab}$$

$$= \frac{cc - (a-b)^2}{2ab} = \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}. \text{ Ergo habemus}$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2ab}.$$

Ex his simul patet, quomodo ex datis singulis trianguli ABC lateribus $AC = a$, $BC = b$, et $AB = c$ inveniri potest area trianguli ABC. Est enim haec area $= \frac{1}{2} AC$

$$\propto BD = \frac{ab \sin \psi}{2}, \text{ ob } BD = b \sin \psi. \text{ Praeterea posi-}$$

$$\text{ta hac area} = m^2, \text{ ut sit } m^2 = \frac{ab \sin \psi}{2}, \text{ vicissim se-}$$

$$\text{quitur, esse } \sin \psi = \frac{2m^2}{ab}, \text{ quae formula exhibet mo-}$$

dum ex data trianguli area et duobus lateribus invenien-
di angulum ab hisce lateribus comprehensum.

§. 44.

Sphaerica triangula multis gaudent proprietati-
bus admodum similibus iis, quae planis triangulis com-
petunt, (*conferantur* §§. 59-94 *Geom. cum* §. 267-310. *Geom.*). Haec causa est, cur excogitata fuit methodus
ex datis tribus hujusmodi trianguli peripheriae partibus per
calculus inveniendi reliquas, cujus regulae ob similitudi-
nem cum trigonometria plana dici vulgo solent *Trigonome-*
tria Sphaerica. Regulas hujus methodi hoc demum com-
plete explicare possumus loco, quia jam apud arcuum vel
angulorum sinus, cosinus, tangentes et cotangentes non
absolutae tantum quantitatis, sed positionis etiam ejus, quae
per signa + vel - indicatur rationem habere possumus.
Quod igitur primo attinet ad triangula sphaerica sive so- F.221.
lida rectangula, sit NCMR tale cujus omnia latere qua- 222.
drante

P.221. drante minora sunt, et proinde anguli praeter rectum R

222. acuti. Sit RM in plano RCM rectae MC perpendicularis, atque per eandem ponatur planum NRM ad planum RCM perpendiculare. Est vero quoque planum NRC eidem RCM rectum. Hinc recta NR plano RCM est perpendicularis, et anguli NRC, NRM recti. Praeterea MC in plano RCM plano NRM recto communi intersectioni RM perpendicularis plano NRM et ideo recta NM est perpendicularis. Proinde triacula NRC, RCM, NCM, et NRM omnia sunt rectangula, atque angulus M trianguli plani NMR idem est cum angulo M trianguli solidi sive sphaerici NCMR. Quodsi jam haec triacula ut in fig. 222 in planum explicentur, atque eadem, quibus in triangulo solido signata sunt, litterae adponantur; ex triangulis RCM et NCM concluditur

$$MN : MR = \text{tang } H : \text{tang } B (\S. \text{Cor. Calc. Ext.})$$

atque ex triangulo NRM erit

$$MN : MR = r : \cos M$$

proinde I, $r : \cos M = \text{tang } H. \text{tang } B.$

et quia denominationes M et N permutari possunt, si B dicatur P, et P habeatur pro B, M manente H, erit quoque $r : \cos N = \text{tang } H : \text{tang } P.$ Atque ex hisce analo-

giis concluditur formula $\text{tang } H = \frac{\text{tang } P}{\cos N} = \frac{\text{tang } B}{\cos M}$

posito $r = 1$, quod hoc loco semper supponimus. Quodsi nunc NC, quae in figura bis occurrit, habeatur pro radio, ex triangulis NRC, NMC fit $NM : NR = \sin H : \sin P,$

atque ex triangulo NRM colligitur

$$NM : NR = r : \sin M$$

ergo est II, $r : \sin M = \sin H : \sin P,$

et denominationibus M, N, B, P inter se permutatis

$$r : \sin N = \sin H : \sin B.$$

Unde formula $\sin H = \frac{\sin B}{\sin N} = \frac{\sin P}{\sin M}.$

Si RC fiat radius in eadem fig. ex triangulis NCR, RCM deducimus

$$RM : RN = \sin B : \tan P$$

atque ex triangulo NRM analogiam sequentem

$$RM : RN = r : \tan M$$

ergo est III, $r : \tan M = \sin B : \tan P$
et permutando denominationes

$$r : \tan N = \sin P : \tan B.$$

$$\text{ergo } \tan M = \frac{\tan P}{\sin B}, \text{ et } \tan N = \frac{\tan B}{\sin P}.$$

§. 45.

Jam ex analogia II sub utrisque denominationibus

$$r : \sin H = \sin M : \sin P$$

$$r : \sin H = \sin N : \sin B$$

sequitur $\sin B : \sin N = \sin P : \sin M$, quae cum tertia repertarum

$$r : \sin B = \cot P : \cot M$$

comparata dat $r : \sin N = \sin P \times \cot P : \sin M \times \cot M$:

Quia vero $\sin P \times \cot P = \cos P$ et $\sin M \times \cot M = \cos M$ (§. 39.) erit IV, $r : \sin N = \cos P : \cos M$
et mutando denominationes $r : \sin M = \cos B : \cos N$.

$$\text{Hinc } \sin N = \frac{\cos M}{\cos P} \text{ et } \sin M = \frac{\cos N}{\cos B}.$$

Ex analogia III porro habemus $r : \sin B = \tan M : \tan P$, atque, ob $\tan M \times \cot M = \tan P \times \cot P$, exinde deducitur $r : \sin B = \cot P : \cot M$, vel $\cot M : \cot P = \sin B : r$, praeterea est ex analogia II. $\sin M : \sin P = r : \sin H$, et proinde $\sin M \times \cot M = \sin P \times \cot P = \sin B : \sin H$, vel $\cos M : \cos P = \sin B : \sin H$, haec analogia cum I.) $r : \cos M = \cot B : \cot H$ comparata praebet $r : \cos P = \sin B \times \cot B : \sin H \times \cot H$ vel $r : \cos P = \cos B : \cos H$, ideo

$$\cos P = \frac{\cos H}{\cos B}.$$

Denique

Denique componendo rationes analogiae I,

$$r : \cos M \equiv \cot B : \cot H,$$

cum rationibus analogiae II,

$$\sin M : \sin P \equiv r : \sin H$$

et analogiae III, mutatis denominationibus

$$\sin P : r \equiv \cot N : \cot B$$

elicitur analogia $\sin M : \cos M \equiv r \times \cot N : \sin H \times \cot H$, sed $\sin M : \cos M \equiv r : \cot M$ et $\sin H \times \cot H \equiv r \times \cos H$, proinde VI, $r : \cot M \equiv \cot N : \cos H$, et $\cos H \equiv \cot M \times \cot N$.

§. 46.

Inventæ igitur sunt sex analogiae principales, et quatuor aliae ex illis permutatione denominationum deductae; atque decem istae analogiae omnes combinationes eorum continent, quae in triangulo sphaerico rectangulo tanquam data vel quæsitae possunt occurrere. In quovis enim ejusmodi triangulo præter angulum rectum quinque considerandae veniunt perimetri partes B, P, H, M, N. Ex duabus vero quibuslibet earum cum angulo recto, datis inveniendae est tertia, atque in analogiis decem repertis singulae tres earum partium habentur, cuia quinque litterarum H, B, P, M, N, singulae tres sequentibus decem modis tantum combinari possunt

BPH	BHM	BMN	PHM	PMN	MNH.
BPM	BHN		PHN		
BPN					

Cum itaque omnes istae combinationes in analogiis repertis occurrant; primus analogiae terminus semper sit radius, atque ex tribus analogiae terminis semper reperitur quartus; utique per has analogias, datis præter angulum rectum duobus quibuslibet in triangulo sphaerico rectangulo, five lateribus five angulis, five latere et angulo dabuntur reliqua. Quod ut eo distinctus adpareat decem analogiae inventae hic separatim adscriptae sunt.

Analogiae principales.

$$\text{I. } r : \cos M \equiv \text{tang } H : \text{tang } B = \cot B : \cot H$$

$$\text{II. } r : \sin H \equiv \sin M : \sin P$$

$$\text{III. } r : \sin B \equiv \text{tang } M : \text{tang } P = \cot P : \cot M$$

$$\text{IV. } r : \sin N \equiv \cos P : \cos M$$

$$\text{V. } r : \cos B \equiv \cos P : \cos H$$

$$\text{VI. } r : \cot M \equiv \cot N : \cot H$$

Reliquae ex prioribus permutatione denominationum deductae :

$$\text{VII. } r : \cos N \equiv \text{tang } H : \text{tang } P = \cot P : \cot H$$

$$\text{VIII. } r : \sin H \equiv \sin N : \sin B$$

$$\text{IX. } r : \sin P \equiv \text{tang } N : \text{tang } B = \cot B : \cot N$$

$$\text{X. } r : \sin M \equiv \cos B : \cos N.$$

§. 47.

Si in triangulo sphaerico rectangulo data fuerint aliqua latera quadrante majora, et anguli recto majores; solvi debet loco hujus trianguli illi contiguum §. 309. *Cor. 6. Geom.*, cujus omnia latera quadrante minora, et anguli praeter rectum acuti sunt, cujus quidem latera, cum sint laterum prioris trianguli complementa ad duos rectos, et anguli angulorum; eosdem cum illis sinus atque tangentes habent. Et quia jam latera horum triangulorum quaesita aliquando quadrante majora sunt, aliquando minora, et anguli aliquando recto majores, aliquando minores, utrum horum in quolibet casu proposito locum habeat, per theoremata §. 308. et 309. *Geom.* definitur. Vel, quia cosinus, tangentes atque cotangentes arcuum quadrante majorum vel angulorum, obtusorum, semicirculo et duobus rectis non majorum, negativi fiunt, si cosinus, tangentes, atque cotangentes arcuum quadrante minorum, atque angulorum acutorum pro positivis habeantur: distinguantur cosinus, tangentes, atque cotangentes, qui ad angulos acutos pertinent, ab iis, quorum anguli sunt obtusi, signis + et — elicieturque secundum regulas algorithmi speciosi signum quae-

fiti, quod si $+$ fuerit, erit quaesitum quadrante, vel recto minus, majus contra si ejus signum $-$ prodierit. Sed sinus positivus ad angulum obtusum aequae pertinens ac acutum illi supra diametrum contiguum, latus vel angulum quaesitum ambiguum relinquit, nisi ex §§. cit. determinetur. Omnibus vero examinatis iis solum casibus, quod quaeritur ambiguum prodire patet, quibus data sunt M, P , vel quod eodem redit N, B , atque hujus rei ratio est, quod ex his datis semper duo triangula rectangula diversa construi possunt (§. 301. *Geom.*). Caeterum ex repertis analogiis ea, quae datum quemcunque casum specialem solvit, facile eligitur. Si data sint M et B , ac quaeratur N , erit per analogiam X , in qua litterae hae occurrunt $r : \sin M = \cos B : \cos N$. Si vero ex datis M et N quaeratur P , patet, ex analogia IV inferendum esse $\sin N : \cos M = r : \cos P$, et sic in reliquis.

§. 48.

F. 164. Si in triangulo sphaerico obliquangulo MQm , datis tribus quibuslibet, sive lateribus, sive angulis, sive
166. angulis et lateribus, quaerantur reliqua; ducto latere QR ex aliquo angulorum trianguli ad latus oppositum perpendiculari, applicentur analogiae repertae ad utrumque triangulorum rectangulorum, quae ita ortae sunt. Atque ex analogia II . erit

$$R : \sin H = \sin M : \sin P$$

$$\text{et } R : \sin b = \sin m : \sin P. \quad \text{Ergo}$$

$$I) \sin H : \sin b = \sin m : \sin M.$$

In omni itaque triangulo sphaerico sinus laterum sunt, ut sinus angulorum iisdem oppositorum

Deinde ex analogia III

$$r : \sin B = \tan M : tP$$

$$r : \sin b = \tan m : tP, \text{ ergo}$$

$$II.) \sin B : \sin b = \tan m : \tan M = \cot M : \cot m$$

Si itaque in triangulo sphaerico obliquangulo ex apice unius anguli ad latus oppositum cadat arcus perpendicularis

pendicularis, sinus segmentorum tangentibus angulorum adjacentium sunt reciproce et eorum cotangentibus directe proportionales.

Ex analogia IV

$$r : \sin N = \cos P : \cos M$$

$$\text{et } r : \sin n = \cos P : \cos m, \text{ ideo}$$

$$\text{III) } \sin N : \sin n = \cos M : \cos m$$

Ergo sinus angulorum, in quos angulus basi oppositus a perpendicularo secatur, sunt ut cosinus angulorum ad basin.

Hinc porro concluditur

$(\sin N + \sin n) : (\sin N - \sin n) = (\cos M + \cos m) : (\cos M - \cos m)$ sed §. 15. Calc. Ext. est $(\sin N + \sin n) : (\sin N - \sin n) = \tan(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \tan(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n)$, atque si complementa arcuum M et N denotentur per cM et cN, erit similem ob rationem $(\cos M + \cos m) : (\cos M - \cos m) = \tan(\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \tan(\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$. Ergo

$$\text{IV.) } \tan(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : \tan(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n) = \tan(\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \tan(\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm).$$

Ex analogia V porro concluditur

$$r : \cos P = \cos B : \cos H$$

$$\text{et } r : \cos P = \cos b : \cos h, \text{ proinde}$$

$$\text{V.) } \cos B : \cos b = \cos H : \cos h$$

Ergo cosinus segmentorum B et b proportionales sunt cosinibus laterum H et h adjacentium.

Ex hac vero analogia fluit

$$(\cos B + \cos b) : (\cos B - \cos b) = (\cos H + \cos h) : (\cos H - \cos h) \text{ unde ut ante concluditur}$$

$$\text{VI.) } \tan(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : \tan(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb) = \tan(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : \tan(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$$

Denique ex analogia VII habemus

$$r : \cos N = \tan H : \tan P$$

$$r : \cos n = \tan b : \tan P,$$

$$\text{proinde } \cos N : \cos n = \tan b : \tan H = \cot H : \cot b.$$

Cosinus itaque angulorum N et n tangentibus laterum b

X

et

et H reciproce et eorum contangentibus directe sunt proportionales.

§. 49.

Quodsi jam id, quod quaeritur, five latus sit, five angulus, dicatur Q, quod quaesito opponitur O, quae quaesito utrinque adjacent, sic ut inter ea quaesitum intercipiatur, K, k, et ea, inter quae intercipitur quaesito oppositum P, p, ponendo litteras minores ad unam partem, majores ad alteram, sic ut P, K, sibi mutuo contigua sint, ut et p, k; quinque prodeunt litterae, K, k, P, p, O, quarum tres data in quolibet casu notabunt, cum quaesitum sit ubique Q. Ex quinque litteris istis tres combinari possunt decem modis sequentibus

KkP	KPp	KpO	kPp	kpO	PpO.
Kkp	KPO		kPO		
KkO					

Litterae autem K, k, simul cum P, p, invicem permutatae, casus revera diversos non exhibent, quia nihil interest, ad quam partem litterae istae primum scribantur, modo reliquus ordo conservetur. Coincidit ergo combinatio prima cum secunda, quarta cum septima, quinta cum nona, sexta cum octava, ac reliquuntur tantum sex combinationes, casus diversos notantes, qui quidem, cum quaesitum vel latus sit, vel angulus, duodecim in universum dant quaestiones ita solvendas.

§. 50.

F.223.

PROBL. I. *Datis duobus angulis cum latere uno angulorum opposito, quaerere latus alteri oppositum.*

Data sunt K, P, O, vel k, p, O, et latus Q invenitur ope analogiae

$$\sin K : \sin P = \sin O : \sin Q$$

$$\text{vel } \sin k : \sin p = \sin O : \sin Q \text{ (§. 48.).}$$

PROBL. II. *Dantur duo anguli et latus uno angulo oppositum, quaerere latus inter datos angulos interceptum.*

Data

Data sunt K, k, P vel k, K, p . Ad latus quæsitum Q cadat perpendicularis OR , erunt in triangulo MNR rectangulo data M et H , ac B invenitur ope analogiæ $r : \cos M = t. H : t. B$. Tumque porro cognito B invenitur b ex §. 48. inferendo $tang. m : tang. M = \sin B : \sin b$, et latus quæsitum est $= B \pm b$. conf. §. 310. Cor. Geom.

PROBL. III. *Dantur duo latera et angulus ab iisdem non comprehensus, invenire latus tertium.*

Data sunt P, K, p , vel p, k, P . Ad latus quæsitum demisso arcu perpendiculari, in triangulo rectangulo MNR data sunt M et H , et proinde habetur B ex analogia $r : \cos M = tang H : tang B$. Atque tum alterum lateris quæsitum segmentum b ex analogia $\cos H : \cos b = \cos B : \cos b$. Fitque $Q = B \pm b$.

PROBL. IV. *Datis duobus angulis et latere comprehenso invenire unum ex lateribus reliquis.*

Data jam sunt K, P, O , vel k, p, O . Ad latus incognitum non quæsitum cadat perpendicularis KR , atque in triangulo rectangulo KOR data sunt M et H proinde invenitur N ex analogia $r : tang M = \cos H : \cot N$. Quia jam $K = N \pm n$, erit $n = K \mp N$. Tumque latus quæsitum Q sive b ex analogia VII, quæ erat $\cos. n : \cos N = t. H : t. b$. F. 224.

PROBL. V. *Dantur duo latera cum angulo comprehenso, et quaeritur tertium latus.*

Datis litteris P, p, O , vel p, P, O , denotatis, ad unum datorum laterum ex angulo opposito cadat perpendicularis KR , atque in triangulo MNR rectangulo data sunt M et H , ex quibus invenitur B per analogiam $r : \cos M = tang H : tang B$. Est vero $p = B \pm b$, et proinde $b = p \mp B$. Latus itaque Q sive b jam reperitur inferendo $\cos B : \cos. b = \cos H : \cos. b$.

PROBL. VI. *Dantur tres anguli, et quaeritur unum latus.*

Hic casus est K, k, O , vel k, K, O . Ad unum latus a quæsito diversum si cadat arcus perpendicularis KR ,

inveniuntur anguli N et n ex analogia $t (\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : s. (\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm) = t. (\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}n) : t. (\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}n)$. Atque reperto sic angulo n in triangulo mnr rectangulo data sunt m et n , ex quibus habetur b inferendo $t. m : r = \cot n : \cos. b$.

§. 51.

PROBL. VII. *Dantur duo latera, et angulus uni eorum oppositus, invenire angulum alteri oppositum*
 P.225. Hoc casu data sunt K, p, O , vel k, P, O , isque facile absolvitur inferendo.

$$\sin K : \sin. p = \sin O : \sin Q$$

$$\text{vel } \sin. k : \sin P = \sin O : \sin Q.$$

PROBL. VIII. *Datis duobus angulis et latere uno eorum opposito invenire angulum tertium.*

Data sunt p, P, K vel P, p, k . Ex apice anguli quæsit ad latus oppositum cadat arcus perpendicularis, atque in triangulo MNR rectangulo ex datis M et H reperitur N inferendo $r : \tan M = \cos H : \cot N$, tumque angulus n' concludendo $\cos M : \cos. m = \sin N : \sin. n$, fitque $Q = N \pm n$.

PROBL. IX. *Dantur duo latera et angulus uni oppositus invenire angulum a lateribus comprehensum.*

Datis jam K, k, P , vel k, K, p , iterum ex apice quæsit anguli ad oppositum latus demisso perpendiculari in triangulo rectangulo MNR ex datis M et H reperitur N , si inferatur $r : \tan M = \cos H : \cot N$, atque tum angulus n ope analogiæ $\tan. b : \tan H = \cos N : \cos. n$, estque $Q = N \pm n$.

PROBL. X. *Dantur duo anguli cum latere interjacente invenire angulum tertium.*

P.226. Datis nunc P, p, O , vel p, P, O , ex apice unius angulorum datorum si cadat perpendicularis PR ad latus oppositum, in triangulo rectangulo MNR ex datis M et H concluditur $r : \tan M = \cos H : \cot N$. Invento sic angulo N , quia est $P = N \pm n$, habetur $n = P \mp N$.

Tum

Tum inferendo $\sin N : \sin n = \cos M : \cos m$, cognitus erit angulus m quæsitus.

PROBL. XI. Dantur duo latera cum angulo comprehenso, inveniri debet unus angulorum reliquorum.

Data sunt p, k, O , vel P, K, O . Ad unum datorum, laterum cadat perpendicularis PR , atque in triangulo MRM rectangulo ex datis M et H per analogiam $r : \cos M = \tan H : \tan B$ reperitur B . Est vero $k = B \pm b$, et proinde $b = k \mp B$. Tum inferendo $\sin b : \sin B = \tan M : \tan m$, habetur angulus quæsitus m .

PROBL. XII. Dantur omnia trianguli latera, inveniendus est angulus.

Data jam sunt K, k, O , vel k, K, O . Ex apice unius anguli a quæsito diversi ad oppositum latus ducto arcu perpendiculari habetur analogia $t. (\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}cb) : t. (\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}cb) = t. (\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : t. (\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$, ex qua inveniuntur B et b . Tumque in triangulo rectangulo mnR ex datis b et B invenitur m concludendo $\tan b : \tan B = r : \cos m$.

Cæterum ea, quæ per has regulas quaeruntur non semper plane determinata prodeunt, sed hic quoque interdum ambiguum relinquitur, an latus quadrante majus vel minus, angulus vero acutus vel obtusus sit. Quod quidem non vitio quodam regularum contingit sed eo, quod per eadem data interdum indifferenter duo triangula sphærica determinantur. Conferenda igitur ea sunt, quæ §. 299. 301. 310. *Geom.* et §. 46. *Anal.* exposita sunt.

§. 52.

Deduci possunt ex hisce triangulorum sphæricorum proprietatibus formulæ algebraicæ latera vel angulos ejusmodi trianguli ex reliquorum finibus, cofinibus, tangentibus et cotangentibus definientes, quarum formularum unam expositis subjungere consultum erit, eamque adeo universalem, ut ex eadem sola omnia trigonometriae sphæricæ præcepta tanquam consectaria deriva-

¶.227. ri queant. Dico quod in triangulo sphærico quocunque

$$ABC \text{ fit } \cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB}, \quad \text{Ex apice}$$

enim anguli B ad latus AC oppositum cadat arcus perpendicularis BD, eritque in triangulo rectangulo ABD, $\therefore \tan AB = \cos A : \tan AD$ (§. 46. Anal. I.) vel $\tan AD = \tan AB \times \cos A$. Sed $\sin AD = \cos AD \times \tan AD$ (§. 39.) ideo $\sin AD = \cos AD \times \tan AB \times \cos A$. In triangulo ABC præterea est $\cos DC : \cos AD = \cos BC : \cos AB$ (§. 48. Anal. V.) vel $\cos DC \times \cos AB = \cos BC \times \cos AD$, atque $\cos DC = \cos (AC - AD) = \cos AC \times \cos AD + \sin AC \times \sin AD$ (§. 50.). Substituto itaque valore pro $\sin AD$ supra invento fit $\cos DC = \cos AC \times \cos AD + \sin AC \times \cos AD \times \tan AB \times \cos A$, atque hoc valore pro $\cos DC$ substituto invenitur $\cos AC \times \cos AD \times \cos AB + \sin AC \times \cos AD \times \tan AB \times \cos A \times \cos AB = \cos BC \times \cos AD$. Jam utrinque per $\cos AD$ diviso et $\sin AB$ loco $\tan AB \times \cos AB$ substituto habetur $\cos AC \times \cos AB + \sin AC \times \cos A \times \sin AB = \cos BC$, unde concluditur $\sin AC \times \cos A \times \sin AB = \cos BC - \cos AC \times \cos AB$

$$\text{et } \cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \times \cos AB}{\sin AC \times \sin AB}. \quad \text{Hinc simul est}$$

$$\cos B = \frac{\cos AC - \cos AB \times \cos BC}{\sin AB \times \sin BC},$$

$$\cos C = \frac{\cos AB - \cos AC \times \cos BC}{\sin AC \times \sin BC}.$$

Tres istae æquationes omnes sex trianguli sphærici peripheriae partes continent, nimirum angulos A, B, C, et latera AB, BC, AC. Ideo datis tribus tres in illis æquationibus sunt quantitates incognitæ, quæ ex iisdem inveniuntur, modo §. 32. exposito.



SECTIO IV.

DE

AEQVATIONIBVS NON SIMPLICIBVS PURIS.

§. 53.

Aequatio non simplex vocatur *quadratica*, *cubica*, *biquadratica*, *quinti ordinis*, *sexti ordinis*, etc. prouti maxima quantitatis incognitae dimensio est vel dignitas secunda vel tertia vel quarta etc. Incognita autem quantitas aut ubique ad unam eandemque dignitatem mathematicam evecta est, aut non. Si prius, æquatio non simplex dicitur *pura*, si vero posterius, vocatur *affecta*. Praeterea in æquatione composita affecta aut omnes quanti incogniti dignitates a maxima, ad quam in æquatione assurgit, usque ad primam occurrunt, aut non. Si prius æquatio affecta dicitur *completa*, si posterius *incompleta* vocatur. De æquationibus non simplicibus puris conjunctim agi potest, reliquae his multo difficiliore separatiim erunt considerandae. Quaecunque autem sit æquatio non simplex pura, et quomodocunque ex incognita et cognitis composita, reduci tamen semper potest secundum praecepta hucusque tradita ad formam sequentem $x^n = A$, quamcunque quantitatem denotet A , et quomodocunque compositam, dummodo in eadem incogniti nihil insit. Ponendo enim $x^n = y$, æquatio non simplex pura mutatur in simplicem, quæ tum ita mutanda est, ut y ex una ipsius parte solitarie consistat, ex altera vero parte quantitas ex solis cognitis composita, quæ ponatur $= A$, erit $y = A$, restituto valore x^n pro y , fiet $x^n = A$. Sunt igitur æquationes puræ istæ quoque, in quibus $(x + a)^n = A$, vel $(x - a)^n = A$,

A , vel $(a - x)^n = A$, utpote quæ, si $x + a$, vel $x - a$, aut $a - x$ dicatur $= z$, eandem formam induunt $z^n = A$. Aequatio ergo quadratica $x + 2ax + a^2 = A$, pura erit, et sic aliae.

§. 54

Reducta igitur fit aequatio non simplex pura ad formam $x^n = A$, erit $x = \sqrt[n]{A}$. Adeoque si $n = 2$, erit $x = \sqrt{A}$, si $n = 3$, est $x = \sqrt[3]{A}$, et ita in reliquis. Jam cum sit $+a \times +a = -a \times -a = +aa$, seu quod idem est $+\sqrt{aa} \times +\sqrt{aa} = -\sqrt{aa} \times -\sqrt{aa}$; radix quadratica cujuscunque quantitatis duplicem habet valorem, alterum positivum, alterum negativum, qui tamen absolute spectati sibi sunt æquales. Ad hoc indicandum Analystae ejusmodi radici praefigunt signum $\pm$, et dicunt, esse $\sqrt{aa} = \pm a$. Praeterea, si a denotet quantitatem quamcunque, omnes ipsius dignitates, sive exponentes sint numeri pares, sive impares, inveniuntur positivae, si radix a positiva sit. Si vero a sit quantitas negativa $-a$, et nunc quoque omnes dignitates, quarum exponentes sunt numeri pares, fiunt positivæ, illæ autem, quarum exponentes sunt numeri impares, negativæ inveniuntur. Ex hoc autem porro sequitur, quod radix cujuscunque dignitatis, cujus exponens est numerus par, etiam duplicem habeat valorem, unum positivum, alterum negativum, priori absolute spectato æqualem, cum e contrario radix cujuscunque potestatis exponentis imparis unicum tantum habeat valorem, positivum nimirum, si ipsa dignitatis sit positiva, negativum, si dignitas sit negativa. Sic $\sqrt[3]{a^3} = a$, et $\sqrt[3]{-a^3} = -a$, $\sqrt[5]{+a^5} = +a$, et $\sqrt[5]{-a^5} = -a$. Si igitur generaliter in formula $\sqrt[n]{A} = x$, A sit quantitas negativa, et n numerus impar, $\sqrt[n]{A}$ unicum tantum habet valorem realem eumque

eumque negativum. Verum si A sit quantitas negativa, atque n fuerit numerus par, nulla dabitur quantitas, quæ huic expressioni $\sqrt[n]{A}$ respondeat. Sive enim ea quantitas positiva esse ponatur, sive negativa, semper dignitates exponentium parium, quarum aliquam notare ponitur A , positivæ fiunt. Quare si $\sqrt[n]{-A}$ notare ponatur a , hæc a neque positiva erit, neque negativa, ergo impossibilis.

§. 55.

Quantitas *algebraice rationalis* est, quæ absque signis radicalibus vel potentiarum exponentibus fractis exhiberi potest: quantitas autem, quæ absque signis radicalibus vel potentiarum exponentibus fractis exhiberi nequit, *algebraice irrationalis* dicitur.

Sic $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt[3]{a^3b}$, et alia huiusmodi sunt quantitates algebraice irrationales. Contra $\sqrt{a^2}$ est quantitas algebraice rationalis, quia idem deno-

tat, quod a , ut et $\sqrt{(aa+2ab+bb)}$, $\sqrt[3]{a^6}$, et huiusmodi alia. Alias in Arithmetica illi numeri, qui unitati suæ sunt incommensurabiles, irrationales dicuntur, uti ex Elementis constat. Ideo algebraice irrationalia non semper sunt arithmetice irrationalia et algebraice rationalia non semper arithmetice rationalia. Sic $\sqrt{a}$ algebraice irrationalis est, si vero a notaverit 1, vel 4, vel 9, vel alium numerum quadratum, $\sqrt{a}$ erit arithmetice rationalis = 1, vel 2, vel 3, etc. Contra a algebraice rationalis est, si vero a notaverit $\sqrt{2}$, vel $\sqrt{3}$,

vel $\sqrt[3]{9}$, erit a arithmetice irrationalis. Quantitas irrationalis proprie dicta semper quantum veri nominis atque possibile est. Quare etsi impossibile eodem modo expressum sit, quo irrationalia exprimi possunt, ut $\sqrt{-a}$, tamen proprie illud irrationale dici non debet. *Radicalium* autem nomine impossibilia ejusmodi indigitari pos-

sunt. Et haec est ratio, cur algorithmus radicalium supra expositus in universum applicari queat, sive radicalia illa quantitates rationales notaverint, sive irrationales, sive impossibiles.

§. 56.

Quia æquatio non simplex pura reduci potest ad formam sequentem, $x = \sqrt[n]{A}$, ipsa incognita x exhibetur in quavis æquatione pura et satis promte per logarithmos, si tabulæ logarithmorum constructæ supponantur. In Mathesi enim Elementari jam demonstratur ea logarithmorum proprietas, quod logarithmus facti sit summa logarithmorum factorum, et ex hoc deducitur, quod logarithmus quadrati, cum oriatur logarithmo radicis ad seipsum addito, sit duplum logarithmi radicis, ac cubi logarithmus radicis logarithmi triplum. Possumus eadem ratiocinia hic continuare, et concludere, quod logarithmus dignitatis quartæ sit logarithmi radicis quadruplus, dignitatis quintæ quintuplus, sextæ sextuplus, et ita perpetuo. Vicissim igitur logarithmus radicis cujuscunque gradus ex dato numero invenitur logarithmo illius numeri per exponentem radicalem diviso. Si igitur littera l denotet logarithmum illius numeri, cui præfigitur, erit generaliter $la^n = nla$, et $l\sqrt[n]{a} = \frac{la}{n}$. Reducta igitur æquatione non simplici pura ad formam $x^n = A$, vel $x = \sqrt[n]{A}$, erit $lx = \frac{lA}{n}$, hincque si logarithmus ipsius A per numerum n dividatur, quotus erit logarithmus incognitæ x , quæ igitur ipsa invenietur, si quaeratur numerus logarithmo reperto conveniens secundum methodum in Mathesi Elementari expositum.

§. 57.

Quodsi valor ipsius x geometricè quærendus sit, methodus qua id præstari potest, sequentibus nititur ratiociniis.

ciniis. Sumta quantitate a quacunque, si formetur series dignitatum $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, etc. erit hæc series progressio geometrica, atque ideo si ponatur $A = a^2$, erit a media proportionalis inter 1 et A ; si $A = a^3$, erit a prima duarum a et a^2 inter 1 et A mediarum continue proportionalium; prima trium a, a^2, a^3 , si

$A = a^4$, et ita porro. Ideo in æquatione $x = \sqrt[n]{A}$, incognita x geometricè exhibebitur per lineam rectam, ponendo inter 1 et rectam, quam denotat A , tot medias continue proportionales, quot unitates insunt in numero $n-1$, quarum prima erit incognita x quæsitæ. In æquatione igitur quadratica pura $x = \sqrt{A}$, invenitur incognita x per Geometriam Elementarem, inter rectam pro unitate assumptam et eam, quam denotat A , mediam proportionalem quærendo, quæ erit incognita x quæsitæ. Cum igitur duæ rectæ mediae continuo proportionales inter rectas datas vel adeo plures per Geometriam Elementarem non reperiantur, in reliquis huiusmodi æquationibus incognita x reperitur per Geometriam Sublimiorem, de qua in sequentibus. Ceterum quæstionum non simplicium purarum specimen dat problema, quod sequitur.

§. 58.

PROBLEMA. *Civitas decem mille hominum tempore quindecim annorum crevit in viginti millia: quaritur, quis fuerit incolarum numerus sub finem anni primi, si incrementum ejusdem temporis proportionale semper fuisse ponatur multitudini.*

SOLVTIO. Ponatur 10000 = a , 20000 = b , numerus quæsitus = x , erit per conditiones problematis a ad x , uti x ad id, in quod a mutatum est duobus annis, quod ergo erit = $\frac{xx}{a}$. Deinde est a ad x , uti $\frac{xx}{a}$ ad id, in quod a mutatum est tribus annis, quod ergo

erit

erit $\frac{x^3}{a^2}$. Eodem modo numerus, in quem ita crevit qua-

tuor annis, reperitur $\frac{x^4}{x^3}$, atque colligitur, ad anno-

rum numerum 15, numerum, in quem a crevit, per $\frac{x^{15}}{a^{14}}$

exprimendum esse. Est igitur aequatio problematis funda-

mentalis $\frac{x^{15}}{a^{14}} = b$. Ex hac autem concluditur, esse

$$x^{15} = a^{14} b, \text{ et } x = \sqrt[15]{a^{14} b}, \text{ adeoque } lx = \frac{l. a^{14} b}{15}$$

$$= \frac{la^{14} + lb}{15} = \frac{14 la + lb}{15}. \text{ Sed est } la = 4, \text{ hinc } 14 la$$

$= 56$. Porro $lb = 4, 30103$, ideo $14 la + lb = 60, 30103$, qui logarithmus, si dividatur per 15, erit quotus 4,0200687, atque hic est logarithmus incogniti x , cui respondens numerus 10472 est ipse x , qui quærebatur.



SECTIO V.

DE

AEQVATIONIBVS QVADRATICIS NON PURIS.

§. 59.

Prouiti quævis æquatio simplex ad formam $x = A$, et
pura quævis ad formam $x^m = A$ reduci potest,
ubi A est expressio ex meris cognitis quantitatibus com-
posita; ita quadratica æquatio non pura quæcunque redu-
citur

eitur ad formam generalem sequentem $xx + px = q$, in qua p et q sunt expressiones utcunque ex cognitis quantitibus compositæ. Sic æquatio $axx + 2abx + 2bcc = bcx - cxx + a^3$, hoc modo reducetur: $axx + cxx + 2abx - bcx = a^3 - 2bcc$; $(a+c)xx + (2ab-bc)x = a^3 - 2bcc$;

$$xx + \frac{2ab-bc}{a+c}x = \frac{a^3-2bcc}{a+c}.$$

Si ergo ponatur

$$p = \frac{2ab-bc}{a+c} \text{ et } q = \frac{a^3-2bcc}{a+c},$$

utique æquatio hæc cum universali eadem erit.

Aequationes quadraticæ puræ ab impuris non alia re differunt, quam quod in iis fit $p = 0$.

§. 60.

Ipsa hæc *reductio* æquationis quadraticæ affectæ ad formam $xx + px = q$, per easdem absolvitur regulas, per quas reducuntur æquationes simplices, hoc addito; terminos æquationis ita disponendos esse, ut illi præcedant, in quibus est xx , hi vero sequantur, in quibus est x , atque hæc prius æquationis membrum conficere, cognitis omnibus in alterum rejectis; præterea dividendos esse omnes æquationis terminos per coefficientem ipsius xx , siue simplex hic fuerit, siue complicatus. Tandem hoc quoque notari meretur, quod ad æquationum quadraticarum formam reducantur omnes æquationes in quibus signum $\sqrt{}$ quantitatem afficit incognitam. Tum enim tolerari hoc signum non potest, sed semper eliminandum erit, nisi forte compendio calculi locum faciat. Tollitur autem signum radices quadraticæ, si quantorum complexus, quem adficit, in unam æquationis partem transferatur, atque tum fiat utriusque membri quadratum. De signo enim radices quadraticæ hic tantum sermo est, quod hoc facto eliminari posse, ultro patet. Si plura ejusmodi signa in æquatione deprehendantur, unum eliminabitur post alterum. Per operationem enim descriptam semel repetitam uno plura signa non

non excidunt, nisi in casibus quibusdam singularibus. Sic tollentur signa radicalia in æquatione $a + \sqrt{x} = \sqrt{y}$ concludendo $\sqrt{x} = \sqrt{y} - a$ hincque $x = y - 2a\sqrt{y} + aa$. Ex qua porro fit $2a\sqrt{y} = y + aa - x$, et proinde $4aay = (y + aa - x)^2$.

§. 61.

Æquatione vero quadratica non pura quacunque ad formam generalem $xx + px = q$ reducta, valor litterae incognitae x ex eadem investigabitur sequentem in modum. Addatur cuilibet ejus membro quadratum dimidia coefficientis termini secundi, quod est $\frac{1}{4}pp$, atque erit $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, quae est æquatio quadratica pura, utpote in qua primum membrum quadratum est radicis $x + \frac{1}{2}p$, unde fit $x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ et $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$. Dicuntur autem et apud æquationem compositam impuram valores litterae x , *Radices* æquationis, quarum ergo in æquatione quadratica non pauciores, quam duae sunt. Æquatio vero quadratica $xx + px = q$ nec plures, quam duas habet radices. Ponatur enim ea æquatio praeter duas radices, quae sint α et β , habere tertiam quandam, quae sit γ , et erit per hanc hypothesein $\alpha^2 + p\alpha = q$, $\beta^2 + p\beta = q$, ut et $\gamma^2 + p\gamma = q$. Est igitur primo $\alpha^2 + p\alpha = \beta^2 + p\beta$, hinc $p\alpha - p\beta = \beta^2 - \alpha^2$ vel $p(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$, et $p = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha - \beta} = -\alpha - \beta$. Deinde est $\alpha^2 + p\alpha = \gamma^2 + p\gamma$, ex qua eodem modo ut ante deducitur $p = -\alpha - \gamma$. Proinde fit $-\alpha - \beta = -\alpha - \gamma$, et ideo $\beta = \gamma$, quod est *contra hypothesein*.

§. 62.

Æquationis quadraticae purae radices absolute spectatae inter se aequales sunt, æquationis quadraticae non purae autem inaequales. Porro radicum istarum vel utraque rationalis est, si quantitatis $q + \frac{1}{4}pp$ radix quadratica rationalis sit, vel utraque irrationalis, si haec radix irra-

irrationalis sit. Potest et impossibilis fieri utraque radix, si haec quantitas sit negativa, quod iis solis casibus contingere potest, quibus q negativa est. Si enim hoc assumpto q major fuerit quam $\frac{1}{4}pp$, erit $-q + \frac{1}{4}pp$ quantitas negativa, cujus radix quadratica impossibilis est, et omnem quantitatem, cui jungitur addendo vel subtrahendo, impossibilem reddit. Eodem posito, quod scilicet q sit negativa, si $q = \frac{1}{4}pp$, radices in unam coincidunt, eamque rationalem $\frac{1}{2}p$. Hoc casu, si pro q scribatur $-\frac{1}{4}pp$, aequatio universalis $xx + px = q$ mutatur in hanc $xx + px = -\frac{1}{4}pp$ vel $xx + px + \frac{1}{4}pp = 0$, quae aequatio pura est, quia ejus membrum antecedens est quadratum radice $x + \frac{1}{2}p$ vel $-x - \frac{1}{2}p$, quarum utraque iterum eundem dat litterae A valorem, nempe $x = -\frac{1}{2}p$. Caeterum in aequatione quadratica $xx + px = q$ vel utraque radix realis, vel utraque impossibilis est. Non potest una realis et altera impossibilis esse. Summa vero earundem semper est quantitas realis, siue ambae sint reales, siue ambae impossibiles.

§. 63.

Aequatio quadratica generalis $xx + px = q$ etiam sequentem habere potest formam $xx + px - q = 0$, vel $xx + px + q = 0$, si q indifferenter denotet quantitatem positivam vel negativam. Est vero aequatio quadratica $xx + px + q = 0$, cujus binae radices sunt α et β , eadem cum aequatione orta ex simplicibus $x - \alpha = 0$ et $x - \beta = 0$ in se ductis. Erit nempe per hypothesein $\alpha^2 + p\alpha + q = 0 = \beta^2 + p\beta + q$ hinc $\alpha^2 + p\alpha = \beta^2 + p\beta$, et $p\alpha - p\beta = \beta^2 - \alpha^2$, hinc $p = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha - \beta} = -\alpha - \beta$. Hoc valore substituto fit $\alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta = -q$, adeoque $q = \alpha\beta$. Quo valore iterum substituto, aequatio ad hanc reducitur formam:

$$x^2 - \alpha x + \alpha\beta = 0$$

quae coincidit cum ea, quae oritur ex multiplicatione ipsius

ipsius $x - \alpha = 0$ per $x - \beta = 0$. Ex his porro sponte apparet, quod in omni aequatione quadratica coëfficiens termini nti, non connumerato primo, sit aequalis summae factorum ex singulis n radicibus, cum signis quidem propriis, si n par, contrariis, si impar fuerit.

§. 64.

Quantitati impossibili, quae neque est, neque esse potest, oppositae quantitates possibiles, siue rationales fuerint, siue irrationales, *Verae* vel *Reales* vocantur. In impossibili autem quantitate, algebraice expressa, si pars aliqua realis fuerit, quod relinquitur omni hoc reali subtracto, *Imaginarium* dicetur. Sic numeri $2 + \sqrt{-5}$ vel $2 - \sqrt{-5}$ impossibiles dicentur, sed non imaginariae. Inest in iis pars realis, numerus scilicet 2, quo ablato relinquitur $\sqrt{-5}$, quae sola dicetur imaginaria, ut omne quidem imaginarium et impossibile sit, sed non omne impossibile imaginarium. Licet generaliter impossibilitatis fundamentum sit quaelibet contradictio; Algebra tamen in quantitates imaginarias non aliter incidit, quam per extractiones radicum, quia reliquarum operationum, quibus ex quantitatibus realibus alias elicit, ut additio, subtractio, multiplicatio, divisio, contradictionem nulla unquam involvit. Imaginaria autem ita producta, si quantitatibus realibus jungantur, fiunt im-

possibilia. Quaevis radix hoc modo $\sqrt[n]{r-b}$ expressa imaginaria est, si n numerus par fuerit; realis, si n denotaverit numerum imparem. Quare littera n numerum parem denotante, omnes radices imaginariae data for-

mula continebuntur, quae etiam ad formam $\beta \sqrt[n]{r-1}$ reduci potest, notante β quantitatem realem rationalem

vel irrationalem. Est enim $\sqrt[n]{r-b} = \sqrt[n]{r^b} \times \sqrt[n]{r-1}$, quare

si ponatur $\sqrt[n]{r^b} = \beta$ erit $\sqrt[n]{r-b} = \beta \sqrt[n]{r-1}$.

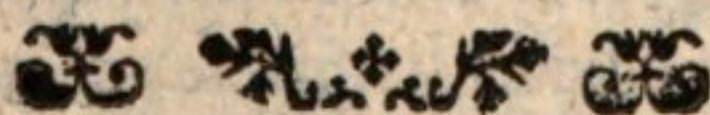
§. 65.

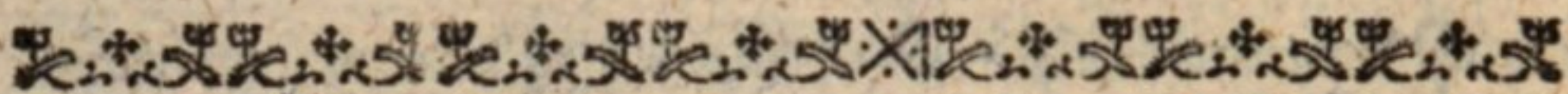
Radices aequationes quadraticae $xx + px + q = 0$ ambae possunt esse impossibiles, quando nimirum in formula $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ quantitas q est negativa et major, quam $\frac{1}{4}pp$. Ponatur pars radicis realis $-\frac{1}{2}p = R$ et pars imaginaria $= \sqrt{r - Q^2} = Q\sqrt{r - 1}$, erit una radix $= R + Q\sqrt{r - 1}$ et altera $= R - Q\sqrt{r - 1}$. Hinc $-p = (R + Q\sqrt{r - 1}) + (R - Q\sqrt{r - 1}) = 2R$, et $q = (R + Q\sqrt{r - 1})(R - Q\sqrt{r - 1}) = R^2 + R \times Q\sqrt{r - 1} - R \times Q\sqrt{r - 1} - Q^2 \times (r - 1) = R^2 + Q^2$. Nihil igitur paradoxum in eo est, quod quantitas q , quae est realis, ponatur esse productum ex duabus quantitatibus impossibilibus. Nam quantitas imaginaria $\beta\sqrt{r - 1}$ in aliam imaginariam $b\sqrt{r - 1}$ ducta vel per eandem divisa semper praebet productum reale $-b\beta$ et quotum realem $\frac{\beta}{b}$. Est

vero utique unitas realis 1 ad quantitatem imaginariam $b\sqrt{r - 1}$, ut alia imaginaria quaecunque ad realem $-b\beta$; vel quantitas imaginaria $b\sqrt{r - 1}$ ad unitatem realem 1, ut alia quaecunque imaginaria $\beta\sqrt{r - 1}$ ad quantitatem

realem $\frac{\beta}{b}$. Ponatur in formula $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{r -$

Q^2 pars realis $-\frac{1}{2}p$ iterum $= R$ et pars imaginaria $\sqrt{r - Q^2} = I$, erunt duae aequationis $xx + px + q = 0$ radices $x = R + I$, et $x = R - I$ adeoque $x - R - I = 0$ et $x - R + I = 0$; praeterea $xx + px + q = 0 = (x - R - I)(x - R + I)$. Si enim actu multiplicetur, erit productum $= x^2 - 2xR + xI - xI + RI - RI + R^2 - I^2$ reale, quia $+xI$ et $-xI$, ut et $+RI - RI$ facta imaginaria sese destruunt, atque I^2 factum reale est.





SECTIO VI.

DE

QVANTIS VARIABILIBVS ET LIMITIBVS RATIONVM.

§. 66.

Omnis expressio analytica ex quantitate quadam x et aliis quomodocunque composita dicitur *functio* quantitatis x . Ejusmodi functiones quantitatis x sunt sequentes $a + 3x$, $ax - 4xx$, abx^3 , $ax + b\sqrt{aa - xx}$, fg^x , et hujus generis expressiones aliae. Quodsi itaque datur aequatio inter quantitatem aliam y et ejusmodi functionem quantitatis x , uti $y = ax + bxx$, erit y functio quantitatis x . Posito jam, quod in functione $ax + bxx$ quantitates a et b ita sint determinatae, ut perpetuo eundem valorem seruent; atque valor quantitatis y mutari non poterit, nisi valor quantitatis x mutetur. Sic et vicissim, licet valor quantitatuum a et b perpetuo maneat idem, tamen quantitas y eundem valorem non servat, simulac valor quanti x mutationem quandam patitur. Quare si x sit quantitas indeterminata omnes omnino valores determinatos in se complectens, licet a et b eundem perpetuo seruent valorem, tamen et y erit quantitas indeterminata omnes omnino valores determinatos in se complectens. Quantitas determinata perpetuo eundem valorem servans dicitur *quantitas constans*, et quantitas indeterminata, quae omnes omnino valores determinatos sub se complectitur vocatur *quantitas variabilis*. Ejusmodi quantitas variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam positivos, quam negativos, integros et fractos, rationales et irrationales. Quin etiam
cyphra

cyphra et numeri imaginarii a significato quantitatis variabilis non excluduntur. Quando ejusmodi problema analyticum solvendum proponitur, ubi tantum quantitates determinatae considerantur, litterae Alphabeti priores quantitates cognitae, posteriores vero quantitates incognitae denotare solent. Analysis autem Mathematica potissimum quoque adplicanda erit ad talia problemata, in quibus discrimen quantitatum cognitarum et incognitarum non tantopere spectatur, sed praecipue ad illud quantorum genus respicitur, quorum unum ab altero dependet sic, ut uno mutato simul alterum mutationem patiatur. Haec est ratio, cur ibidem litterae Alphabeti initiales a, b, c , etc. ad quantitates constantes, postremae vero z, y, x, u , etc. ad quantitates variables denotantes adhibentur.

§. 66.

Functio igitur quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et quantitatibus constantibus. Loco quantitatis variabilis omnes valores determinatos substituere licet; hinc functio quantitatis variabilis innumerabiles valores determinatos induet, neque ullus valor determinatus excipietur, quem functio induere nequeat, cum quantitas variabilis etiam valores imaginarios involvat. *Functio igitur quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis, atque si functio quaedam quantitatis variabilis z aequalis ponatur alii cuidam quantitati y , haec quantitas y non tantum functio quantitatis variabilis z , sed et ipsa quantitas variabilis erit. Vicissim quoque si fuerit y functio quaecunque ipsius z , etiam z erit functio ipsius y . Cum enim y sit functio ipsius z dabitur aequatio, qua y per z et quantitates constantes certo modo inter se et cum variabili z combinatas exprimitur. Eadem vero aequatio ita mutari poterit, ut vicissim quantitatem z per variabilem y et quantitates constantes exprimat, eritque ideo z functio ipsius y . Deinde si fuerint y et x functiones*

ipsius z , erit quoque y functio ipsius x , et vicissim x functio ipsius y . Cum enim sit y functio ipsius z , erit quoque z functio ipsius y : similique modo erit etiam z functio ipsius x . Hanc ob rem functio ipsius y æqualis functioni ipsius x , ex qua æquatione et y per x et vice versa x per y definiri poterit. Proinde manifestum est, esse y functionem ipsius x , atque x functionem ipsius y .

§. 68.

Functiones dividuntur in algebraicas et transcendentes, atque discrimen hoc in modo compositionis, quo ex quantitate variabili et constantibus formantur, positum est. Jam statim ab initio vidimus, quod formulae analyticae non magis ad Arithmeticam, quam ad Geometriam restrictae sint, et quod signa combinationum, quibus in Analyysi utimur, per terminos geometricos non minus facile, quam per arithmeticos possint exprimi. Quando igitur sit y functio ipsius x , ac litteræ in functione certo modo inter se combinatae explicentur per lineas rectas, signa vero, quibus inter se combinantur per operationes geometricas; ad quemvis valorem determinatum ipsius x non tantum Arithmetice sed et Geometrice inveniri poterit valor functionis y . Id quod si fieri possit per ejusmodi operationes, quae tandem in postulata Geometriae Elementaris resolvuntur; *constructio* censetur *geometrica*. Omnes vero operationes, quae non in postulata Geometriae Elementaris tandem resolvuntur, *Geometriam transcendere* censentur, atque ideo et expressiones analyticae, quibus ejusmodi operationes exprimuntur, *Algebram transcendere* censentur. Hæc est ratio, cur *functio* y dicatur *algebraica*, si ex variabili x et constantibus componitur per operationes algebraicas solas, quaeque ideo ita est comparata, ut ad datam quamcunque rectam, quæ ponitur ipsi æqualis, inveniri possit recta æqualis functioni y per ejusmodi constructiones, quæ tandem in postulata Geometria Elementa-

menta-

mentaris resolvi possunt. Reliquæ A *functiones transcendentes* vocantur, de quibus tamen notandum est, eas tum demum fore transcendentes, si operatio transcendens non solum ingrediatur, sed etiam quantitatem variabilem afficiat. Quodsi enim operationes transcendentes tantum ad quantitates constantes pertineant, functio nihilominus algebraica est censenda.

§. 69.

Functiones algebraicæ sunt vel *integre*, vel *fractæ*. In illis variabilis x neque usquam habet exponentem negativum, neque in denominatores fractionum alias ingreditur. Fractæ functiones sunt, in quibus denominatores variabilem x continentes, vel exponentes negativi ipsius x occurrunt. Praeterea functiones algebraicæ dividuntur in *rationales* et *irracionales*. Functiones dicuntur rationales, si quantitas variabilis in nulla irrationalitate involvatur; irracionales, si signa radicalia quantitatem variabilem afficiunt. In functionibus itaque rationalibus aliae operationes variabilem afficientes præter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem et evectionem ad potestates, quarum exponentes sunt numeri integri, non insunt. Erunt itaque $\sqrt{a+x}$; a

$-x + bx^2$; $\frac{\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{a+x}}$; functiones rationales variabi-

lis x . Sed $\sqrt{x}$; $a + \sqrt{aa-xx}$; $\frac{aa-x\sqrt{aa+xx}}{a+x}$;

sunt functiones ipsius x irracionales. Proinde functionum rationalium integrarum formula generalis hæc erit, $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \text{etc.}$ et functionum rationalium fractarum formula generalis ista

$$\frac{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}}{g + hx + kx^2 + mx^3 + nx^4 + \text{etc.}}$$

Ubi notandum est, quantitates constantes $a, b, c, \text{etc.}$ si-
ve integre sint, siue fractæ, siue rationales, siue irra-

tionales, vel adeo transcendentes, naturam functionum non mutare.

§. 70.

Si fuerit y functio quantitatis variabilis x rationalis integra talis, ut sit $y = 0$ posito $x = 0$, in formula generali functionis rationalis integrae $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \dots + \lambda x^m$ debet esse constans $\alpha = 0$, ut sit $y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc.}$ ex qua aequatione fluit $\frac{y}{x} = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \epsilon x^3 + \text{etc.}$

Patet igitur rationem $\frac{y}{x}$ variabilem esse, quia exponentis hujus rationis est quantitas variabilis, nimirum functio ipsius variabilis x , et quidem talis, quæ decrefcit, quamdiu ipsa variabilis x minuitur. Posito jam

$x = 0$ ipsa functio y simul fit $= 0$ et rationis $\frac{y}{x}$ expo-

nens $= \beta$, seu ipsa ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$. Paradoxum vide-

tur, quod hic asseritur, esse $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = \frac{\beta}{1}$, quia

cyphrae non sunt quantitates, atque ideo una altera

nec major nec minor esse dici potest. Verum ratio $\frac{y}{x}$

$= \frac{\beta}{1}$ revera non est ratio cyphrarum, sed *limes*, ad

quam ratio $\frac{y}{x}$ perpetuo adpropinquat, variabili x et

cum ea simul variabili y continuo decrescente; limes,

quem non attingit ratio $\frac{y}{x}$, quamdiu x et y sunt quan-

titates

titates veræ quantumvis parvæ. Ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ ea est, quacum variables y et x evanescunt, seu quantitates esse definunt; atque hæc limes rationis certa est et definita. Potest hæc limes rationis $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ vocari *ultima ratio* variabilium y et x , si spectetur ut ea, quacum y et x quantitates esse definunt, seu evanescunt. Si variabilis $x = 0$ iterum crescere concipiatur, functio y cum ea simul crescere incipit, atque ultima ratio $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{1}$ iterum ea erit, quacum crescere incipiunt. Atque hoc respectu limes hujus rationis $\frac{y}{x}$, quæ est $\frac{\beta}{1}$, vocari potest *prima ratio* variabilium y et x , quacum quantitates esse incipiunt.

§. 71.

Si fuerit $y = \beta x$, erit $\frac{y}{x} = \beta$ ratio constans, atque limes hujus rationis non diversa est a ratione, quam variables y et x perpetuo servant, sive x crescat, sive decrescat utcunque. Si præterea fuerit $z = \gamma x$, iterum fit $\frac{z}{x} = \gamma$ ratio constans, et limes hujus rationis iterum cum ipsa ratione quantitatum y et z eadem, utcunque varietur x et cum ea simul z . Ratio $\frac{y}{x}$ diversa est a ratione $\frac{z}{x}$, limes rationis $\frac{y}{x}$ a limite rationis $\frac{z}{x}$ pariter est diversus, atque exponens prioris li-

mitis diversus a limite posterioris. Est nimirum $\frac{y}{x} =$

$\frac{\beta}{1}$ et $\frac{z}{x} = \frac{\gamma}{1}$ quemcunque valorem subeat x et

simul y atque z . Ratio $\frac{\beta}{1}$ ea est, cum qua y et x

evanescunt, atque ratio $\frac{\gamma}{1}$ ea est, cum qua z et x

evanescunt, ita ut in ipso momento evanescentiae sit $y : x = \beta : 1$, et $z : x = \gamma : 1$, ex quibus duabus analogiis simul deducitur limes rationis $y : z$, nimirum $y :$

$z = \beta : \gamma$. Ratio nempe $\frac{y}{z}$, seu $\frac{\beta x}{\gamma x}$ pariter con-

stans est, quippe quæ semper est $= \frac{\beta}{\gamma}$, atque cum

hac ratione evanescunt y et z simul, dum x evanescit.

Quamvis igitur duo nihila revera inter se comparari non possint, quia non amplius sunt quantitates; tamen

$\beta \times 0 : \gamma \times 0$ exprimit rationem certam et determinatam, quæ est $= \beta : \gamma$. Est quidem $\beta \times 0$ non amplius

quantitas, nec $\gamma \times 0$ amplius est quantitas. Nihilo ta-

men minus ratio $\frac{\beta \times 0}{\gamma \times 0}$ vera et determinata est, ea

nimirum, cum qua evanescunt variables βx et γx , seu

y et z , si x evanescat. Istæ variables nunquam sunt in

ratione æqualitatis, nec ratio, cum qua evanescunt, est

ratio æqualitatis, sed constans ista $\frac{\beta}{\gamma}$, quæ ratio æ-

qualitatis non est, nisi sit $\beta = \gamma$. Proinde hoc sensu

falsum est, esse $\beta \times 0 = \gamma \times 0$, nisi fuerit $\beta = \gamma$. Sic

intelligi debent Summi, quos veneror, Mathematici, qui

contendunt, infinite parva revera esse nihila, sed tamen

inter duo infinite parva intercedere posse rationem quam-

cunque

cunque. Ratio infinite parvorum revera non est ratio nihilorum, sed ratio ultima, quacum dux variables evanescent, Similibus, quibus hic usus sum, ratiociniis demon-

strari potest, esse $\frac{a-a}{b-b} = \frac{a}{b} = \frac{0}{0}$. Est enim $a:$

$b = x : \frac{bx}{a}$. Proinde $a+x : b + \frac{bx}{a} = a : b$. et

porro $a - a + x : b - b + \frac{bx}{a} = a : b$ (§. 186. Geom.).

Hinc rationis constantis $\frac{a}{b} = \frac{a - a + x}{b - b + \frac{bx}{a}}$ limes =

$$\frac{a-a}{b-b} = \frac{a}{b}.$$

§. 72.

Omnis quantitas variabilis non tantum continuo decrescere et tandem penitus evanescere potest, Sed ejusmodi quantitas quoque continuo crescere potest, idque in infinitum. Sit $y = ax + bx +$

$cx^2 + ex^3 + fx^4 + \dots bx^{n-1} + kx^n$, atque patet, posito $x = \infty$, etiam y in infinitum excrescere. Ex æquatione vero $y = ax + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \dots +$

$bx^{n-1} + kx^n$ deducitur $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{x^n} + \frac{b}{x^{n-1}} +$

$$\frac{c}{x^{n-2}} + \frac{e}{x^{n-3}} + \frac{f}{x^{n-4}} \dots + \frac{b}{x} + k.$$

Iterum igitur ratio $\frac{y}{x^n}$ variabilis est, et exponens hu-

jus rationis variabilis, ita quidem, ut variabili x et cum ea simul ipsa y crescente exponens illius decrescat. Termini enim omnes præter ultimum constantem decrescunt (§. 18. Ar. Elem.). Posito denique $x = \infty$, quo casu

etiam y in infinitum excrescit, exponens hujus rationis est k , quia omnes termini sunt $= 0$ (§. 25.). Nam

ob $\frac{1}{\infty} = 0$, est $\frac{1}{\infty^n} = 0^n = 0$, et proinde $\frac{a}{\infty^n} =$

$\frac{a}{\infty} \times \frac{1}{\infty^{n-1}} = 0 \times 0^{n-1} = 0^n = 0$. Eadem hic

quoque notari merentur, quae in §. 70 et 71. jam sunt monita ratione quantitatum evanescentium seu infinite par-

vorum. Ratio $\frac{y}{x^n} = k$ proprie non est ratio infiniti

te magnorum y et x^n ad se invicem, quia fieri nequit, ut duo quanta inassignabilia inter se comparentur. Sed

ratio $\frac{y}{x^n} = k$ *limes* est rationis, ad quem variables y et x^n

in infinitum crescentes continuo adpropinquant, quemque non adtingunt, quandiu sunt determinantæ et assignabiles quantitates, sed $\frac{y}{x^n} = k$ est ultima ratio, quacum assignabiles esse desinunt.

§. 73.
Sit igitur denuo $y = ax$, et posito $x = \infty$, etiam y excrescit infinitum. Quia vero est $\frac{y}{x} = a$ ratio constans, etiam limes rationis, quacum y et x assignabiles esse desinunt, est $= \frac{a}{1}$. Si præterea sit $z = bx$

erit $\frac{z}{x} = b$, et limes rationis, quacum quantitates variables z et x assignabiles esse desinunt, pariter $= \frac{b}{1}$.

Ex his simul deducitur ratio $y : z$ atque limes rationis, quacum variables y et z sunt infinitæ. Nam ex analogiis $y : x = a : 1$ et $z : x = b : 1$, quæ etiam in casu infiniti

infiniti

infiniti veræ sunt, deducitur $y : z = a : b$, vel $a\infty : b\infty = a : b$. Est igitur $\frac{a}{b}$ limes rationis $\frac{a\infty}{b\infty}$ seu $\frac{y}{z}$.

Nam ratio $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$ constans est, utcumque x varietur, siue x evanescat, siue excrescat in infinitum; atque cum hac ratione variabiles y et z assignabiles esse desinunt simul, dum x fit inassignabilis. Quamvis igitur revera duo infinite magna inter se comparari non possint, fieri tamen potest, ut assignetur limes illius rationis, quæcum assignabiles esse desinunt, quippe quæ in eo, quem consideramus, casu certa est et determinata. Variabiles ax et bx nunquam sunt in ratione æqualitatis, nec cum ratione æqualitatis assignabiles esse desinunt, sed cum ratione constante $\frac{a}{b}$. Atque ideo hoc

sensu falsum est, esse $a\infty = b\infty$, nisi sit $a = b$. Ratio igitur finita, quæ intercedere potest inter duo infinite magna secundum Recentiores Analystas, revera non est ratio infinite magnorum inter se, sed potius ratio, quæcum duæ variabiles finitæ quantitates esse desinunt.

§. 74.

Ipsa vero hæc ultima ratio, quæcum duæ variabiles evanescunt vel in infinitum excrescunt, non semper est finita, nec exponens hujus rationis quantitas determinata. Evolvamus itaque casus, in quibus exponens iste quantum finitum est et determinatum. Quod adtinet ad ultimas rationes variabilium evanescentium, si sit $y = ax^n$ atque $z = bx^n$, existente n numero positivo

vel integro vel fracto, est limes rationis $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$;

ideoque hæc ultima ratio finita. Nam $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{1}$,
et

et $\frac{z}{x^n} = \frac{b}{1}$ etiam in casu evanescentiæ. Proinde

$y : x^n = a : 1$ et $x^n : z = 1 : b$, unde fit $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$.

Si fuerit $y = ax^n$ existente n numero integro positivo unitate majore, est $\frac{y}{x} = ax^{n-1}$. Proinde ratio

$\frac{y}{x}$ variabilis atque valor fractionis $\frac{y}{x}$ decrescens prouti x decrescit. Evanescente x simul evanescit va-

lor fractionis $\frac{y}{x}$ et ipsa ratio $\frac{y}{x}$ fit infinita. Quod

si ideo generaliter fit $y = ax^{\frac{r+s}{m}}$ et $z = bx^{\frac{r}{m}}$, r, s , et m existentibus integris positivis, posito $x = 0$ est ultimæ rationis $\frac{y}{z}$ exponens $= 0$. Est enim $\frac{y}{z} = \frac{ax^{\frac{r+s}{m}}}{bx^{\frac{r}{m}}}$

$\frac{ax^{\frac{s}{m}}}{1}$ atque $\frac{z}{x^{\frac{r}{m}}} = \frac{b}{1}$, proinde $y : x^{\frac{r}{m}} =$

$ax^{\frac{s}{m}} : 1$ et $x^{\frac{r}{m}} : z = 1 : b$. ideoque $\frac{y}{z} = \frac{ax^{\frac{s}{m}}}{b}$
 $= \frac{0}{b} = 0$.

§. 75.

Si fuerit y functio ipsius x integra vel rationalis vel irrationalis atque z pariter ejusmodi functio ipsius x ; si præterea exponens infimæ potestatis ipsius x in functione y æqualis sit exponenti infimæ dignitatis in fun-

functione z : ultima ratio $\frac{y}{z}$ est finita. Sit enim

$y = ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+r+s} + \text{etc.}$, atque $z =$

$fx^n + gx^{n+p} + bx^{n+p+q} + \text{etc.}$; erit $\frac{y}{x^n} = \frac{a}{1}$

atque $\frac{z}{x^n} = \frac{f}{1}$ variabili x evanescente. Proinde

tum $y : x^n = a : 1$ et $x^n : z = 1 : f$, ideo $y : z = a : f$,

vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$. Si vero exponens infimæ dignitatis

in functione y major sit, quam in functione z , erit ul-

tima ratio $\frac{y}{z}$ infinita, et casu $x = 0$, fractio $\frac{y}{z}$

$= 0$. Si enim fuerit $y = ax^{m+n} + bx^{m+n+o} +$

$cx^{m+n+o+p} + \text{etc.}$, atque $z = fx^m + gx^{m+n} +$

$bx^{m+r+s} + \text{etc.}$, habemus casu $x = 0$, $\frac{y}{x^m} = \frac{0}{1}$

atque $\frac{z}{x^m} = \frac{f}{1}$, sive $y : x^m = 0 : 1$ atque $x^m : z =$

$1 : f$, proinde $y : z = 0 : f$, sive $\frac{y}{z} = \frac{0}{f} = 0$.

§. 76.

Simili modo dijudicandæ sunt ultimæ rationes quan-

titatum variabilium in infinitum crescentium. Si fue-

rit $y = ax^m$, ratio $\frac{y}{x^m} = a$ constans est, utcunque

varietur x , quare etiam cum hac ratione variables y et

x^m fiunt in affinabiles. Sic quoque variables y et z

cum ratione finita constante assignabiles esse desinunt,

si fuerit $y = ax^m$ atque $z = bx^m$. Quia enim casu x

$= \infty$, $\frac{y}{x^m} = \frac{a}{1}$, et $\frac{z}{x^m} = \frac{b}{1}$, vel $y : x^m = a : 1$,

atque

atque $x^m : z = 1 : b$; erit $y : z = a : b$, vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{b}$.

Si fuerit $y = ax^m$ existente m numero positivo unitate

maiore, fit $\frac{y}{x} = \frac{ax^{m-1}}{1}$ ratio variabilis, atque pro-

inde si $x = \infty$, $\frac{y}{x} = \frac{\infty}{1}$, et ultima ratio infinita.

Si ideo generaliter fit $y = ax^{\frac{r+s}{m}}$ atque $z = bx^{\frac{r}{m}}$, ob

$\frac{y}{x^{\frac{r}{m}}} = ax^{\frac{s}{m}}$ atque $\frac{z}{x^{\frac{r}{m}}} = b$, casu infiniti fit $\frac{y}{x^{\frac{r}{m}}} =$

$\frac{\infty}{1}$ atque $\frac{z}{x^{\frac{r}{m}}} = \frac{b}{1}$, five $y : x^{\frac{r}{m}} = \infty : 1$, atque $x^{\frac{r}{m}} :$

$z = 1 : b$, proinde $y : z = \infty : b$, vel $\frac{y}{z} = \frac{\infty}{b}$

ratio infinita. Hinc $\frac{z}{y} = \frac{b}{\infty} = 0$. Ex his præ-

terea concludimus sequentia.

§. 77.

Si y fuerit functio integra rationalis vel irrationalis variabilis x , atque z pariter ejusmodi variabilis x functio; si præterea exponens maximæ dignitatis ipsius x in functione y æqualis fuerit exponenti maximæ di-

gnitatis ipsius x in functione z ; erit ultima ratio $\frac{y}{z}$,

cum qua variabiles y et z fiunt infinite magnæ, finita.

nita. Sit enim $y = ax^p + bx^{p-q} + cx^{p-q-r} +$
 etc., atque $z = fx^p + gx^{p-m} + hx^{p-m-n} +$ etc., ca-
 su $x = \infty$ erit $\frac{y}{x^p} = \frac{a}{1}$ atque $\frac{z}{x^p} = \frac{f}{1}$, unde
 concluditur $y : x^p = a : 1$, $x^p : z = 1 : f$, atque $y : z$
 $= a : f$, vel $\frac{y}{z} = \frac{a}{f}$. Si vero exponens maximæ
 dignitatis ipsius x in functione y major fuerit, quam
 exponens maximæ dignitatis ipsius x in functione z ; erit
 ultima ratio $\frac{y}{z}$, cum qua variabiles y et z finitæ esse
 definunt, infinita. Sit enim $y = ax^{m+n} + bx^{m+n-r} +$
 $cx^{m+n-r-s}$ etc., atque $z = fx^m + gx^{m-p} +$
 $hx^{m-p-q} +$ etc., casu $x = \infty$, fiet $\frac{y}{x^{m+n}} = \frac{a}{1}$
 atque $\frac{z}{x^{m+n}} = \frac{0}{1}$, proinde $y : x^{m+n} = a : 1$,
 $x^{m+n} : z = 1 : 0$, atque $y : z = a : 0$, unde $\frac{y}{z} =$
 $\frac{a}{0} = \infty$ atque $\frac{z}{y} = \frac{0}{a} = 0$.

§. 78.

Ex iis, quæ hucusque de ultimis variabilium tam
 evanescentium, quam infinitefcentium rationibus sunt
 exposita, ratio patet, cur infinite magna pariter ac in-
 finite parva in diversos ab *Analystis* distribuuntur ordines.
 Licet enim infinite magna non tantum sed et infinite
 parva, quippe quæ sunt nihila, revera sint incompara-
 bilia, ultima tamen eorundem ratio, quacum evane-
 scunt vel infinitefcunt, seu comparabiles esse definunt,
 sæpius finita est et determinata, sæpius vero ipsa quoque
 infinita, qui casus sollicitè sunt distinguendi. Expo-
 nens enim ejusmodi ultimæ duarum variabilium rationis
 quan-

quantitas est finita atque determinata, si ipsa ratio ultima est finita: iste vero exponens vel infinite magna est quantitas vel infinite parva, seu nihilo æqualis, si infi-

nita est ultima ratio. Sic exponens rationis $\frac{y}{z}$ casu

$x = \infty$ est finita quantitas, si tam y quam z fuerit functio n dimensionum ipsius x . Si vero sit y ipsius x functio $n+m$ dimensionum atque z ejusdem variabilis functio n dimensionum, n et m existentibus numeris positi-

vis casu $x = \infty$ est $\frac{y}{z} = \infty$, et $\frac{z}{y} = 0$. Præterea

si y et z fuerint functiones variabilis x quarumcunque dimensionum, exponens vero infimæ dignitatis in utra-

que sit m , ratio ultima $\frac{y}{z}$ casu $x = 0$ finita est, et

valor fractionis $\frac{y}{z}$ finitus. Si vero exponens infimæ

dignitatis ipsius x in functione y major est, quam exponens infimæ dignitatis ipsius x in functione z , ulti-

ma ratio $\frac{y}{z}$ casu $x = 0$ infinita est, atque $\frac{y}{z} = \infty$,

vel $\frac{z}{y} = 0$. Est itaque $\frac{a\infty^n}{b\infty^n} = \frac{a}{b} \infty^n \times \frac{1}{\infty^n}$

$= \frac{a}{b} \infty^n \times 0^n = \frac{a}{b}$, si in functione $\frac{ax}{bx}$ fiat $x =$

∞ . Sed $\frac{a\infty^n}{b\infty^{n+m}} = \frac{a}{b\infty^m} = \frac{b}{a} \infty^n \times 0^{n+m} = \frac{a}{b}$

$0^m = 0$, si in functione $\frac{ax^n}{bx^{n+m}}$ fiat $x = \infty$, atque

numeri n et m sint positivi.

SECT.

SECTIO VII.

DE

PROPRIETATIBVS RADICVM IN AEQVATIONIBVS, QVAE SVNT QVADRATICA ALTIORES.

§. 79.

Omnis æquatio five pura sit, five non pura, reduci potest ad aliquam formarum sequentium:

$$x + p = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

vel generatim

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \dots + \phi x^{m-n+1} + \dots + rx^2 + sx + t = 0$$

si m denonet exponentem maximæ dignitatis ipsius x , et n numerum exprimentem, quotus est terminus in ordine. Quodsi in formulis hisce coefficientium $a, b, c, d, \dots, r, s, t$, quivis modo affirmativam modo negativam quantitatem modo nihilum denotare ponatur; nulla concipi potest æquatio, quæ legitime reducta non cum aliqua earum congruat. *Reducendi* vero modus ab eo, qui apud æquationes quadraticas expositus est, non differt. Tolluntur signa radicum, quæ quantitatem quæsitam afficiunt. Radicum enim quadraticarum signa qui eliminare novit, simili methodo cubicarum et reliquarum radicum signa facile tollet. Deinde quantitates incognitæ ex denominatoribus transferuntur in numeratores, atque æquatio ordinatur secundum dignitates litteræ, quæ notat quæsitum, ut præcedat suprema, et hanc deinde ordine sequantur reliquæ. Tandem si

Z

supre-

suprema incogniti dignitas aliquem coefficientem cognitum habuerit, per hunc omnes æquationis termini dividuntur.

§. 80.

Quodsi in æquatione ita reducta substituatur numerus quicunque pro x , atque hoc facto æquatio evanescat, terminis ita productis per contraria signa sese destruentibus; id indicio est, numerum istum esse radicem illius æquationis. Neque enim æquatio aliud vult, quam ut pro x sumatur numerus, qui datis eo modo, qui per signa indicatur, junctus, efficiat, ut prius æquationis membrum æquale fiat posteriori, vel ut id, quod oritur omnibus æquationis terminis ad eandem partem locatis, sit nihilum. Id ergo si numerus aliquis loco litteræ x substitutus efficiat, eum radicem esse, necesse est. Sic in æquatione $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ si ponatur $x = 5$, prius æquationis membrum mutatur in $125 - 125 - 80 + 80$, quod nihilum esse, ultro apparet; quare 5 est radix hujus æquationis. Hinc et conversim si numerus quicunque a sit radix æquationis, eo loco x substituto evanescere debet prius æquationis membrum. Sit igitur a ejusmodi numerus, qui in æquatione $x^m + ax^{m-1} + \dots + \phi x^{m-n+1} + \dots + rx^2 + sx + t = 0$ substitutus efficit, ut omnes termini prioris membri sese destruant, erit a hujus æquationis radix, atque $x = a$, seu $x - a = 0$. Jam dico, quod æquationis $x^m + ax^{m-1} + \dots + \phi x^{m-n+1} + \dots + rx^2 + sx + t = 0$ membrum primum quod brevibus indicabimus per litteram X absque residuo dividi possit per æquationis simplicis $x - a = 0$ membrum primum $x - a$. Diviso enim ipso X per

$x - a$ si fiat quotus Q remanente R , erit $\frac{X}{x-a} = Q +$

$\frac{R}{x-a}$ et adeo $X = (x-a)Q + R$. Sed quia $X =$

0 , erit $(x-a)Q + R = 0$. Praeterea est $x - a = 0$
hinc

hinc $(x - a) Q = 0$, et ideo quoque $R = 0$. Quare X dividetur per $x - a$ absque residuo.

§. 81.

Quodsi aequatio $X = 0$ absque residuo dividi queat per aequationem quandam simplicem $x - a = 0$, erit a radix illius aequationis. Divisa enim functione X per $x - a$

si inveniatur quotus Q , erit $\frac{X}{x - a} = Q$ et ideo $X =$

$(x - a) Q = 0$, quia $x - a = 0$. Ideo X evanescit si a pro x in eadem substituatur, atque exinde patet, quod a sit radix aequationis $X = 0$. Ex hac propositione sequentia deducuntur corollaria.

I. Quodsi plures aequationes simplices $x - a = 0$, $x - \beta = 0$ - - - $x - \eta = 0$ ducantur in se invicem; oritur aequatio, cujus radices sunt a , β , - - η . Aequatione enim, quae oritur, generaliter per $X = 0$ indicata, prius membrum X absque residuo dividi potest per $x - a$ non tantum, sed et per $x - \beta$ - - - et $x - \eta$. Ideo non tantum a sed et β - - - η sunt hujus aequationis radices.

II. Numerus radicum aequationis potest esse equalis exponenti summae dignitatis, ad quam incognita x in aequatione adscendit. Quodsi enim aequatio quaedam orta sit ex multiplicatione simplicium $x - a$, $x - \beta$ - - - $x - \eta$ in se invicem, quarum numerus est n , eadem aequatio est n dimensionum, et praeterea ad minimum habet n radices.

§. 82.

Si aequatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + px^{m-n+1} + qx^{m-n} + rx^2 + sx + t$ cujus radices sint $a, \beta, \gamma, \dots, \zeta, \eta$ dividi intelligatur per $x - \eta$; erit quotus aequatio gradus $(m-1)$ ti. Quaecunque quantitas fuerit η , sive radix, sive minus, quotus ad sequentem reducetur formam:

$$\begin{aligned} & x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} \dots + Px^{m-n+1} \\ & + Qx^{m-n} \dots + Rx^2 + Sx + T + \lambda x^{-1} \\ & + \mu x^{-2} + \nu x^{-3} + \sigma x^{-n+1} + \tau x^{-n} \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

Erit itaque multiplicato quoto per divisorem $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots + Qx^{m-n+1} + Sx^2 + Tx + \lambda + \mu x^{-1} + \nu x^{-2} \dots + \tau x^{-n+1} \dots$ etc.
 $- \eta x^{m-1} - \eta A x^{m-2} \dots - \eta P x^{m-n+1} - \eta R x^2 - \eta S x - \eta T - \eta \lambda x^{-1} + \eta \mu x^{-2} \dots - \eta \sigma x^{n+1}$ etc. formula haec eadem cum $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + qx^{m-n+1} \dots + rx^2 + sx + t$. Comparatis igitur terminorum homogeneorum coefficientibus erit

$$A - \eta = a, \text{ hinc } A = \eta + a$$

$$B - \eta A = b, \text{ hinc } B = \eta A + b \\ = \eta^2 + a\eta + b$$

$$C - \eta B = c, \text{ hinc } C = \eta B + c \\ = \eta^3 + a\eta^2 + b\eta + c$$

et generatim, si n non major est, quam $m+1$, coefficientis termini n ti, five $Q = P\eta + q$. Dico vero; fore coefficientem termini n ti, si n non major est, quam $m+1$,
 $= \eta^n - 1 + a\eta^{n-2} + b\eta^{n-3} \dots + p\eta + q$.

Si enim haec formula valet pro coefficiente termini $(n-1)$ ti, valet quoque pro coefficiente termini n ti. Est nempe $Q = P\eta + q$, unde si $P = \eta^{n-2} + a\eta^{n-3} + b\eta^{n-4} \dots + p$, erit $Q = \eta^{n-1} + a\eta^{n-2} + b\eta^{n-3} \dots + p\eta + q$. Cum itaque valeat pro coefficiente termini secundi, valet pro coefficiente termini tertii, et pro omnibus usque ad terminum $(m+1)$ tum.

Sequitur ex hisce, quod termini $(m+1)$ ti coefficientis λ sit $= \eta^m + a\eta^{m-1} + b\eta^{m-2} \dots + r\eta^2 + s\eta + t$. Si igitur η sit radix aequationis, erit $\lambda = 0$. Evanescente vero λ simul μ , ν et sequentes coefficientes omnes fiunt $= 0$. Cum enim coefficientis τ termini n ti post $(m+1)$ tum sit $\eta\sigma$, patet, posito $\sigma = 0$, evanescere etiam τ , unde si $\lambda = 0$, omnes, qui sequuntur λ , coefficientes fiunt $= 0$. Series igitur $x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \dots$ etc. abrumpitur in termino m to.

§. 83.

Si aequatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + px^{m-n+1} + qx^{m-n} \dots + rx^2 + sx + t = 0$ cujus
radices

radices sunt $\alpha, \beta, \gamma \dots \zeta, \eta$, dividatur per aequationem simplicem $x - \eta$, quotus $\frac{X}{x - \eta}$ fiet $= 0$ a substitutis $\alpha, \beta, \gamma \dots \zeta$, non vero a substituto η vel ullo alio quanto. Evanescit enim numerator X a substitutis $\alpha,$

$\beta, \gamma \dots \zeta$, ergo et fractio $\frac{X}{x - \eta}$ evanescit. Quod si

vero substituaturs η , evanescit simul numerator et denominator, quare hoc casu est $\frac{X}{x - \eta} = \frac{0}{0}$, qui va-

lor non est $= 0$. Ponitur enim X ita evanescere, ut termini, ex quibus X componitur, per signa contraria sese destruant. Si igitur omnes ipsius x termini positivi simul sumti fuerint $= P$ erunt omnes negativi si-

mul sumti $= -P$. Proinde loco $\frac{X}{x - \eta}$ habemus

$\frac{P - P}{\eta - \eta} = \frac{P}{\eta}$, qui valor non est $= 0$. Denique

quotus $\frac{X}{x - \eta}$ non fit $= 0$, nisi evanescente nume-

ratore. Si itaque aliud quoddam quantum π substitutum

efficiat, ut fit $\frac{X}{x - \eta} = 0$, erit π radix aequationis X

$= 0$, quod contra hypothesein.

Est igitur $\frac{X}{x - \eta} = 0$ aequatio gradus $(m - 1)$ ti

habens radices $\alpha, \beta \dots \zeta$, quarum numerus est $m - 1$, si numerus radicum aequationis $X = 0$ fuit m .

§. 84.

Si verum est de quavis aequatione gradus m habente radices α, β , etc. esse ipsam eandem cum aequatione orta ex multiplicatione simplicium $x - \alpha, x - \beta \dots$ etc. in se

invicem; idem verum erit de aequatione gradus $(m+1)$ ti, nimirum et hanc esse eandem cum aequatione orta ex ductu simplicium in se invicem, quarum quaelibet continet unam ex radicibus aequationis propositae. Sint enim aequationis $x^m + 1 + ax^m + bx^{m-1} \dots + rx^2 + sx + t$ (X) = 0 radices $\alpha, \beta \dots \zeta, \eta$, et dividi

intelligatur $X = 0$ per $x - \eta = 0$ erit $\frac{X}{x - \eta} = 0$ aequatio gradus m ti habens radices $\alpha, \beta \dots \zeta$, quae itaque posita sub hypothese eadem erit cum aequatione orta ex multiplicatione simplicium $x - \alpha, x - \beta \dots x - \zeta$.

Quodsi itaque hæc indicetur per Z, erit $Z = \frac{X}{x - \eta}$ et adeo $X = Z(x - \eta)$, ex quo patet propositum.

Cum igitur æquatio quaevis quadratica sit eadem cum aequatione orta ex ejusmodi simplicibus, in se ductis, quarum quaelibet continet unam ex radicibus aequationis quadraticae; eadem lex valet pro cubica, hinc et pro biquadratica et quavis alia.

§. 85.

Aequatio habens m radices est totidem dimensionum. Habeat enim aequatio quaedam m radices, quae sint $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$, erit hæc eadem cum aequatione orta ex m simplicibus $x - \alpha, x - \beta \dots x - \eta$ in se ductis. Hæc vero est aequatio m dimensionum.

Aequatio igitur m dimensionum habet totidem radices. Sit enim falsum et numerus radicum sit n , erit aequatio n dimensionum, quod contra hypothesein.

Porro quaevis aequatio m dimensionum oritur ex m aequationibus simplicibus in se ductis, quarum quaevis continet unam ex radicibus illius aequationis ordinis m . Ubi notandum est, quod radix positiva in aequatione simplici, per quam datur, semper afficiatur signo $-$, negativa signo $+$. Sit enim $x = a$; erit a radix affirmativa, cum forma aequationis simplicis, per quam exhibetur, sit x
 $- a$

$-a = 0$. Sit $x = -a$, erit $-a$ radix negativa, cum aequatio simplex, per quam exhibetur, sit $x + a = 0$. Caeterum radix illa a vel possibilis erit, vel impossibilis, et si prius vel rationalis, vel irrationalis.

Si nullus aequationis cujuscunque gradus m legitime ordinatae terminus defecerit, vel si defecerit, in ejus loco scriptus intelligatur $\pm 0x^{m-n+1}$, tot in aequatione sunt radices, quod signorum combinationes fieri possunt, quodvis cum eo componendo, quod immediate sequitur. Sic in aequatione $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x - 13 = 0$ quinque sunt radices, et totidem signorum successiones istae $++$, $+-$, $--$, $-+$, $+-$. Sunt enim sex aequationis termini.

§. 86.

Quaecunque sint aequationis signa, si multiplicetur per simplicem, quae radicem negativam continet, hoc modo :

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x - 13 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x^6 + 3x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 12x - 13x \quad \cdot \quad \cdot \quad (A)$$

$$+ 2x^5 + 6x^4 - 10x^3 - 8x^2 + 24x - 26 \quad (B)$$

$$x^6 + 5x^5 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + 4x^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$, \quad \cdot \quad \cdot \quad + x^4 - 14x^3 \quad \cdot \quad \cdot \quad + 11x - 26 = 0$$

duae inter multiplicandum producuntur series signorum, una in A, altera in B, plane caedem, sed quarum posterior uno loco magis versus dextram promota est: quo fit, ut quodlibet signum seriei B sit idem cum signo seriei A, quod illud uno loco praecedit. Si vero per aequationum simplicem, cujus radix est affirmativa, multiplicetur quaecunque aequatio, prout sequitur,

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 12x + 13 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 13x \dots (A)$$

$$- 2x^5 - 6x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 24x - 26 \dots (B)$$

$$x^6 + x^5 \dots - 4x^2 + 37x \dots$$

$$- x^4 - 14x^3 \dots - 26$$

signa posterioris seriei B, quæ multiplicatione produci-
tur, signis seriei prioris A adversantur ita, ut si quod-
cunque seriei B signum sumatur, id contrarium sit illi
signo seriei A, quod uno loco præcedit.

§. 87.

Jam ex signis harum serierum A et B atque ex ma-
gnitudinibus terminorum, qui iis signis adficiuntur, col-
liguntur signa æquationis productæ. Patet autem in si-
gis his locandis semper incipiendum esse a signo primi
termini seriei A, atque locando signa hujus seriei per-
gendum, donec ad terminum deveniatur, cui major
terminus cum signo contrario in serie B subscriptus est:
idque ubi contigerit deserta serie A signa deinde ex se-
rie B ordine petenda esse, donec iterum ad quantitatem
deveniatur, cui major cum signo contrario in serie A im-
minet. Superioris enim hujus termini signo loco infe-
rioris assumpto, quæ sequuntur, jam iterum ex superio-
ri serie petenda erunt, et porro alternatim, ita vero, ut
in serie B demum desinamus, cujus termino ultimo
cum nullus in serie A terminus immineat, ejus signum in
facto mutari nequit. Hinc sequitur in collocandis ita
producti signis semel minimum ex serie A in seriem B
transeundum esse, et quotcunque transitus æquatio mul-
tipli-

tiplicanda exigit, eorum tamen, qui fiunt ex A in B numerum semper unitate maiorem esse numero regressuum ex B in A.

§. 88.

Transitus ex serie in seriem fieri nunquam debet, nisi termini serierum A et B, quorum alter scriptus est sub altero, signa aduersa habuerint. Quodsi igitur primo æquatio multiplicetur per simplicem radicis negativæ; duo hi erunt signorum ordines, apud quos transitus fieri solos debet.

I.		II.	
a	a	a	c
+	+	+	-
d	d	d	b
+	+	-	+
vel		vel	
	a		c
	-		+
	d		b
	-		-

Ponitur transeundum esse vel a signo *a* ad signum *b*, vel a *d* ad *c*. Signum ergo *a* cum signo *b* idem erit, quia æquatio multiplicans habet radicem negativam. Signum *c* vero, cum aduersum sit signo *b*, etiam signo *a* aduersum erit. Sed *d* vel convenire potest cum signo *b*, vel ei aduersum esse. Quodsi secundo æquatio multiplicetur per simplicem radicis positivæ; ordo signorum, apud ea loca serierum A et B, in quibus transitum fieri necesse est, erit alteruter ex duobus, qui sequuntur:

I		II.	
a	c	a	c
$+$	$+$	$+$	$+$
d	b	d	b
$-$	$-$	$+$	$-$
vel		vel	
a	c	a	c
$-$	$-$	$-$	$-$
d	b	d	b
$+$	$+$	$-$	$+$

Jam est signum b adversum signo a , et cum præterea transitus ab a ad b , vel a d ad c ponitur faciendus; etiam c signo b adversum, adeoque cum a idem erit. Cæterum signa b et d vel eadem vel diversa erunt. Consequitur ex hisce, per multiplicationes has mutari debere signorum successiones ita, ut si in æquatione multiplicanda numerentur successiones signorum similium $++$ vel $--$, alius istarum successionum numerus deprehendatur in æquatione per multiplicationem producta; vel certe numerus successionum signorum adversorum $+ -$ vel $- +$ in æquatione producta a numero successionum ejusmodi in æquatione multiplicata diversus evadat. Id autem qua demum ratione fiat, exemplo, sed eo universaliter, optime declarabitur.

§. 88.

Sit primo æquatio quæcunque multiplicanda per simplicem radicis negativæ, cujus adeo signa sunt $++$, ac productæ ponantur multiplicatione hac series signorum, quales ab initio descriptæ sunt, sequentes:

$$(A) \quad \begin{array}{cccccccccccc} a & a & b & c & \beta & \gamma & & \delta & d & e \\ ++ & - & - & - & + & - & + & - & + & - & - & + \end{array}$$

$$(B) \quad \begin{array}{cccccccccccc} a & & b & c & & & & & d \\ + & + & - & - & - & + & - & + & - & + & - & + \end{array}$$

Signa-

Signatis ergo omnibus successionebus similium signorum $++$ vel $--$ per litteras a, b, c, d easdem in utraque serie, patet, earum numerum indifferenter obtineri, numeratis his litteris, siue in serie A occurrant, siue in B, sed ita ut nulla bis sumatur. Si jam cum ponuntur signa aequationis productae, apud α transeundum sit ex A in B, apud β regrediendum ex B in A: apud γ iterum ex A in B descendendum, et ita porro; successiones signorum similium in aequatione producta, quae scilicet signa petit ab initio usque ad α ex seriei A, ab α usque ad B ex seriei B a β ad γ iterum ex A et ita porro alternando, tandemque ab ϵ ad finem ex B colliguntur hunc in modum. Prima successio est a ; altera necessario accidit apud α ex A in B descendendo: tertia est b seriei B, quarta foret c ejusdem seriei, sed hæc ascendendo in seriem A destruitur, unde huc usque non sunt successiones, nisi tres. Sed quarta accedit apud γ descendendo, quinta apud δ adscendendo, sexta est d , et septima accedit apud ϵ descendendo. Est ergo in hoc exemplo numerus successionum similium signorum tribus ejusmodi successionebus auctus. Generatim autem patet, per omnem descensum ex A in B numerum successionum harum necessario auctiorem fieri; per adscensum vero vel itidem unam talem successione ad reliquas accedere, ut hic contingit apud δ , vel unam decedere, ut apud β contingit successione c destructa. Unde cum transgressionibus ex A in B necessario una plures sint, quam regressionibus ex B in A; generatim sequitur, quotiescunque in ponendis signis facti ex una serie in alteram transeundum sit, numerum successionum $++$ vel $--$, quae ad similes successiones aequationes multiplicatae vel seriei A aut B ea re accedunt, neque unitate minorem, neque universo transgressionum numero majorem esse. Sic in hoc exemplo successiones ejusmodi tres accesserunt, cum transitus facti sint quinque.

§. 90.

Sit secundo æquatio multiplicanda per simplicem radicis affirmativæ, cujus adeo signa sunt $+$ —, sintque iuter multiplicandum producta signorum ordines secundum dicta explicandi isti

$$(A) \quad \begin{array}{cccccccccccc} a & \alpha & b & c & \beta & & \gamma & & \delta & d & \epsilon \\ + & - & - & + & - & - & - & - & - & - & + & + \end{array}$$

$$(B) \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} & & a & & b & c & & & & & & & & d \\ . & . & - & + & + & - & + & + & + & + & + & + & + & - \end{array}$$

Signentur jam omnes successiones signorum adverforum $+$ — vel — $+$ litteris a, b, c, d . Græcis litteris tribuatur significatio, cum illa, quam habent in §. præc. eadem. Nunc prima signorum adverforum successio est a superioris seriei, altera accedit apud α ex A in B transiendo. Tertia est b , quarta foret c seriei B, sed hæc destruitur per transitum ex B in A, unde quarta est, quæ accedit apud γ descendendo, quinta fit ascendendo apud δ , sexta est d seriei A, et septima, quæ fit descendendo apud ϵ . Eadem igitur hic prorsus obtinent, quæ apud præcedentem multiplicationem vidimus. Per omnem descensum numerus successionum $+$ —, vel — $+$, quæ in sunt in æquatione multiplicata, vel in serie A aut B necessario una augetur, per adscensum vero vel itidem talis successio ad reliquas accedit, vel una ab earum numero detrahitur. Adscensionum vero numerus unitate minor est numero descensionum. Ideo quoque universus numerus harum successionum, quæ ad æquationem quamcunque accedunt, si per simplicem radicis positivæ multiplicatur, non potest esse minor unitate, neque major universo transgressionum numero.

§. 91.

Quia ergo per quamlibet æquationis multiplicationem, per quam nova radix realis negativa in eam inferitur, una minimum signorum similium successio $+$ $+$ vel

vel — — ad earum, quae in æquatione multiplicata infuerunt, numerum accedit; numerus harum successio-
num in quacunque æquatione numero radicum ejus rea-
lium negativarum minor non erit. Similemque in mo-
dum concludetur, neque numerum successio-
num adverforum $+ -$ vel $- +$ numero radicum cujus-
cunque æquationis realium affirmatarum, minorem
fore. Quare, si in æquatione omnia signa fuerint ea-
dem $+$ vel $-$, nulla æquationis radix realis positiva erit.
Si foret vel una, etiam una minimum in ea deprehen-
deretur signorum adverforum successio. Si ergo hu-
jusmodi æquatio praeter reales negativas, alias radices
contineat, illae impossibiles erunt. Sic quoque si in æ-
quatione quodlibet signum utrique vicino adversum fue-
rit, non inerit in æquatione radix realis negativa. Si
foret vel una, una nimirum in ea appareret similium si-
gnorum successio. Quare si ejusmodi æquatio praeter
reales positivas alias habuerit radices, hæ impossibiles
erunt.

§. 92.

*In quavis æquatione, cujus radices omnes reales
sunt, numerus successio-
num signorum adverforum $+ -$ vel
 $- +$ æqualis erit numero radicum ejus affirmatarum, et
numerus successio-
num similium signorum $++$ vel $--$ æqua-
lis numero radicum ejusdem æquationis negativarum.* Sit
enim n numerus radicum negativarum et N numerus
successio-
num $++$ vel $--$ ejusdem æquationis. Præ-
terea sit m numerus radicum ejus affirmatarum et M
numerus successio-
num $+ -$ vel $- +$. Erit ergo $n + m$
 $= N + M$. Jam N non minor est quam n . Est vero
et N non major quam n . Si enim ponatur $N > n$,
erit $M < m$, quod contra demonstrata. Ergo est $N =$
 n , et hinc quoque $M = m$.

Si igitur undecunque constiterit, numerum radi-
cum æquationis realium negativarum numero N , simul-
que numerum radicum realium affirmatarum numero

Mae.

Maequalem non esse; concludendum erit, aliquas radices aequationis impossibilis esse.

§. 93.

Si A factum denotet ex certis quibusdam factoribus simplicibus, qui scilicet in alios simpliciores dividendo resolvi non possunt; non producetur idem A ex aliis factoribus simplicibus a prioribus diversis. Sint inter factores simplices facti A hi duo α et β ; sique A dividatur per α , prodeat a simplex vel ex aliis factoribus multiplicando compositus; si vero A dividatur per β prodeat b , itidem vel simplex, vel compositus: erit $\alpha a = A = \beta b$,

hinc $\alpha = \frac{\beta b}{a}$. Quare cum α instar numeri integri

fit, et $\frac{\beta b}{a}$ integer erit, divideturque adeo βb per a

absque residuo, quod fieri non posse, nisi a in duos factores solvi quaeat, quorum alter dividat β alter vero b , facile patet, si inter eos factores et unitas admittatur et β atque b . Sint factores isti m et n , erit $mn = a$,

et $\alpha = \frac{\beta}{m} \times \frac{b}{n}$, atque $\frac{\beta}{m}$ integer erit, ut et

$\frac{b}{n}$. Cum ergo factor β simplex sit, erit vel $m = 1$,

vel $m = \beta$. Sit 1) $m = 1$, erit $\alpha = \beta \times \frac{b}{n}$, id est

$\beta \times \frac{b}{n}$ erit æqualis simplici α , quod esse non potest,

nisi $\frac{b}{n} = 1$, et hinc $b = n$. His autem in $\alpha a = \beta b$

introducitis, fit $\alpha n = \beta n$, atque $\alpha = \beta$. Ideo divisores α et β , qui diversi esse ponebantur, non deprehendun-

tur diversi. Sit 2) $m = \beta$, erit $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, et $a = mn$,

=

$= \beta n$. Sed $\alpha = \frac{b}{n}$, five $\alpha n = b$. His vero iterum

in $\alpha\alpha = \beta\beta$ introductis, fit $\alpha\beta n = \beta\alpha n$, ex quo patet, neque hoc sumto, A in diversos factores simplices solvi.

Omnis aequatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + rx + s = 0$ est factum ex tot factoribus simplicibus huius formæ $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$ etc. compositum, quot unitates insunt in numero m , in quibus α , β , etc. sunt radices aequationis propositae. Ideo omnis aequatio ex certis tantum aequationibus simplicibus $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$ etc. componetur, non ex aliis atque aliis.

§. 94.

Si aliquis aequationis terminus defecerit, poterit ejus loco scribi vel $+ 0$, vel $- 0$, perinde enim est. Quodsi ergo alterutro horum sumto, alius numerus radicum affirmatarum vel negatarum ex successionibus signorum colligitur, quam si sumatur alterum; id indicio erit, aequationem radices impossibiles continere, quia in eadem aequatione alius atque alius numerus radicum affirmatarum inesse nequit. Continget autem id, ut per dictas positiones diversi radicum affirmatarum vel negatarum numeri producantur, si signum termini, qui deficientem praecedat, idem fuerit cum signo termini deficientem sequentis, non aliter. Sit $y^3 + py - q = 0$, atque si in locum termini deficientis ponatur $+ 0y^2$, aequatio fit $y^3 + 0y^2 + py - q = 0$, cujus duae producantur radices negativae et una affirmativa. Si vero eodem loco scribatur $- 0y^2$, omnes aequationis radices per signa indicantur affirmativae esse. Utrumque cum esse non possit, necesse est, earum aliquas impossibiles esse.

§. 95.

Si in aequatione plures uno termino deinceps defecerint, radicum aliquas impossibiles esse palam erit, nisi in

in locum cujuslibet terminorum deficientium $+0$ et -0 substituto omnes signorum combinationes, quae ita oriuntur eundem radicum affirmatarum vel negativarum numerum indicaverint. Id ergo cum esse non possit, omnes ejusmodi aequationes radices impossibiles continebunt. Sit aequatio $x^3 + a = 0$, vel $x^3 - a = 0$, in qua duo deinceps termini deficiunt. Substituto ergo in locum cujusvis nunc $+0$, nunc -0 , quatuor hi signorum ordines prodeunt

ex priori				ex posteriori			
+	+	+	+	+	-	+	-
+	+	-	+	+	-	-	-
+	-	+	+	+	+	+	-
+	-	-	+	+	+	-	-

quorum primi indicant, omnes radices negativas esse vel affirmativas, reliqui non omnes. Patet autem vel ex his exemplis, manentibus signis extremis, si intermedia omni, quo possunt, modo coordinentur, fieri non posse, ut idem per omnes hos ordines radicum numerus indicetur.

§. 96.

Aequatione quacunque per quamcunque simplicem radice positivae multiplicata, numerus radicum positivarum in aequatione producta unitate major fieri debet; idemque debet contingere radicibus negativis si radix aequationis simplicis datam multiplicantis fuerit negativa. Id ergo augmentum nisi per ordinem signorum aequationis ea multiplicatione productae indicetur, aliquas radicum aequationis multiplicatae impossibiles esse, palam erit. Ita si aequatio $x^3 + x^2 + 3x + 5 = 0$ multiplicetur per $x - 2 = 0$, prodit $x^4 - x^3 + x^2 - x - 10 = 0$, cujus tres radices affirmativas ordo signorum exhibet, et unam negativam. Debebat autem esse una affirmativa et tres negativae. Ergo aequatio proposita continet radices impossibiles.

§. 97.

§. 97.

Quodsi quantitas quaecunque realis, quæ sit E , dividatur per impossibile $R + I$ compositum ex reali R et imaginario I quocunque; quotus partim ex realibus constabit, partim ex imaginariis, quia sive ex solis realibus constare ponatur, sive ex solis imaginariis, multiplicatus in divisorem $R + I$ dividendum reale E restituere nequit. Sit omnium terminorum quoti realium summa $= r$, et summa omnium terminorum quoti imaginariorum $= i$, ita ut integer quotus sit $= r + i$; erit $E = (R + I)(r + i) = Rr + Ri + Ir + Iz$, ubi Rr et Iz quantitates reales erunt, reliquæ Ri et Ir imaginariae. Jam quia E realis ponitur, erit $E = Rr + Iz$ et $Ri + Ir = 0$, ergo quoque est $E = Rr + Iz - Ri - Ir = (R - I)(r - i)$. Exinde concludimus, quod quantitas realis E divisa per impossibile $R - I$ reddat quotum $r - i$, qui a priori $r + i$ solis signis imaginariorum differt. Quodsi igitur aequatio dividi possit per simplicem $x + r + i = 0$, notante r quantitatem realem et i impossibilem, ita ut sit $-r - i$ radix aequationis; eadem aequatio quoque per $x + r - i = 0$ dividetur, atque ideo simul habebit radicem impossibilem $-r + i$. *Quodsi igitur aequatio habeat radices impossibiles, earum numerus semper est numerus par*, atque perpetuo quacunque earum summa potest reperiri alia, quæ si illi addatur, summam realem exhibeat. Est enim $(-r + i) + (-r - i) = -2r$, et $(+r + i) + (+r - i) = 2r$. Aequationum autem simplicium, per quas duæ istae radices impossibiles exhibentur, altera ducta in alteram, aequatio quadratica rationalis producitur. Est enim $(x + r + i)(x + r - i) = (x + r)^2 - ii$, in qua expressione utrumque quadratum reale est.

§. 98.

Cum ergo et aequatio simplex, quæ radicem realem exhibet, in aliam ejus generis simplicem ducta, aequationem quadraticam realem det, etsi non semper

rationalem: quaelibet aequatio alicujus eorum ordinum, quorum index est numerus par, constabit ex aequationibus quadraticis realibus in se invicem ductis. Si vero impar fuerit exponens ordinis, ad quem aequatio pertinet, ad quadraticas istas aequationes simplex accedet itidem realis. Si index ordinis fuerit $2n$, erit n numerus aequationum istarum quadraticarum: si vero index ordinis fuerit $2n+1$, ad eundem quadraticarum numerum æquatio simplex realis accedet. Separata igitur primo, si opus sit, reali simplici, si aequatio in quadraticas reales soluta intelligatur, quarum haec forma generalis erit $xx+px+q=0$; radices ejus omnes, praeter illam, quæ in simplici separata ineft, ad hanc formam redibunt $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$, neque erit in æquatione radix impossibilis, quæ per hanc formam exhiberi nequeat: in qua cum p et q quantitates reales sint, licet non semper sint rationales, impossibilitas ab eo solo pendebit, quod $\frac{1}{4}pp-q$ sit quantitas negativa. Quare omnis radix impossibilis cujuscunque aequationis reduci poterit ad hanc formam $a \pm \sqrt{r} - \beta$ indeque porro ad simplicissimam istam $a \pm \beta\sqrt{r} - 1$ notantibus a et β quantitates reales.

§. 99.

Si propositis quantitatibus quotcunque, quarum singulae binæ, vel singulae tres etc. inter se combinandæ sunt; quæratnr numerus combinationum possibilium; numerus indicans, quot earum invicem combinari debeant, dicitur *Exponens combinationum*. Sic datis quantitatibus tribus, si quaeratur numerus combinationum, quando singulae binæ inter se combinantur, erit numerus 2 exponens combinationis. In casibus specialibus, si numerus quantitarum combinandarum haud magnus est, dato exponente ipse numerus combinationum haud difficile invenitur. Sic quantitas una nullam combinationem admittit. Si duæ quantitates a et b sunt combinandæ, una tantum combinatio ab possibilis est, exponente existente

exponente existente 2. Trium a, b, c , combinationes sunt tres, nimirum ab, ac, bc , si nimirum 2 est exponens combinationis. Numero vero 3 pro exponente combinationis assumpto, combinatio tantum una est possibilis. Si quatuor quantitates a, b, c, d exponente 2 sunt combinandæ, erunt combinationes sex istæ ab, ac, bc, ad, bd, cd , possibiles; exponente 3 possibiles sunt combinationes quatuor abc, abd, bcd, acd ; denique exponente 4 iterum una tantum combinatio $abcd$ possibilis manet. Caeterum quotcunque sint quantitates combinandæ, ut $\alpha, \beta, \gamma, \delta - - \eta, \vartheta$, quarum singulæ n in quamvis combinationem assumuntur, ita ut exponens combinationis sit numerus n ; quibusdam harum combinationum tantum inerit ultima ϑ , reliquis non inerit, ideoque numerus earum combinationum, quibus non inest ϑ , æqualis erit numero combinationum possibilium, si quantitatibus $\alpha, \beta, \gamma - - \eta$, singulæ n inter se combinentur. Reliquarum combinationum, quibus inest ϑ , quælibet non nisi $n - 1$ ex quantitatibus cæteris $\alpha, \beta, \gamma - - \eta$, continebit, ideoque numerus earum combinationum, quibus inest ϑ , æqualis erit numero combinationum possibilium, si quantitatibus $\alpha, \beta, \gamma - - \eta$, singula $n - 1$ inter se combinentur. Combinationum numerus, qui oritur ex $\alpha, \beta, \gamma - - \eta$, exponente combinationis n , ponatur $= \lambda$; combinationum numerus, qui oritur ex $\alpha, \beta, \gamma - - \eta$, exponente combinationis $n - 1$, sit $= \mu$; denique numerus combinationum, qui oritur ex $\alpha, \beta, \gamma - - \eta, \vartheta$, exponente n ponatur $= \nu$: et patet, esse $\nu = \lambda + \mu$.

Oriuntur igitur omnes combinationes ν , sumendo omnes combinationes λ , omnesque combinationes, quæ oriuntur, si cuivis combinationum μ jungatur ϑ . Quod si igitur quantitates combinatæ in se multiplicari intelligantur, et summa factorum λ sit $= \phi$, factorum $\mu = \psi$, factorum $\nu = \pi$; patet, fore $\pi = \phi + \psi \vartheta$.

§. 100.

Si pro æquationibus gradus n ti verum sit, coefficientem termini n ti non connumerato primo, esse æqualem summae factorum ex singulis n radicibus, cum signis propriis, si n par, contrariis vero, si n impar fuerit; idem verum est pro æquationibus gradus $(n+1)$ ti. Sint æquationis gradus $(n+1)$ ti.

$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} \dots Px^{m-n+1} \dots + Rx^2 + Sx + T$ radices $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta, \vartheta$; sitque æquatio, cujus radices sunt $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$, excluso ϑ

$$\begin{aligned} & x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + \phi x^{m-n+1} \dots \\ & + rx^2 + sx + t, \text{ qua ducta in } x - \vartheta \text{ oriatur} \\ & x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1} \dots + \phi x^{m-n+1} \dots + \\ & \quad sx^2 + tx \\ & \quad - \vartheta x^m - \vartheta ax^{m-1} \dots - \vartheta \psi x^{m-n+1} \dots - \\ & \quad \vartheta rx^2 - \vartheta sx - \vartheta t. \end{aligned}$$

Erit itaque $P = \phi - \vartheta \psi$.

Sit primum n numerus par, et assumtis, quæ ponuntur in propositione, erit

$+ \phi =$ summae factorum ex singulis n radicibus $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$, cum signis propriis,
 $+ \psi =$ summae factorum ex singulis $n-1$ radicibus $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$, cum signis contrariis.

Hinc $P = \phi - \vartheta \psi =$ summae factorum ex singulis n radicibus, $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta, \vartheta$, cum signo propriis.

Si vero n fuerit numerus impar, eodem modo patet esse

$+ \phi =$ summae factorum ex singulis n radicibus $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$ cum signis contrariis,
 $+ \psi =$ summae factorum ex singulis $n-1$ radicibus $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta$ cum signis propriis.

Ergo est $P = \phi - \vartheta \psi =$ summae factorum ex singulis n radicibus $\alpha, \beta, \gamma \dots \eta, \vartheta$, cum signis contrariis.

Ex

Ex his concludimus, quod lex ista coefficientium valeat pro omnibus aequationibus algebraicis. Valet enim pro aequationibus quadraticis, ergo et pro cubicis, hinc quoque pro biquadraticis et sic porro; ergo valet pro omnibus. Est igitur coefficientis termini secundi aequationis algebraicae legitime ordinatae aequalis summae omnium radicum cum signis contrariis; coefficientis termini tertii aequalis summae factorum ex singulis binis, cum signis propriis; coefficientis termini quarti aequalis summae factorum ex tribus quibusvis radicibus cum signis contrariis, et sic porro usque ad terminum ultimum, qui aequalis est facto omnium radicum cum signis propriis vel contrariis, prouti vel numero pari vel impari a termino aequationis primo distat, ipso termino primo non connumerato.

§. IOI.

Ea, quae huc usque de radicibus aequationem altiorum fuerunt exposita, adeo universalis sunt, ut de eorum veritate possimus esse convicti, quicumque valor litteris α , β , γ , etc. quibus radices designavimus, tribuatur. Denotare nimirum possunt tam impossibiles, quam reales quantitates, et hoc casu tam positivas quam negativas, integras et fractas, rationales vel irrationales.

Numerus quivis sub forma fracti $\frac{a}{b}$ continetur, posito $b = 1$, si integer sit. Ideo patet, aequationes simplices $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$, $x - \gamma = 0$, etc. ex quibus aequatio quævis gradus altioris multiplicando conflatur,

sub hac quoque forma $x - \frac{a}{b} = 0$ vel $bx - a = 0$,

vel $a - bx = 0$ exhiberi posse. Quod si terminus aequationis ultimus fuerit numerus fractus verus, vel etiam spurius integro quodam non aequipollens, non omnes aequationis radices erunt numeri rationales integri; si enim omnes forent integri, etiam factum ex omnibus ideoque ter-

minus ultimus integer foret, quod est contra hypothe-
sin. Aequationis igitur hujus formæ $px^m + q^{m-1} \dots$

$+ rx + s$, quæ facta reductione fit $x^m + \frac{q}{p} x^{m-1} \dots$

$\dots + \frac{r}{p} x + \frac{s}{p}$ radices non omnes erunt numeri

integri, si $\frac{s}{p}$ sit fractio vera, vel spuria integro non

æquipollens. Quodsi in hac æquatione sit $s = 1$, et p
numerus integer, omnes radices illius æquationis pos-
sunt esse numeri fracti, eundem habentes numeratorem
unitati æqualem. Quod si hoc accadat, erit denominator
 p factum ex omnibus harum fractionum denominatoribus,
et æquationes simplices, quæ radices harum æquationum

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ etc. exhibent, erunt hujus formæ $x -$

$\frac{1}{\alpha} = 0; x - \frac{1}{\beta} = 0$ etc, vel $1 - \alpha x = 0, 1 - \beta x = 0$

etc. Praeterea coëfficiens cujuslibet termini n ti non con-
numerato primo est summa factorum ex singulis n earum
fractionum, quæ sunt radices æquationis. Multiplicetur
tota æquatio, quæ sit gradus m per denominatorem termini
ultimi, qui est factum ex m radicibus cum contrariis vel pro-
priis signis, prout terminus is vel numero impari vel nu-
mero pari a termino primo distat; erit coëfficiens cujus-
cunque termini n ti non connumerato primo, æqualis
summa factorum et singulis $m - n$ denominatoribus fra-
ctionum, quæ sunt radices. Scribatur æquatio ordine
inverso sequentem in modum

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 - \dots - sx^m = 0$$

atque in termino ultimo 1 erit $m = n$ ideoque $m - n = 0$;
in termino secundo a fine, est $m - n = 1$, ideoque coef-
ficiens $a =$ summa ex singulis denominatoribus fractio-
num,

num, quae sunt hujus æquationis radices cum signis contrariis; in termino tertio a fine est $m - n = 2$, et ideo $b =$ summæ factorum ex singulis 2 denominatoribus fractionum earum, quæ sunt radices cum signis propriis. Ideo generaliter est termini n ti a fine, non connumerato ultimo coëfficiens æqualis summæ factorum ex n denominatoribus earum fractionum, quæ sunt hujus æquationis radices, cum signis propriis, si n par, contrariis vero, si n fuerit numerus impar.



SECTIO VIII.

DE

SOLVTIONE PROBLEMATVM DETERMINATORVM SECUNDO ORDINE ALTIORVM ARITHMETICA.

§. 102.

Methodus in antecedentibus exposita, secundum quam ex æquatione problematis fundamentaliteruitur valor incognitæ quantitatis, si simplex sit ista æquatio, sufficiens non est, quando propositi problematis conditiones æquatione quadam altiore et quidem affecta exprimuntur. Ipsa illa methodus jam aliqua ratione mutanda erat, si æquatio problematis erat quadratica non pura. Detegendi nimirum erant duo valores incognitæ quantitatis; cum unicus tantum valor sit inueniendus, si propositi problematis conditiones per simplicem æquationem poterant exprimi. Jam vero generaliter omnis æquatio algebraica tot exhibet valores incognitæ quantitatis, quot unitates continet exponens ordinis, ad quem æquatio pertinet. Atque detegendi

sunt isti valores omnes, imaginariis non exclusis, si problema plenarie solvere velimus. Tantum abest, ut generales methodi cognitae sint, in quovis casu ad completam ejusmodi problematis solutionem perducentes, ut potius ipsum hoc negotium vires Analyseos hucusque cognitae superare fatendum sit. Exponere in hac sectione tantum possumus prima intricatae hujus investigationis elementa, cum methodos hunc in finem adhibendas perplures ipsa demum Analysis Sublimior suppeditare queat.

§. 103.

Generalis aequationum consideratio in praecedente sectione exposita docet, radices aequationis vel reales esse, vel impossibiles. Atque reales iterum rationales esse possunt vel irrationales. Si aliqua aequationis radix fuerit realis et rationalis, ea quae de coefficientibus terminorum aequationis algebraicae exposita sunt, clare ostendunt methodum, quamvis ejusmodi radicem inveniendi. Demonstravimus enim (§. 100.) quod coefficientis termini secundi aequationis algebraicae legitime ordinatae aequalis sit summae omnium radicum cum signis contrariis; coefficientis termini tertii aequalis summae factorum ex singulis binis cum signis propriis; coefficientis termini quarti aequalis summae factorum ex tribus quibusvis radicibus cum signis contrariis, sicque porro usque ad terminum ultimum plane cognitum, qui aequalis est producto omnium radicum in se invicem cum signis propriis vel contrariis, prouti vel numero pari vel impari distat a termino aequationis primo, ipso termino primo non connumerato. Resolvatur itaque terminus aequationis legitime ordinatae ultimus in suos factores, atque hi factores vel cum signis propriis vel contrariis, prout distantia termini ultimi a primo illud jubet, successive substituantur loco incognitae quantitatis in aequatione data. Quod si enim eorum numerorum aliquis substitutus efficit, ut omnes termini aequationis

mu-

mutuo sese destruant, is erit unus incognitae quantitatis valor, idemque rationalis. Sit proposita aequatio $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, erunt ultimi termini cum signo contrario factores vel, 1, 3, -5; vel -1 + 3 + 5 vel +1 - 3 + 5. Posito jam $x = +1$, erit $1 - 3 - 13 + 15 = 0$. Posito $x = +3$, aequationis termini non destruantur, proinde +3 non est radix aequationis. Posito $x = +5$ fiet $125 - 75 - 65 + 15 = 0$, ideo quoque +5 est radix aequationis. Quia jam factores +1, +5, et -3, ultimum aequationis terminum producant; tentetur substitutio cum signo contrario $x = -3$. Et quia fit $-27 - 27 + 39 + 15 = 0$, -3 est radix aequationis, atque proinde omnes hujus aequationis radices inventae sunt, quia tribus plures non adsunt.

§. 104.

Ex his patet, esse $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = (x-1)(x+3)(x-5)$ (§.84.). Poterat igitur quoque per divisionem tentari, utrum aliquis factorum termini ultimi sit radix aequationis. Quia enim generaliter aequatio algebraica altioris gradus est productum ex tot aequationibus simplicibus, quarum quaelibet exhibet unam aequationis radicem, quot unitates continet exponens ordinis ad quem aequatio pertinet; formentur aequationes simplices $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, vel $x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, atque his aequationibus divisio tentetur. Quodsi proposita aequatio per unam earum aequationum simplicium divisibilis esse deprehendatur absque residuo; eadem aequatio simplex unam aequationis propositae indicat radicem. Si vero aequatio proposita per nullam earum aequationum simplicium descripto modo formatarum dividi queat; hoc indicio erit, quod eadem nullam omnino agnoscat radicem realem rationalem.

§. 105.

Ultima hæc methodus palmam praeripit priori.

A a 5

Quod.

Quodsi enim aequatio proposita sit gradus m , eaque divisibilis deprehendatur per aequationem simplicem $x + a = 0$, quotus fit aequatio gradus $m - 1$, quæ si inventa sit, eodem modo tractanda est, ac prior. Eadem enim hæc aequatio continet reliquas aequationis propositae radices. Labor vero sæpe minuitur inveniendi radices hujus aequationis, quæ quotus est, si nimirum ultimus ipsius terminus, quod semper accidit, nisi radix inventa sit vel $+1$ vel -1 , minor est termino ultimo prioris aequationis. Quin sæpius aliae extant methodi aequationis hujus radices, quæ quotus est, omnes non tantum reales rationales, sed quoque irrationales vel adeo impossibiles inveniendi. Sic si æquatio proposita fuerit cubica, quotus fit æquatio quadratica, cujus ambæ radices semper inveniuntur ex §. 61. Sic in ex-

emplo §. *praec.* invenitur
$$\frac{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}{x - 1} =$$

$x^2 - 2x - 15$. Aequatio vero $x^2 - 2x - 15 = 0$ quadratica est, atque proinde duae reliquae radices satis promte inveniuntur. Caeterum quia ultimus æquationis propositae terminus multos habere potest divisores, quorum vel unus tantum, quin adeo nullus est datae aequationis radix, admodum molesta sæpe evadit hæc methodus, radicem, vel quod idem est, factorem simplicem realem aequationis rationalem inveniendi. Huic vero incommodo remedium afferetur, si duae assignari possint quantitates, quarum altera major sit quavis radice aequationis reali positiva, altera autem major quavis radice aequationis reali negativa, quæ quidem quantitates *limites aequationis* vocantur. Atque investigatio earum limitum sequentibus nititur ratiociniis.

§. 106.

F.228.

Quodsi aequatio quaedam duas habeat radices reales positivas AB, AC, negativam vero unam AD, assumatur punctum aliquod E pro lubitu, atque ponatur AE
 $= p,$

$= p$, $EC = z$: erit $x = p + z$, si incognita aequationis littera x denotetur. Substituatur itaque $p + z$ loco x in aequatione, atque aequatio proposita mutabitur in aliam, cujus radices erunt EC , EB , ED , atque punctum B datur per radicem negativam, quod ante dabatur per radicem affirmativam. Ponatur jam p vel AE crescere, et radix positiva EC decrefcet, atque fiet negativa, si E cadat ultra c . Ergo jam AE major est quavis radice aequationis reali positiva, si $p + z$ loco x substituto omnes radices aequationes reales evadant negativae. Quod si vero punctum E assumptum fuerit in parte opposita versus D , atque versus hanc partem AE negative crescente tandem cadat ultra D , loco radice negativae AD introducitur positiva ED , atque jam omnes radices aequationis fiunt positivae. Ideo vicissim si $-p + z$ loco x substituto, omnes radices aequationis fiant positivae, erit p major quavis radice reali negativa. Ordo vero signorum ostendit, utrum aequationis propositae radices reales omnes positivae sint, an omnes negativae (§. 92.). Sit igitur jam proposita aequatio $x^3 - x^2 - 57x + 105 = 0$, posito $x = z + p$, erit

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 & = & z^3 + 3pz^2 + 3p^2z + p^3 \\
 -x^2 & = & -z^2 - 2pz - p^2 \\
 -57x & = & -57z - 57p \\
 +105 & = & +105.
 \end{array}$$

Aequationis ita productae signa omnia sunt eadem, si ponatur $p = 10$, et proinde posito $10 + z$ loco x in aequatione proposita, omnes ejus radices fiunt negativae, quod indicio est, $+10$ esse limitem radicum aequationis positivarum. Ipsa haec limes vero magis arctari potest, si tentetur substitutio numerorum positivorum denario minorum. Posito $p = 8$ statim patet, eadem signa $+$ adhuc apud priora membra locum habere. Sed et ultimum membrum $512 - 64 - 456 + 105$ positivum manet. Proinde arctior adhuc limes radicum positivarum erit 8 . Quod si ulterius tentetur substitutio $p = 7$, quod prioribus

bus terminis positivis manentibus fieri posse, facile perspicitur, ultimus terminus fit $343 - 49 - 399 + 105 = 0$, atque aequatio reducitur ad sequentem $z^3 + 20z^2 + 76z = 0$, ex qua habetur una radix $z = 0$, atque exinde concluditur, unam aequationis $x^3 - x^4 - 57x + 105 = 0$ I adicem esse $= 7$, eamque simul positivarum maximam. Ipsa igitur hæc aequatio jam plenarie soluta est, quia divisa per $x - 7 = 0$ reducitur ad quadraticam. Quodsi tamen eadem methode quaerere velimus limitem radicum hujus aequationis negativarum; statim patet, in aequatione transformata

$$\begin{array}{rcccccl} z^3 & + & 3pz^2 & + & 3p^2z & + & p^3 & = & 0 \\ & & - & z^2 & - & 2pz & - & p^2 & \\ & & & & - & 57z & - & 57p & \\ & & & & & & + & 105 & \end{array}$$

hunc fore signorum ordinem $+ - + -$, si ponatur $p = -10$. Quare hac positione omnes radices aequationis fiunt affirmativae atque -10 est limes radicum negativarum. Sed hæc quoque limes magis arctari potest. Posito enim $p = -8$ iterum prodit ordo signorum radices affirmativas indicans.

§. 107.

Accidit interdum ut limites aequationum ita quaesiti, et quantum fieri potuit arctati, in unam coeant. Atque tum illud indicio est, aequationem propositam nullas habere radices reales. Intra unum enim eundemque limitem a et a , quicumque sit, nulla alia radix realis contineri potest, praeter 0, quae nunquam in censum venit, quia ante tolli solet, aequationem per x dividendo. Evenit hoc in sequente aequatione $x^2 + 5x + 10 = 0$, quae posito $x = p + z$ sic transmutatur

$$\begin{array}{rcccccl} z^2 & + & 2pz & + & p^2 & = & 0 \\ & & + & 5z & + & 5p & \\ & & & & + & 10 & \end{array}$$

Quodsi

Quodsi jam sit $p = -\frac{1}{2}$, fiet $z^2 \pm 0z + \frac{1}{4} = 0$. Atque proinde simul obtinetur cum ille signorum ordo, qui ad limitem radicum affirmatarum pertinet, tum is, qui pertinet ad limitem negativarum, quia 0 semper utrolibet signo affici potest. Radices igitur datae aequationis reales inter limites $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ cadunt, id est, nullae sunt.

§. 108.

Substitutis $z - f$ vel $z + f$ loco x in aequatione, cujus unus vel alter terminus deficit, aequatio fit completa. Quodsi enim fuerit $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$, posito $x = z \pm f$ erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & z^3 \pm 3fz^2 + 3ffz + f^3 \\ - ax^2 & = & - az^2 \pm 2afz - aff \\ + bx & = & \pm bz + bf \\ + c & = & + c; \end{array}$$

atque aequatio sic producta

$$\begin{array}{rcl} z^3 & \pm & 3fz^2 + 3ffz \pm f^3 = 0 \\ & - & az \pm 2afz - aff \\ & & \pm bz + bf \\ & & + c \end{array}$$

plena erit, licet in aequatione $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ fuerit vel $a = 0$, vel $b = 0$, vel utrumque. Praeterea si f assumatur debitae magnitudinis, vicissim ex aequatione proposita quilibet terminus tolli potest. Si enim fuerit in casu praesenti $3f - a = 0$, ex quo concluditur $f = \frac{1}{3}a$, evanescit coefficientis ipsius z^2 atque terminus secundus tollitur. Pari ex ratione, si f determinatur ex aequatione $3ff - 2af + b = 0$, tollitur terminus tertius. Determinato vero ipsius f valore ex aequatione $f^3 - aff + bf + c = 0$, quartus terminus evanescit: quae ratiocinia per omnes terminos possunt continuari. In casu praesenti si quartus aequationis $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ terminus hac transformatione evanescat, producit aequatio hujus formae $z^3 + pz^2 + qz = 0$, quae di-
vifa

vifa per z ad inferiorem deprimitur gradum. Sed quantitas f , qua tollitur terminus quartus, per cubicam datur æquationem; atque si plures fuerint æquationes termini, æquationes, quibus reperitur ipsius f valor, quo substituto tollitur aliquis terminorum quarto posterior, cubica etiam altiores sunt. Secundus igitur et tertius æquationis terminus tolli semper potest, quia non tantum æquationis simplicis, sed et quadraticæ solutio semper in potestate est. Nihilo tamen minus plerumque secundi tantum termini sublatio utilis est ob varios scopos infra declarandos.

§. 109.

Præter eam, quæ modo explicata est, æquationis transformationem, aliæ quoque suscipi solent æquationum transformationes, vel quia regulæ easdem plene solvendi ad certas adstrictæ sunt formas, vel quia tentamina, quibus ad radices detegendas sæpe opus est ob regularum defectum, ea re facilitantur. Quodsi enim proposita æquatio, cujus incognita est x , substituto $z + f = x$ transformetur in aliam, cujus incognita est z ; accidit interdum, ut ultimæ hujus æquationis radices, seu valores ipsius z , detegi queant. Hæc vero casu simul prioris æquationis, cujus incognita est x , radices inventæ sunt, quia jam in æquatione $x = z + f$ quanta z atque f sunt cognita. Potest ex his deduci generalis quædam methodus, æquationem, in qua incognita quantitas denotatur per x , in aliam, cujus incognita est z , ita transformandi, ut data z in posteriori æquatione simul detur x in priori. Sit enim v. g. ista proposita æquatio $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, atque fingatur quæcunque æquatio alia, in qua x atque z occurrunt cum quantitatibus vel cognitis vel pro re nata determinandis utcunque compositæ, qualis hæc est: $x^2 + xz = aa$. Coniungi hæc æquatio potest cum superiori per regulas §. 33. et 34. explicatas sic, ut x eliminetur. Quodsi jam ista transformatione producatæ æquatio hujus formæ $z^3 + pz^2 +$

$+ qz + r = 0$, vel cujuscunque alterius, data z in hac æquatione simul dabitur x per æquationem $x^3 + xz = aa$ assumtam, quia sub hac hypothese jam z erit quantitas cognita. Quamvis hæc transformandi methodus generalis sit, raro tamen ad ejusmodi transformationes æquationes complicatiores assumuntur. Praeter eam, quæ jam explicata est, transformationem præcipui usus sunt duo adhuc modi, quibus ponitur vel $xz = e$ five x

$= \frac{e}{z}$, vel $x = \frac{m}{n} z$. Proposita sit æquatio $x^3 - ax^2$

$+ bx + c = 0$, atque si primo ponatur $x = \frac{e}{z}$, pro-

ducitur hæc æquatio transformata $\frac{e^3}{z^3} - \frac{ae^2}{z^2} -$

$\frac{be}{z} + c = 0$, ex qua fit $e^3 - e^2 az - ebz^2 + cz^3 = 0$,

vel $z^3 - \frac{eb}{e} z^2 - \frac{e^2 a}{e} z + \frac{e^3}{e} = 0$, atque si e su-

matur $= c$, $z^3 - bz^2 - acz + cc = 0$. Hujus æquationis radices dicuntur esse *reciprocae* radicum æquationis datae, fitque minima radicum æquationis productæ ex maxima æquationis propositæ, hujus vero maxima ex illius minima, atque sic quoque reliquæ servato ordine magnitudinis.

§. II. O.

Deinde si proposita sit æquatio $x^3 - 12x^2 - 21x + 136 = 0$, atque nunc ponatur $x = \frac{m}{n} z$; erit æquatio

transformata $\frac{m^3}{n^3} z^3 - 12 \frac{m^2}{n^2} z^2 - 21 \frac{m}{n} z + 136 = 0$,

ex qua fit $z^3 - 12 \frac{n}{m} z^2 - 21 \frac{n^2}{m^2} z + 136 \frac{n^3}{m^3} = 0$.

In

In hac aequatione numeris pro n et m substitutis complura praestari possunt.

1) Potest effici, ut quicumque coefficientis fiat datae magnitudinis. Sic coefficientis secundi termini si debeat esse $= 2$, poni debet $m = 6$, et $n = 1$. Si terminus ultimus debeat esse $= 17$, poni debet $n = 1$ et $m = 2$. Idem praestari posse, si coefficientes aequationis propositae non numeros notaverint, sed alias quascunque quantitates, facile perspicitur.

2) Si in locum coefficientium numericorum iterum ponantur litterae a, b, c , atque aequatio proposita sit

$$x^3 - ax - bx + c = 0$$

cujus transformata est

$$z^3 - \frac{n}{m} az^2 - \frac{n^2}{m^2} bz - \frac{n^3}{m^3} c = 0;$$

patet, numerorum in novam aequationem introductorum

$\frac{n}{m} a, \frac{n^2}{m^2} b, \frac{n^3}{m^3} c$, aliquos vel omnes integros fieri posse, si numeri a, b, c , vel eorum aliqui sint fracti.

Sit enim $a = \frac{f}{g}, b = \frac{b}{k}, c = \frac{p}{q}$, atque po-

fitis $m = 1$, et $n = gkq$, erit $\frac{n}{m} a = \frac{gkcf}{g} = kqf$,

$\frac{n^2}{m^2} b = \frac{g^2 k^2 q^2 b}{k} = g^2 k q^2 b, \frac{n^3}{m^3} c = \frac{g^3 k^3 q^3 p}{q} = g^3 k^3 q^2 p.$

3) Simili modo, si numerorum a, b, c , aliqui irrationales fuerint formae $a = frg$ vel $b = \frac{b}{r^k}$, vel al-

terius cujuscunque, tolli quoque possunt factorum irrationalium aliqui, vel subinde omnes, valoribus litterarum m et n convenienter assumtis. Nihil enim impedit, quo minus m vel n irrationalis sumatur.

4) Atque

4) Atque sic generatim, si coefficientes a, b, c , vel omnes, vel eorum aliqui ex pluribus factoribus fuerint compositi; horum factorum quidam tolli poterunt ex quocunque coefficiente. Si v. g. fuerit $b = 4f$, positus $m = 2$ et $n = 1$, erit coefficientens, qui in aequatione transformata succedit in ipsius locum, $\frac{4f}{4} = f$. Cæterum multiplicem usum, quem istæ transformationes solvendis problematibus adferunt, suis locis explicabimus.

§. III.

Regulæ §. 84. pro invenienda radice aequationis, si quam habeat, rationali, generales sunt, atque facili negotio ad eum adplicantur casum, quo aequationis propositæ terminus primus habet coefficientem præter unitatem, atque aequatio reducta talem induit formam, ut terminus ultimus sit fractio non æquipollens numero integro. Sit proposita æquatio, quæ sequitur $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$, quæ ad istam reducitur $x^3 - \frac{29}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{60}{3} = 0$. Præ omnibus quærantur limites hujus æquationis, quæ invenientur -1 et $+10$. Deinde investigentur omnes termini ultimi $\frac{60}{3}$ factores, qui extra hos limites non cadunt, idque fiet quærendo divisores tam numeratoris, quam denominatoris ejusdem fractionis. Factores numeratoris sunt $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, atque denominatoris 1 et 3 . Quod si igitur aequatio proposita radicem quandam agnoscat rationalem; ea erit aliqua ex hisce $-1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{5}{3}, 6$. Tentata divisione per hæc aequationes simplices $x + 1 = 0, 3x + 1 = 0, x - 1 = 0$, etc.; proposita æquatio $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$ divisibilis esse deprehenditur per simplicem $3x - 5 = 0$, ideoque $\frac{5}{3}$ est radix æquationis propositæ realis.

Reliquæ ejusdem æquationis radices dantur per æquationem quadraticam ipsa divisione inventam $x^2 - 8x - 12 = 0$.

§. 112.

Investigatione limitum æquationis divisores quidem termini ultimi, quorum quilibet, an radix sit, tentari debet, ad pauciores jam reducuntur. Nihilo tamen minus plerumque restat eorum numerus tantus, ut multæ divisiones frustra tentandæ supersint. Tum vero divisores tentandi denuo reducentur ad pauciores artificio, quod sequentibus nititur ratiociniis. Quodsi in æquatione proposita ponatur $x = y + n$, in æquatione producta omnes radices prioris data quantitate imminutæ sunt vel auctæ, prout vel n fuerit vel positivus vel negativus, atque si t denotaverit unum vel alterum radicum æquationis datae realium limitem, erit æquationis transformatæ limes $t - n$. Data igitur æquatione $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$, cujus limites sunt 10 et -1 , posito $x = y + 1$, erunt limites æquationis productæ $10 - 1 = 9$, et $-1 - 1 = -2$. Ipsa vero æquatio transformata est

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 & = & 3y^3 + 9y^2 + 9y + 3 \\ -29x^2 & = & -29y^2 - 58y - 29 \\ + 4x & = & + 4y + 4 \\ + 60 & = & + 60 \end{array}$$

$$\text{unde } 0 = 3y^3 - 20y^2 - 45y + 38$$

$$\text{vel } 0 = y^3 - \frac{20}{3}y^2 - \frac{45}{3}y + \frac{38}{3}.$$

Jam divisores termini 38, qui cadunt intra limites -2 et $+9$, sunt $-1, 1, 2$, non alii. Atque proinde si æquatio habeat radicem rationalem, ea debet esse unus ex numeris $-\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$. Ponatur nunc $x = y - 1$, erunt transformatæ æquationis limites $10 + 1 = 11$, et $-1 + 1 = 0$, atque ipsa æquatio transformata

$$\begin{array}{rcl}
 3x^3 & = & 3y^3 - 9y^2 + 9y - 3 \\
 -29x^2 & = & -29y^2 + 58y - 29 \\
 + 4x & = & + 4y - 4 \\
 + 60 & = & + 60
 \end{array}$$

$$\text{proinde } 0 = 3y^3 - 38y^2 + 71y + 24$$

Jam factores numeri 24, qui cadunt intra limites 0 et 11 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, ideoque numeri, praeter quos radix rationalis nullus alius esse potest, $1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{4}{3}, 4, 6, 8, \frac{8}{3}$. Scriptis jam numeris ita repertis ordine, positisque in primam seriem iis, inter quos reperiri debet radix rationalis aequationis, ad quam $y = x + 1$; in secunda, qui reperti sunt ad ipsam aequationem propositam; in tertia vero illis, qui pertinent ad eam, ad quam $x = y - 1$ hoc modo

$$- \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 2$$

$$-1, -\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 5, \frac{5}{3}, 6,$$

$$1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, 6, 8, \frac{8}{3},$$

manifestum est, nullum numerorum secundae seriei esse posse radicem aequationis datae, ad quam haec series pertinet, nisi inter numeros primae seriei inveniatur aliquis, qui ex illo oritur, si ad eum addatur -1 , et inter numeros seriei tertiae alius, qui ex eodem illo fit, si ad eum addatur $+1$; quia, cum in serie secunda illa radix dicatur x , est radix aequationis, ad quam pertinet series prima $x - 1$, et radix aequationis, ad quam series tertia pertinet, $x + 1$. Examinatis jam serierum ita repertarum numeris apparet, nullos dictarum conditionum adesse praeter sequentes, quorum prima series desumpta est ex prima repertarum, secunda ex secunda, tertia ex tertia,

$$\begin{array}{ccc}
 1, & , & 2, & \frac{2}{3} \\
 2, & + & 3, & \frac{5}{3} \\
 3, & + & 4, & \frac{8}{3}
 \end{array}$$

Ideo radix aequationis propositae, si qua adsit, erit vel 2, vel 3, vel $\frac{5}{3}$. Dividenda igitur est aequatio $3x^3 -$

$29x^2 + 4x + 60 = 0$ per aequationes $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $3x - 5 = 0$; ficque divifores tentandi ad tres reducti funt, qui antea erant duodecim, magno utique laboris compendio.

§. 113.

Hae funt methodi inveniendi radicem aequationis propositae, si qua adsit, rationalem, vel quod eodem redit, factorem aequationis rationalem simplicem. Quodsi ejusmodi factor simplex rationalis non adsit, inveniri saepius potest aequatio quadratica, vel cubica, vel altior quaedam, aequationem propositam dividens absque residuo, ficque aequatio saepe in duas vel plures rationales resolvi potest. Hoc autem facto inveniuntur aequationes data inferiores, quarum radices saepe cognitis deteguntur methodis, quaeque simul sunt radices aequationes propositae. Ipsa vero divisio si institui potest, semper potest intelligi per aequationem fieri inferiorem ea, quae pro quoto prodit, vel cum ea aeque altam, nunquam per altiore. Aequatio rationalis, quae aequationem quinti ordinis dividat, ut quadratica altior sumatur, nunquam opus est, quia cubicus divisor pro quoto prodit. Generalis itaque, ad factores hosce obtinendos describenda erit methodus, cum ob hoc ipsum modo explicatum, tum ob alios quoque magni momenti usus.

Sit igitur proposita haec aequatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 18x^2 + 9x - 40 = 0$ in duas solvenda, quarum una quadratica sit, altera cubica. Fingo aequationes quas sitas esse has $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, et $x^2 + mx + n = 0$. Multiplico unam per alteram, ut prodeat aequatio,

$$\begin{aligned} x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + mrx + nr = 0, \\ + mx^4 + mpx^3 + mqx^2 + nqx \\ + nx^3 + npx^2 \end{aligned}$$

quam eandem esse pono cum data. Quod verum erit, si fuerit

$$p + m$$

$$p + m = -2$$

$$mr + nq = 9$$

$$p + mp + n = -10$$

$$nr = -40$$

$$r + mq + np = 18$$

Ex his jam æquationibus elici possunt valores coefficientium assumptorum m et n . Sed quia æquationes, quæ oriuntur, has combinando, prouti leges Sphi jubent, plerumque prodeunt admodum difficiles, valor litterarum n et r tentando quæri potest ex facto, quod multiplicati in se invicem producant. Scribatur jam y loco m , erit ex prima æquatione $p = -2 - y$, quo valore in reliquis substituto fit secunda

$$q - 2y - yy + n = -10,$$

$$\text{atque } q = -10 + 2y + yy - n.$$

Tertia æquatio eadem substitutione fit

$$r + qy - 2n - ny = 18;$$

atque si in eandem introducatur q ex æquatione secunda,

$$\text{prodit } r - 10y + 2y^2 + y^3 - 2ny - 2n = 18$$

$$\text{vel } y^3 + 2y^2 - 2ny - 2n = 0$$

$$- 10y + r$$

$$- 18$$

Quarta æquationum initio repertarum a substituto valore ipsius q mutatur in sequentem

$$ry - 10n + 2ny + nyy - nn = 9$$

$$\text{vel } ny^2 + 2ny - nn = 0$$

$$+ ry - 10n$$

$$= 9$$

Inventis duabus ejusmodi æquationibus in quovis casu quantitas cognita -40 æquationis $nr = -40$ solvenda est in suos factores, quorum alteruter ponatur $= n$ alter $= r$, atque his valoribus tanquam certi essent, in utraque æquatione substitutis, quærantur earum radices rationales, vel ex una reperta radix tentetur, an quoque sit radix alterius. Quæ utriusque æquationis radix est, ea est y vel m quæ sita, utpote quæ per utramque æquationum repertarum datur. Si talis radix non repariatur, aliter dividendum erit nr , idque toties, donec

exhauriantur omnes modi, quibus in duos factores rationales et integros solvi potest. Hoc facto si nulla radix utrique æquationi communis reperiatur; ex eo concludendum erit, solutionem æquationis propositæ in duas rationales esse impossibilem. In præsentī casu si u ponatur $= -5$ et $r = 8$, quia $-5 \times 8 = -40$ fit æquatio posterior

$$-5y^2 - 2y + 16 = 0$$

$$\text{vel } y^2 + \frac{2}{5}y - \frac{16}{5} = 0,$$

cujus radices sunt $\frac{8}{5}$ et -2 . Posterior etiam radix est prioris æquationis $y^3 + 2y^2$ etc. quia si loco y substituatur -2 , omnia evanescunt. Proinde æquatio quadratica quæ sita propositam dividens est $x^2 - 2x - 5 = 0$, qua divisione producitur quotus $x^3 - 5x + 8 = 0$. Poterat eadem y etiam facilius reperiri, si valor -5 litteræ u et valor 8 litteræ r assumtus in æquatione cubica substituatur. Hoc facto fit eadem æquatio $y^3 + 2y^2 = 0$, unde sequitur $y = -2$.

§. 114.

Quodsi ejusmodi factores æquationis rationales non reperiantur, ut radices æquationis reales irrationales si quæ adsint, in numeris decimalibus proxime detegantur, sic rationandum erit. Si fuerit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \dots + 5 = y$, valor functionis y determinatur quocunque valore loco x substituto, quia hoc facto y datur per æquationem simplicem. Posito jam $x = a$, si y prodierit affirmativa $= +\alpha$, negativa autem $-\beta$ posito $x = b$; certum est, quod detur aliquis valor ipsius x inter a et b intermedius, quo loco x substituto, fiat $y = 0$. Quodsi enim ponatur x ab a ad b continuo crescere vel decrescere, mutabitur quoque valor ipsius y , quantitas scilicet $+\alpha$ continuo crescendo vel decrescendo, ita vero ut tandem desinat in $-\beta$. Cum vero valor ille litteræ y ad quemlibet valorem x fit magnitudinis determinatæ, non poterit y ab $+\alpha$ ad $-\beta$ transire, nisi

nisi aliquando fiat $= 0$. Erit itaque semper aliquis valor ipsius x inter a et b intermedius, ad quem fit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} - - - + s = 0$, qui proinde est radix hujus æquationis realis.

Ex his denuo patet, quod §. 97. jam fuit demonstratum, unam ad minimum æquationis radicem realem esse, si m exponens ordinis æquationis numerus impar fuerit. Crescente enim x , eam tandem majorem fieri necesse est, quam p , et x^2 majorem, quam q , et x^3 majorem, quam r , et ita porro, ideoque x^m tandem superare omnes æquationis terminos reliquos, primo quidem seorsim, deinde etiam conjunctim, atque hoc facto y affirmativa erit, licet omnes hi termini negativi fuerint. Contra si x negativa ponatur, etiam x^m negativa erit, quia m ponitur impar esse; atque ad hanc partem crescente x , eodem modo x^m æquationis terminos reliquos superabit, atque y negativam reddet, etiamsi omnes isti termini fuerint positivi. Inter duos autem illos litterae x valores, quorum unus y affirmativam exhibet, alter negativam, æquationis radicem realem minime unam esse, necesse est.

Præterea vero ex his concluditur, duas ad minimum æquationis radices esse reales, si m , exponens summae dignitatis incognitæ x in æquatione proposita sit numerus par, atque terminus æquationis ultimus negativus. Patet enim, y positivam fieri, quando x positiva ingens est. Deinde si x sumatur negativa, x^m pariter positiva est, at y quoque positiva fit ad ingentem x negativam. Sed eadem negativa fit ad $x = 0$, quia tum est $x = s$, s vero ponitur negativa. Bis igitur in tali æquatione y e positivo negativum et vicissim e negativo positivum fit, ergo duæ ad minimum radices æquationis sunt reales. Si igitur ultimus terminus sit positivus, fieri potest, ut æquatio nullas habeat radices reales. Sic æquationis $x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0$ ra-

dices reales nullae sunt, quia y semper positiva prodit, quicumque valor realis ipsi x tribuatur.

§. 115.

Quodsi jam data sit æquatio $x^3 - 10x^2 - 130x + 850 = 0$, cujus radices reales in numeris decimalibus vero proximæ sunt inveniendæ, sic procedendum erit. Quærantur limites æquationis, quæ erunt 15 et -11 . Jam incipiendo a numero -11 substituuntur in locum x numeri ab hoc termino ordine, conveniente inter duos proximos intervallo relicto, et colligantur valores ipsius y loco 0 positi hoc modo:

Si fuerit $x = -11$ erit $y = -261$

$-10 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 150$

$-5 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 1125$

$0 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 850$

$+5 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 75$

$+10 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 450$

$+15 \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 25$

Si itaque duorum y hoc modo repertorum contraria fuerint signa, inter x illis respondentes radix cadet realis, cujus magnitudo proxime colligitur ex numeris per quos y exprimitur, hunc in modum. Quia in æquatione ad $x = -11$ reperta est $y = -261$, et ad $x = -10$ inventa $y = +150$, inter -10 et -11 una minimum cadit æquationis radix. Eodem rotiocinio et aliarum radicum limites deteguntur. Cadit nempe harum una intra 5 et 10, altera intra 10 et 15. Quia jam plures tribus radicibus in æquatione proposita inesse non possunt, intra limites -11 et -10 una tantum radix erit, intra 5 et 10 altera, tertia intra 10 et 15. Quia $x = -10$ notabiliter minorem efficit y , quam $x = -11$, exinde colligi debet, hanc radicem numero -10 propiorem esse, quam numero -11 , eamque ideo esse circiter $-10,3$, vel $-10,4$.

Sic quoque radix, quæ intra 5 et 10 cadit, proxime determinabitur concludendo, ut intervallum inter duos y his

his numeris respondentes ad y priorem, sic circiter est intervallum inter duos illos ipsius x valores, ad excessum radicis supra priorem ipsius x valorem; id est, ut $75 + 450$ ad 75 , ita ς ad excessum radicis supra ς quæsitum, qui ideo reperitur $0,7$, unde radix hæc erit circiter $5,7$. Simili ratione radix tertia propius deter-

minatur, reperto ejus supra 10 excessu $= \frac{450 \times \varsigma}{475} =$

$4,7$, unde hæc radix numero $14,7$ proxime æqualis colligitur.

Possunt numeri ita reperti si non longissime tamen longe satis a veris radicum valoribus aberrare. Proinde corrigendi sunt, quod fiet eodem modo, quo antea sunt inventi. Sit corrigendus numerus repertorum maximus $14,7$, atque radici æquationis maximæ propinquior reddendus. Pono in æquatione $x = 14,7$, ac reperio, ei valori respondere $y = -45,377$. Valori vero $x = 15$ respondet $y = +25$. Proinde radix vera paullo major est reperta, utpote quæ cadit intra $14,7$ et 15 . Ex valoribus vero his litteræ y per methodum approximando descriptam prodit excessus radicis supra $14,7$ iste $0,19$, quo addito fit numerus exactior $14,89$. Substituto hoc numero loco x in æquatione invenitur $y = -1,528$, unde patet, numerum inventum nunc quoque radice minorem esse, sed differentia modica, quæ quidem eadem methodo imminui potest. Reperitur enim per eandem excessus radicis supra numerum $14,89$ ultimo repertum $= 0,00633$, quo addito numerus iste ad verum radicis valorem propinquius accedens erit $14,89633$, qui eadem via porro corrigi potest.

Caeterum non nimis magna assumenda sunt intervalla valorum ipsius x , partim quia alias prima opera sæpe radices omnes non deteguntur, partim quia sic angustiores inveniuntur radicum limites, quibus statim ab initio exactiores determinantur. Sic si quoque in

casu præfenti posuiffemus $x = 6$, inventus fuiffet valor $y = -74$, ex quo flatim patet, radicem positivarum minorem parum differre a 5, 5, atque per laxiores limites eandem nimis magnam inventam effe nimirum 5, 7.

§. 116.

Si omnes æquationis termini præter primum et ultimum deficiunt, æquatio non amplius est affecta, fed pura, ejusque radices reales omnes deteguntur fecundum præcepta in Sect. IV. exposita. Propofita enim ejusmodi æquatione $ax^m - b = 0$, ex eadem concluditur

$x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$, ubi notum est, quod valor $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ semper realis, isque unicus fit, si m fuerit numerus impar, five $\frac{b}{a}$ fit negativa, five positiva quantitas. Est vero x

$= \pm \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$, si m fuerit par, atque tum uterque va-

lor impossibilis esse potest, si nimirum $\frac{b}{a}$ fit quantitas negativa. Cæterum hic quoque verum est, quod

universaliter demonstravimus §. 85. Omnis æquatio formæ $ax^m - b = 0$ tot habet radices, quot unitates continet numerus m , si nimirum radices impossibiles non excludantur. Aequatio formæ $ax^{m+1} - b = 0$ semper unam habet radicem realem et $2m$ radices impossibiles, omnis vero æquatio $ax^{2m} - b = 0$ vel duas habet radi-

ces reales atque $2m-2$ impossibiles, si nimirum $\frac{b}{a}$ fit

positiva quantitas, vel omnes impossibiles, si $\frac{b}{a}$ fuerit

negativa quantitas. Sic æquatio cubica $ax^3 - b = 0$ unam habet radicem realem et duas impossibiles, quæ omnia ex §. 85. sunt manifesta.

Caete-

Cæterum ambæ radices æquationis $ax^3 - b = 0$ impossibiles sic possunt inveniri. Radicem hujus æquationis

realem exhibet æquatio simplex $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$.

Proinde dividatur æquatio $x^3 - \frac{b}{a} = 0$ per hanc

simplicem, et quotus fiet æquatio duas radices impossibiles reliquas exhibens. In compendium calculi ponatur

$\frac{b}{a} = c^3$, atque æquatio dividenda erit $x^3 - c^3 = 0$,

simplex vero divisor $x - c = 0$. Instituta jam ipsa divisione pro quo prodit $xx + cx + cc = 0$, cujus

æquationis radices sunt $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, vel re-

stituto valore $c^3 = \frac{b}{a}$ et $c = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$\pm \sqrt[3]{-\frac{3}{4}\frac{bb}{aa}}$, quarum utraque impossibilis est.

Simili modo operandum foret, si desiderentur radices impossibiles æquationis cujusdam altioris sub hac forma $ax^m - b = 0$ contentae.

§. 117.

Prouti ex æquationibus formae $ax^m - b = 0$ una vel utraque radix possibilis habetur methodo illi persimili,

qua simplices æquationes solvuntur, ita ex æquationibus omnibus sub hac forma generali $x^{2m} - px^m + q = 0$

contentis radices reales inveniuntur secundum methodum, qua æquationes quadraticae in antecedentibus solutae sunt.

Posito enim $x^m = z$, habetur $z^2 - pz + q = 0$, atque proinde $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$.

Restituto jam valore x^m loco z habetur $x^m = \frac{1}{2}p \pm \sqrt[2m]{q + \frac{1}{4}pp}$

et proinde $x = \sqrt[2m]{\frac{1}{2}p \pm (q + \frac{1}{4}pp)}$, qui valor vel positivus sumendis erit, vel negativus, vel affirmativus et negativus simul, prout m vel nume-

rum imparem denotat, vel parem. Plures quam quatuor radices reales aequatio sub hac forma comprehensa habere non potest, quod ex principiis §. 94. / *q.* demonstrari potest, atque plures haec quoque formula non suppeditare potest. Reliquae impossibiles, si desiderentur, possunt per divisionem inveniri eodem modo, quo §. *præc.* radices impossibiles aequationis $ax^m - b = 0$ fuerunt inventæ.



SECTIO IX.

DE

FUNCTIONVM, QVAE VNAM VEL
PLURES INVOLVUNT VARIABLES, PAL-
MARIIS QVIBVSDAM PRO-
PRIETATIBVS.

§. II3.

Functionis y quantitatis variabilis x valor determinatur, si ipsi variabili x determinatus tribuitur valor. Dicitur vero y *functio uniformis* ipsius x , si unicum valorem determinatum obtinet, quando variabilis x determinatum habet valorem. Contra si pro unoquoque valore determinato in locum variabilis x substituto functio y plures valores determinatos assumit; eadem dicitur *functio* ipsius x *multiformis*. Praeterea functio ipsius y speciatim dicitur *biformis*, *triformis*, *quadriformis*, *etc.*, si pro quovis valore variabilis x determinato duos, vel tres, vel quatuor, *etc.* valores determinatos exhibet. Sic omnes radices quadraticae, quarum expressioni ingreditur variabilis x , ut $\sqrt{ax + xx}$ sunt functiones ipsius x biformes. Quicunque enim valor
pro

pro x fiat ur expressio $\sqrt{(ax + xx)}$ duplicem habet valorem, alterum positivum, alterum negativum. Generationem vero erit y functio biformis ipsius x , si determinetur per aequationem quadraticam $y^2 + Py + Q = 0$ siquidem P et Q fuerint functiones uniformes ipsius x . Erit enim $y = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$; ex quo patet, cuique valori determinato ipsius x duplicem valorem determinatum ipsius y respondere, quorum uterque aut realis aut imaginarius erit. Functiones triformes ex resolutione aequationum cubicarum originem trahunt. Si enim fuerint P, Q, R , functiones ipsius x uniformes, sitque $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$, erit y functio triformis ipsius x , quia pro quolibet valore determinato ipsius x , triplicem valorem obtinet, quorum vel singuli reales erunt, vel unus realis et duo imaginarii. Generaliter erit y functio multiformis ipsius x , quae pro quovis valore ipsius x tot exhibet valores, quot numerus n continet unitates; si y definatur per hanc aequationem generalem $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} + Sy^{n-4} + \text{etc.} = 0$. Ubi quidem notandum est, n esse oportere numerum integrum, atque perpetuo, ut dijudicari possit, quam multiformis sit functio y ipsius x , aequatio, per quam y definitur, reduci debere ad rationalitatem; quo facto exponens maximae potestatis ipsius y indicabit quæsitum valorum numerum, cuique ipsius x valori respondentium. Deinde quoque tenendum est, litteras P, Q, R, S , etc. denotare debere functiones uniformes ipsius x , si enim aliqua earum jam esset functio multiformis, tum functio y multo plures præbitura esset valores unicuique valori ipsius x respondentes, quam quidem numerus dimensionum ipsius y indicaret. Semper autem si qui valores ipsius y fuerint imaginarii, eorum numerus erit par; unde intelligitur, si fuerit n numerus impar, perpetuo unum ad minimum valorem ipsius y fore realem: contra autem fieri posse, si numerus n sit par, ut nullus prorsus valor ipsius y sit realis.

§. 119.

Omnis functio rationalis integra ipsius x formae $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Px + Q$ resolvipoteft in tot factores simplices formae $ax + b$, $cx + e$ etc. quot unitates continet numerus m . Quia enim hæc functio est quantitas variabilis; poni etiam poteft $Ax^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Px + Q = 0$. Tum vero valores ipsius x respondentes erunt radices hujus æ-

quationis, quæ si fuerint $-\frac{b}{a}$, $-\frac{e}{c}$ $-\frac{g}{f}$

earum totidem erunt, quot sunt unitates in numero m , et quælibet earundem suppeditat divisorem formae $ax + b$, $cx + e$ etc. ita ut fit $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Px + Q = (ax + b)(cx + e) \dots (fx + g)$. Factores itaque simplices functionem rationalem integram componentes erunt vel reales, vel imaginarii; atque si functio habeat factores imaginarios, eorum numerus semper erit par. Praeterea vero binorum factorum imaginariorum productum semper est reale, atque quævis functio rationalis integra ordinis $2n$ resolvi poteft in n factores duplices reales formae $x^2 + px + q$. Functio denique variabilis x integra rationalis $2n + 1$ dimensionum ad minimum habet unicum factorem simplicem realem (§. 83. *sqq*).

§. 120.

Cum omnis quantitas variabilis z ab alia variabili x ita pendens, ut mutationem patiatur, simulac z mutatur, vocetur functio variabilis x ; poterit z dici functio duarum variabilium x et y , si ejus magnitudo simul pendeat a valore ipsius x et y simul, functio trium variabilium x , y , u , si ejus magnitudo ipsius a tribus hisce variabilibus pendeat, ficque porro. Hinc omnis expressio analytica definiens valorem ipsius z per variables x , y , u , s , etc, et constantes dicitur functio harum variabilium. Ita erit $x^3 + xuy + auu$ functio trium variabilium

bilium x , y , u , atque ejusmodi functio, si una determinetur variabilis, puta u , hoc est, si ejus loco constans numerus substituatur, manebit adhuc quantitas variabilis, scilicet functio ipsarum x et y , atque si praeter u quoque y determinetur, tum erit adhuc functio ipsius x . Ideo hujusmodi functio plurium variabilium ante non habet valorem determinatum, quam singulae quantitates variabiles sunt determinatae. Dividi possunt hae functiones plurium variabilium pariter ac unius variabilis in algebraicas et transcendentes, quarum illae sunt, in quibus ratio compositionis in solis Algebrae operationibus est posita; hae vero in quarum formationem operationes transcendentes ingrediuntur. Deinde quoque dividi possunt in rationales et irracionales, integras et fractas. Functio scilicet rationalis omnino libera est ab omni irrationalitate quantitates variabiles, quarum functio dicitur, afficiente. Integra est haec in functio, si variabiles neque habent exponentes negativos, neque expressiones continent fractiones, in quarum denominatores variabiles ingrediantur. Sic functionum integrarum duarum variabilium y et z haec erit forma generalis $\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \epsilon yz + \zeta z^2 + \eta y^3 + \theta y^2 z + \iota y z^2 + \kappa z^3 + \text{etc.}$ Quodsi ergo P et Q denotent hujusmodi fun-

ctiones integras plurium variabilium erit $\frac{P}{Q}$ forma

generalis functionum fractarum. Functio denique irrationalis est vel explicita vel implicita; illa per signa radicalia jam penitus est evoluta, haec autem per aequationem irresolubilem exhibetur. Sic V erit functio implicita irrationalis ipsarum y et z , si fuerit $V^5 = (ayz + z^3)V^2 + (y^4 + z^4)V + y^5 + 2ayx^3 + z^5$. Multiformitas deinde in his functionibus aeque notari debet, atque in iis, qui unicam involvunt variabilem. Sic functiones rationales erunt uniformes, quia singulis quantitatibus variabilibus determinatis, unicum valorem determinatum

tum exhibent. Denotent P, Q, R, S , etc, functiones rationales seu uniformes variabilium x, y, z , eritque V functio biformis earundem variabilium, si fuerit $V^2 - PV + Q = 0$. Quicunque enim valores determinati quantitatibus x, y et z tribuantur, functio V non unum sed duplicem perpetuo habebit valorem determinatum. Simili modo erit V functio triformis, si fuerit $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$: atque functio quadriformis, si fuerit $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$, atque sic ratio reliquarum functionum multiformium erit comparata.

§. 121.

Praeter has divisiones functionum duarum et plurium variabilium eadem porro dispescuntur in homogeneas et heterogeneas. Functio homogenea est, in qua ubique deprehenditur idem variabilium numerus dimensionum: functio autem heterogenea est, in qua diversi occurrunt dimensionum numeri. Censetur vero unaquaeque variabilis unam dimensionem constituisse; quadratum uniuscujusque atque productum ex duabus duas, productum ex tribus variabilibus siue iidem sint, siue diversi, tres, et ita porro. Quantitates autem constantes in determinando numero dimensionum non veniunt in censum. Ita in his formulis $\alpha y, \beta z$, unica dimensio inesse dicitur; in his vero $\alpha y^2, \beta yz, \gamma z^2$, duae sunt dimensiones, in his $\alpha y^3, \beta y^2 z, \gamma y z^2, \delta z^3$ sunt tres, in sequentibus $\alpha y^4, \beta y^3, \gamma y^2 z^2, \delta y z^3, \epsilon z^4$ sunt quatuor, et ita porro. Functio igitur integra erit homogenea, in cuius singulis terminis idem existit dimensionum numerus. Subdividentur itaque ejusmodi functiones secundum numerum dimensionum, quem variables in ipsis ubique constituunt. Sic si haec ad functiones duarum variabilium applicemus, erit $\alpha y + \beta z$ forma generalis functionum integrarum unius dimensionis: haec vero expressio $\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$ erit forma generalis functionum duarum dimensionum, atque tum
forma

forma generalis trium dimensionum erit $\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma yz^2 + \delta z^3$, quatuor vero dimensionum hæc, $\alpha y^4 + \beta y^3z + \gamma y^2z^2 + \delta yz^3 + \epsilon z^4$, et ita porro. Ad analogiam igitur erit quantitas constans sola α functio nullius dimensionis. Praeterea functio fracta erit homogenea, si ejus numerator ac denominator fuerint functiones

homogeneae. Ita haec fractio $\frac{a yy + b zz}{\alpha y + \beta z}$ erit functio

homogenea ipsarum y et z , numerus dimensionum autem habetur, si a numero dimensionum numeratoris subtrahatur numerus dimensionum denominatoris: at-

que ob hanc rationem fractio $\frac{a yy + b zz}{\alpha y + \beta z}$ erit functio

unius dimensionis. Haec vero fractio $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ erit

functio homogenea trium dimensionum. Quando igitur in numeratore ac denominatore idem dimensionum numerus inest, tum fractio erit functio nullius dimen-

sionis, ut eae quae sequuntur, $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{azz}{yy}$,

$\frac{\beta y^3}{z^3}$. Quodsi igitur in denominatore plures sint di-

ensiones quam in numeratore, numerus dimensionum

fractionis erit negativus. Sic $\frac{y}{zz}$ erit functio -1 di-

ensionis, $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ erit functio -3 dimensionum,

$\frac{1}{y^5 + a y z^4}$ erit functio -5 dimensionum, quia in

numeratore nulla est dimensio. Ceterum si plures functiones homogeneae, in quibus singulis idemprehenditur dimensionum numerus, siue addantur sibi, siue a se invicem subtrahantur, quod prodit, erit functio homogenea ejusdem numeri dimensionum. Ita haec

expressio $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 - \delta z^4}{yyz + yzz}$ erit functio
 unius dimensionis: haec autem $\alpha + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma zz}{yy}$
 $+ \frac{yy + zz}{yy - zz}$, erit functio nullius dimensionis.

§. 122.

Ea quae de functionum homogenearum ab heterogeneis differentia sunt exposita simul ad functiones irrationales possunt extendi. Si enim fuerit P functio quaecunque homogenea n dimensionum, erit $\sqrt[n]{P}$ functio $\frac{1}{n}n$ dimensionum, $\sqrt[n]{P}$ erit functio $\frac{1}{n}n$ dimensionum, et generaliter $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ erit functio $\frac{\mu}{\nu}n$ dimensionum. Sic

$\sqrt[3]{yy + zz}$ erit functio unius dimensionis, $\sqrt[3]{(y^9 + z^9)}$ erit functio trium dimensionum: $(yz + zz)^{\frac{3}{4}}$ erit functio $\frac{3}{2}$ dimensionum, atque $\frac{yy + zz}{\sqrt[3]{y^4 + z^4}}$ erit functio

nullius dimensionis. Erit ideo haec expressio $\frac{1}{y} +$

$$\frac{y\sqrt[3]{yy + zz}}{z^3} + \frac{y}{\sqrt[3]{y^6 - z^6}} + \frac{y\sqrt[3]{z}}{zz\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^5 + z^5}}$$

functio homogenea — 1 dimensionis. Ex his simul colligi potest, utrum functio irrationalis implicita sit homogenea, nec ne. Sit nimirum V ejusmodi functio implicita, ut sit $V^3 + PV^2 + QV + R = 0$, existentibus P , Q et R functionibus variabilium y et z . Primum enim patet, V functionem homogeneam esse non posse, nisi P , Q et R sint functiones homogeneae. Praeterea vero si ponamus V esse functionem n dimensionum, erit V^2 functio $2n$ et V^3 functio $3n$ dimensionum.

num. Cum igitur ubique idem debeat esse numerus dimensionum, oportet, ut P sit functio n dimensionum, Q functio $2n$ dimensionum, et R functio $3n$ dimensionum. Si ergo vicissim litterae P , Q et R expriment functiones homogeneas n , $2n$, $3n$ dimensionum, exinde concludetur fore V functionem n dimensionum variabilium y et z . Quemadmodum si functio unius variabilis z nihilo æqualis ponitur, quantitas variabilis z valorem obtinet determinatum vel simplicem vel multiplicem, ita si functio duarum variabilium y et z nihilo æqualis ponitur, tum altera variabilis per alteram definitur, ejusque functio evadit, cum ante a se mutuo non penderent. Simili modo si functio trium variabilium x , y , z , nihilo æqualis statuatur, tum una variabilis per duas reliquas definitur, earumque functio existit. Idem evenit, si functio non nihilo sed quantitati constanti vel etiam alii functioni earundem variabilium æqualis ponatur. Ex omni enim æquatione, quotcunque variables involvat, semper una variabilis per reliquas definitur earumque fit functio. Duæ autem æquationes diversæ inter easdem variables ortæ binas per reliquas definient, atque ita porro.

§. 123.

Quodsi V fuerit functio homogenea n dimensionum variabilium y et z , atque in eadem ubique ponatur $y = uz$; functio V abibit in productum ex potestate z^n in functionem quandam variabilis u . Hac enim substitutione facta in singulos terminos tantæ inducuntur potestates ipsius z , quantæ ipsius y ante inerant. Cum igitur in singulis terminis dimensiones variabilium y et z conjunctim efficiunt numerum n , jam sola variabilis z ubique habebit n dimensiones, atque quilibet terminus per z^n erit multiplicatus. Per hanc itaque potestatem functio V fiet divisibilis et quotus erit functio variabilem u solum involvens. Hinc patet, functionem homogeneam V variabilium y et z nullius dimensionis posito $y = uz$ transmutari in functionem unius variabilis u . Facta enim hac

substitutione invenitur functio ipsius u per z^0 id est per 1 multiplicata, atque proinde variabilis z prorsus ex computo egreditur. Ita si fuerit $V = \frac{y+z}{y-z}$, posito

$y = uz$, fiet $V = \frac{u+1}{u-1}$, atque si fuerit $V =$

$\frac{y - \sqrt{yy - zz}}{z}$ posito $y = uz$, habetur $V = u - \sqrt{u^2 - 1}$.

§. 124.

Functio itaque integra homogenea duarum variabilium y et z dimensionum n resolvi potest in n factores simplices formae $fy + gz$. Ejusmodi enim functio posito $y = uz$ transit in productum ex z^n in functionem ipsius u integram n dimensionum, quæ itaque functio in n factores simplices formæ $fu + g$ resolvitur (§. 119.). Item alter factor z^n resolvitur in n factores, quorum quilibet est z . Singulis itaque factoribus $fu + g$ per z multiplicatis erit uniuscujusque forma $fuz + gz = fy + gz$, quia $uz = y$. Isti vero factores reales esse possint vel imaginarii. Ex his proinde sequitur, functionem duarum dimensionum $ay^2 + byz + cz^2$ duos habere factores simplices formæ $fy + gz$. Functio $ay^3 + byyz + cyzz + cz^3$ tres habet factores simplices formæ $fy + gz$; atque sic natura reliquarum functionum homogenearum integrarum erit comparata. Ipsi vero hi factores invenientur, si functio proposita ponatur $= 0$, atque tum omnes hujus æquationis quærantur radices, eodem modo, uti §. 104. Ceterum hæc proprietas functionum homogenearum duarum variabilium ad functiones homogeneas trium vel plurium variabilium non extenditur.

§. 125.

r.229. Cum quantitas variabilis sit magnitudo indeterminata omnes quantitates determinatas in se complectens.

geo-

geometrice ejusmodi quantitas repræsentari poterit per lineam rectam indefinitam BC. Quia enim in linea indefinita magnitudinem quancunque determinatam abscindere licet, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur in linea indefinita BC punctum assumi debet A, unde magnitudines determinatæ abscindendæ initium sumere censeantur; sicque portio determinata AP repræsentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehensum. Sit igitur x quantitas variabilis, quæ per rectam indefinitam BC repræsentatur, atque manifestum est, omnes valores determinatos ipsius x , qui quidem sint reales per portiones AP in recta BC abscindendas repræsentari posse. Scilicet si punctum P in ipso puncto A capiatur, intervallum AP evanescens exhibebit valorum $x = 0$. Quo magis autem punctum P a puncto A removetur, eo major valor determinatus ipsius x intervallo AP repræsentabitur. Vocantur hæc intervalla *Abscissæ* et punctum A *Initium abscissarum*. Abscissæ igitur exhibent valores determinatos variabilis x . Quia vero recta BC utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipsius x valores abscindi poterunt. Quod si autem valores affirmativos ipsius x ab A dextrorsum progrediendo abscindamus, intervalla AP sinistrorsum abscissa valores ipsius x negativos exhibebunt, et vice versa.

§. 126.

Cum functio quæcunque variabilis x pariter sit quantitas variabilis, quæramus modum, ejusmodi quoque functionem ipsius x geometrice exprimendi. Sit y functio quæcunque ipsius x , quæ igitur valorem determinatum induat, si pro x valor determinatus substituat. Sumatur recta quæcunque indefinita BC ad valores ipsius x denotandos, et cuilibet valori ipsius x determinato AP ad punctum extremum P adplicetur recta PM, valori ipsius y respondenti æqualis, sub angulo quo-

quocunque, qui plerumque sumitur rectus, nisi rationes aliud suadentes adsint. Nimirum si valor ipsius y prodeat positivus, is supra rectam BC constituatur, sin autem valor ipsius y negativus oriatur, is infra rectam BC sub eodem angulo adplicetur. Sumtis enim valoribus ipsius y affirmativis supra rectam BC, evanescentes in ipsam BC, et negativi infra eandem cadent. Figura ejusmodi functionem ipsius x pro y exhibet, quæ posito $x = 0$ induat valorem affirmativum $= AD$, sin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$, si $x = AF$, fit $y = 0$. Si AP sumatur major quam AF, adplicata PM quæ functionem y repræsentat, fit negativa. Simili modo valores ipsius y , qui valoribus negativis ipsius x respondent, repræsentantur per adplicatas supra BC positas, si sint affirmativi, contra autem infra rectam BC constitui debent, ut pm , si sint negativi. Sin autem pro quopiam ipsius x valore, ut $-x = AE$, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo adplicatae evanescit. Quodsi igitur a puncta A fluere ponatur punctum P versus B et punctum p versus C, ita ut variabilis x a valore Ap vel $AP = \pm 0$ crescere incipiat continuo tam positive quam negative, atque tum recta ad punctum P vel p sub angulo constante adplicata simul, in eodem quidem plano, quod hic sit planum tabulae, moveri atque continuo crescere vel decrescere intelligatur, prout natura functionis y id poscit; punctum adplicatae extremum fluendo describet lineam mDM vel rectam vel curvam, quæ tota in idem planum cadit, et per functionem y variabilis x determinatur. Proinde quælibet ipsius x functio hoc modo ad Geometriam translata certam determinabit lineam sive rectam, sive curvam, cujus natura a functionis y natura pendebit. Recta indefinita BC vocatur *Axis* hujus lineæ, rectæ vero PM, pm , quæ ob angulum quem cum axe efficiunt constantem omnes inter se parallelæ sunt, *ordinatim Adplicatae* sive *ordinatae* dicuntur, et quidem *normales* seu *orthogonales*, si angulus, quem cum axe comprehendunt fit

fit rectus, *obliquangulae* vero, si angulus iste obliquus sumatur.

§. 127.

Ad lineam vero, quam functio quaecunque variabilis x ita repræsentare potest, perfecte cognoscendam, naturâ functionis, an sit uniformis, an multiformis probe est adtendenda. Ponamus primo y esse functionem uniformem ipsius x , seu esse $y = P$, denotante P functionem quamcunque uniformem ipsius x , et quia ipsi x valorem quemvis determinatum tribuendo, adplicata y unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique abscissæ una respondebit adplicata, et hanc ob rem linea ita erit comparata, ut, si in quovis axis BC puncto P ducatur ad ipsam adplicata PM , ea semper lineam hanc secet, idque in unico puncto M . Singulis ergo axis punctis singula respondebunt hujus lineæ puncta, et cum axis utrinque in infinitum excurrat, etiam linea per functionem y repræsentata utrinque in infinitum excurrent. Potest igitur hæc linea recta esse, quia recta aliam rectam in unico puncto secare potest. Sit y functio biformis ipsius x , seu denotantibus litteris P et Q functiones ipsius x uniformes sit $yy + Py + Q = 0$, ideoque $y = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}$, et patet, unicuique abscissæ x respondere duplicem adplicatam y , utraque existente vel reali, vel imaginaria: prius si $\frac{1}{4}PP > Q$, posterius si $\frac{1}{4}PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipsius y erit realis, abscissæ AP duplex conveniet adplicata PM , PM , seu recta ad axem in P adplicata, lineam per y repræsentatam in duobus punctis M et M secabit, quæ igitur linea non erit recta, quia recta aliam rectam non nisi in unico puncto secare potest. Ubi autem fit $\frac{1}{4}PP < Q$, ibi abscissæ nulla conveniet adplicata, seu recta ad axem in puncto P adplicata eidem lineæ his in locis nusquam occurret. Hujusmodi igitur linea eam habet proprietatem, ut si ad singula abscissarum puncta extrema P adplicatae rectae MM producantur

eadem huic lineae vel nusquam vel in duobus punctis occurrant, nisi forte evadat $y = -\frac{1}{2}P \pm 0$, quando $\frac{1}{4}PP = Q$, tum enim duo intersectionis puncta in unum coalescunt. Ex his jam generaliter concludi potest indoles linearum, quorum natura exprimitur ex functione multiformi quacunque. Si scilicet linea determinetur per aequationem, in qua n sit exponens maximae potestatis ipsius y ; tum numerus valorum realium ipsius y erit vel n , vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, etc, in totidem ergo punctis quaelibet explicata eandem lineam secabit.

§. 128.

Prouti vero quaelibet aequatio inter variables x et y , quarum illa abscissam, et haec adplicatam denotat, repraesentare potest lineam quandam ad axem BC in eaque initium abscissarum A pro lubitu assumtum rectam; ita vicissim, si jam in plano descripta fuerit linea quaedam sive recta, sive curva, ejus natura exprimi potest per aequationem inter duas coordinatas. Ducta enim recta quacunque indefinita ut BC in plano curvae positione arbitraria eaque pro axe assumpta, si punctum A in eodem iterum pro lubitu sumatur pro abscissarum initio, ex singulis punctis lineae datae, sive curva sive recta sit, ad illum axem duci possunt rectae vel normaliter vel oblique sub angulo constante adplicatae, sicque obtinentur intervalla AP, quae valores variabilis x exhibent, et longitudes adplicatarum PM, quae valores functionis y repraesentant. Si jam proprietates quaedam lineae relative ad illum axem et initium abscissarum palmariae vel ex lege descriptionis, vel alias sint cognitae, ex iisdem concludi potest aequatio relationes variabilium x et y in quocunque curvae puncto exprimens. Quod ut exemplis quibusdam iisque facillimis illustretur, quaerantur ejusmodi aequationes pro linea recta et pro circulo, quippe quarum linearum proprietates in Geometria Elementari ex instituto jam sunt expositae.

§. 129.

Sit primo linea recta LM data ejusque natura per F.231. functionem y variabilis x exprimenda. Ac primo quidem sumatur alia recta BC in eodem cum LM plano existens positione quidem arbitraria pro axe, in eaque punctum A quodcunque pro abscissarum initio. Quia positio axis BC arbitraria est, eadem cum recta LM aut parallela, aut non parallela erit. Ponatur posterius, atque tum recta LM producta cum axe concurret in puncto quodam E. Ex recta LM puncto quocunque M ad axem ducatur MP perpendicularis, erit AP abscissa $= x$ et PM adplicata orthogonalis $= y$. Deinde quoque ex A erigatur AD ad axem perpendicularis et rectæ LM occurrens in puncto D, quæ igitur adplicatæ PM erit parallela. Vocetur EA $= a$, et AD $= b$, quia hæ rectæ sunt constantes: atque ex similitudine triangulorum EAD et EPM concluditur proportio EA (a): AD (b) = EP ($a+x$): PM (y), et inde deducitur æquatio $ay = b(a+x)$

$$= ba + bx, \text{ five } y = \frac{b}{a}x + b, \text{ quæ naturam lineæ}$$

rectæ LM quousque continuatæ ad axem BC et abscissarum initium A relatæ perfecte exprimit. Quamdiu enim abscissæ AP $= x$ capiantur positivæ, etiam applicata y

$$\text{est positiva} = \frac{b}{a}x + b, \text{ et crescit, quando applicata}$$

x crescere ponitur. Decrescente vero ipsa x etiam y decrescit, donec puncto P cum A coincidente, ubi est

$$AP = 0, \text{ fiat } \frac{b}{a}x = 0, \text{ hincque } y = b = AD. \text{ Quod-}$$

si jam capiatur applicata x negativa, ut Ap $= -x$, erit

$$pm = y = -\frac{b}{a}x + b, \text{ quæ æquatio indicat, ap-}$$

$$\text{plicatam } y \text{ manere positivam, quamdiu } \frac{b}{a}x < b.$$

Idem etiam figura indicat. Ducatur enim per punctum m recta mF axi parallela secans ipsam AD in F , erit figura pF parallelogramma, ideoque $pm = AF$ et $mF = Ap = x$ absolutæ. Praeterea $EAD \sim mFD$, ideoque

$$EA (a) : AD (b) = mF (x) : FD \left(\frac{b}{a} x \right). \quad \text{Quare}$$

cum fit $pm = AF = AD - FD$, erit utique $pm = y = b - \frac{b}{a} x$. Crescente igitur abscissa $Ap = -x$ appli-

cata pm decrefcit, donec punctum p coincidat cum E , ubi est $pm = 0$. Idem et aequatio exprimit. Posito

enim in eadem a loco x , fiet $y = -\frac{b}{a} a + b = -b + b$

$= 0$. Quodsi jam abscissa $Ap = -x$ ulterius crescat applicata pm fit negativa, quod quidem intuitus figurae

docet, et aequatio $y = -\frac{b}{a} x + b$ indicat. Est enim

jam $x > a$, ideo $\frac{b}{a} x > b$, quare $-\frac{b}{a} x + b$ non

potest non esse quantitas negativa. Ponit aequatio, hanc rectam LM ad axem inclinare eique non esse paralle-

lam. Revolvi intelligatur ipsa LM circa punctum D ita ut angulus ADL evadat major, atque hoc facto recta EA

$= a$, quae ante constans erat, variatur ipsa $AD = b$ in-

nente constante. Crescit vero recta AE crescente an-

gulo ADL donec ADL angulus rectus fiat. Simulac enim hoc accidit, recta LM axi est parallela et AE infi-

nita. In aequatione igitur $y = \frac{b}{a} x + b$, posito $a =$

∞ fit $y = \frac{b}{\infty} x + b = b$. Proinde $y = b$ est aequa-

tio pro linea recta axi parallela. Idem et ex figura 7.

perspicitur. PM enim nunc est distantia rectae LM ab

axe

axe BC ipsi parallela, quae igitur ubique est eadem, quicunque et ipsi x tribuatur valor. Non tantum positio axis in hoc negotio arbitraria est, sed et in ipso axe initium abscissarum pro arbitrio sumi potest. Mutato vero initio abscissarum, licet positio axeos inaneat eadem, etiam aequationem, naturam lineae ad illud relatae exprimentem, aliam induere formam, palam est. Idem accidet aequationi pro linea recta LM, si loco puncti A jam punctum E, in quo cum axe concurrit, sumatur pro abscissarum initio. Manente $AE = a$, et $AD = b$, nunc erit $EP = x$, ideoque $EA (a) : AE (b) = EP (x) : PM (y)$, ex qua analogia deducitur aequatio $ay = bx$, vel $y = \frac{b}{a} x$, quae iterum in eo casu, quo LM cum axe est parallela, fit $y = b$. Tum enim fit $AE = a = \infty$, et $EP = x = \infty + AP$, ideoque $y = \frac{b}{\infty} \times \infty + \frac{bxAP}{\infty} = b$. Pro eadem igitur linea mutata vel axis positione, vel initio abscissarum assumpto alio atque alio, vel denique utroque mutato, admodum multae inveniri possunt aequationes diversae, atque ideo a diversitate aequationum non semper ad diversitatem linearum, quas exprimunt, concludere licet, quamvis diversae lineae diversis etiam aequationibus perpetuo exprimantur.

§. 130.

Quaerenda jam sit aequatio pro circulo AMD. Ac F.233. primo in plano hujus circuli ducenda est recta indefinita BC pro axe sumenda, cujus positio cum arbitraria sit, ea per centrum circuli E ducatur, eritque pars ipsius AD intra circulum cadens hujus diameter. Sit primo initium abscissarum in puncto diametri extremo A, atque AP abscissa quaecunque, cujus adplicata orthogonalis PM. Sed vero in omni circulo est $PM^2 = \text{rectangulo sub AP et PD}$ (§. 212. *Geom. Elem.*) ideo si radius circuli, quippe qui est constans quantitas, ponatur $= a$, erit diameter

meter $AD = 2a$, hincque porro ponendo $AP = x$ et $PM = y$, erit $PD = 2a - x$. Ex his denique deducitur aequatio $yy = x(2a - x)$, vel $yy = 2ax - xx$, et $y = \pm \sqrt{2ax - xx}$. Indicat igitur aequatio, unicuique abscissae duplicem respondere adplicatam, quarum altera positiva, altera negativa est, et quarum una alteri absolute spectatae aequalis est. Ex eadem aequatione et aliae deducuntur hujus curvae proprietates, quales sunt quae sequuntur.

Curva interfecat axem in abscissarum initio. Ponendo enim $x = 0$, fit $y = \pm \sqrt{0 - 0} = 0$, quod indicio est, curvae punctum M abscissae $x = 0$ respondens cum puncto A esse coincidens.

Curva interfecat axem denuo, abscissa x existente $= 2a$. Tum enim fit $y = \pm \sqrt{4aa - 4aa} = 0$.

Cuilibet abscissae positivae et minore constante $2a$ duplex respondet applicata realis $= \pm \sqrt{2ax - xx}$. Sub hac enim hypothese est $2ax > xx$, ideoque $2ax - xx$ quantitas positiva.

Crescente abscissa $+x$ ultra valorem $2a$, utraque adplicata fit imaginaria, quia tum $xx > 2ax$, atque ideo $2ax - xx$ est quantitas negativa. Curva igitur versus D clausa est, nec ullum habet ramum versus hanc axeos partem cum eodem in infinitum excurrentem.

Tribuendo abscissae x valorem negativum quemcunque, fit $y = \pm \sqrt{-2ax - xx}$, proinde utraque applicata semper imaginaria est, quicumque valor negativus abscissae tribuatur. Hinc curva etiam versus A clausa est, nec ramum habet versus hanc axeos partem, qui cum eodem in infinitum excurat. Quare cum cuilibet ipsius x valori positivo intra terminos $+0$ et $+2a$ cadente duplex applicata realis altera positiva altera negativa respondeat, curva intra hos terminos quoque tam supra quam infra axem clausa est, undique igitur super-

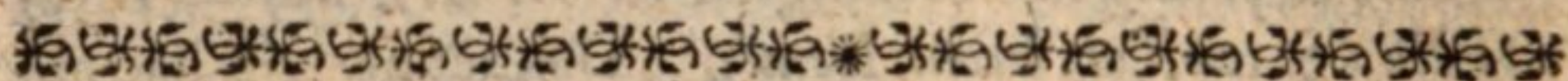
superficiem quandam planam terminat, quae ab axe in duas partes similes et æquales dividitur, quod ex eo patet, quia hæ partes inter se congruere possunt, ob adplicas oppositas æquales,

Eadem vero hæc æquatio alias atque alias subire debet formas, mutata vel axis positione, vel initio abscissarum a priori diverso assumpto, vel utraque mutatione admissa. Quodsi centrum E loco puncti A sumatur pro initio abscissarum, erit jam $AP = a + x$, et $PD = a - x$, hinc $yy = (a + x)(a - x) = aa - xx$, cujus æquationis veritas etiam perspicitur ex eo, quod ducta recta EM in triangulo rectangulo EPM sit $PMq = EMq - EPq$ (§. 120. Cor. Geom. Elem.). Deducuntur ex hac æquatione eadem hujus curvæ proprietates, quas ante ex priori æquatione elicuimus. Ponendo nimirum $x = +a$, vel $x = -a$, utraque adplicata evanescit. Cui-libet vero valori ipsius x , qui continetur intra hos terminos $+a$ et $-a$, duplex respondet applicata realis. Crescente vero abscissa ultra terminos $+a$ vel $-a$, utraque adplicata fit imaginaria.

§. 131.

Ex descripta hac methodo lineas curvas in plano descriptas æquationibus analyticis exprimendi sequitur earum divisio in *continuas* et *discontinuas* seu *mixtas*. Linea enim curva, quæ ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius x functionem determinatam exprimi queat, vocatur *curva continua* seu *regularis*: curva autem, cujus variæ partes per varias ipsius x functiones exprimi debent; vocari solet *curva discontinua*, *mixta*, *sive irregularis*. De curvis continuis tantum in posterum sermo erit. Eaedem vero ulterius dividuntur in curvas *algebraicas* seu *geometricas* et *transcendentes*, prout applicata y vel functio ipsius x algebraica vel transcendens erit. Curva igitur erit algebraica seu geometrica, si ad quamvis abscissam x reperiri potest respondens applicata y per constructiones, quæ tandem in postulata

stulata Geometriae Elementaris resolvuntur: curva vero transcendens si construenda sit, ad operationes confugiendum est, quæ non sunt in potestate Geometriae Elementaris, quales sunt divisio indefinita arcus aut anguli, et aliæ hujusmodi. Omnis curva continua five algebraica five transcendens, quæ tota in idem planum cadit, vocatur *Curva simplicis curvaturæ*, reliquæ omnes *curvæ duplicis curvaturæ* vocari sunt solitæ. De curvis simplicis curvaturæ in posterum sermo erit, donec indicabitur contrarium.



SECTIO X.

DE

SOLVTIONE PROBLEMATVM INDE- TERMINATORVM ARITHMETICA ET DO- CTRINAE SERIERVM PRINCIPIIS.

§. 132.

Quando problema quoddam plures incognitas proponit inveniendas; ex ejus conditionibus eliciendæ sunt tot æquationes fundamentales, quot sunt incognitæ inveniendæ et quarum quaelibet unius incognitæ exhibet valorem. Id quod si fieri nequeat, *problema* dicitur *indeterminatum*; quia tum certus aliquis quæsitus valor, vel pauci aliqui determinati valores, per problema non suggeruntur. Sic si problema aliquod propositum fuerit, in quo duæ quærentur incognitæ x et y , una in eam rem æquatio non sufficit, utpote per quam unum tantum quæsitum ut y determinatur ex altero x tanquam dato, ita ut y tum sit functio ipsius x tanquam quantitatis variabilis, quia in ejusmodi casu mente per-

cur-

currendi sunt omnes valores, qui litterae x tribui possunt, atque tum ex theorematibus de æquationum natura traditis concludendum est, quot et quanti sint valores ipsius y , si ipsi x alius atque alius tribuatur valor determinatus. Tale est problema arithmeticum, quod sequitur.

§. 133.

Invenire duos numeros, quorum quadrati in summam collecti dent cubum alterutrius eorum numerorum.

SOL. Sint numeri quæfiti x et y , erit $x^2 + y^2 = x^3$, in qua æquatione, cum duæ sint litterae incognitae, neque praeter eam alia æquatio in problemate contineatur, non poterit id ita solvi, ut numeri determinati producantur. Quod praestari potest, id solum est, ut æquationi ea forma inducatur, quae clarissime ostendit, quomodo unus numerorum quæfitorum pendeat ab altero, quo scilicet, uno numerorum pro arbitrio sumpto alterius inventio, quantum potest, facilitetur. Aequatio autem $x^2 + y^2 = x^3$ transpositis terminis sit $y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ ideoque $y = \pm x\sqrt{x - 1}$. Unde patet, si assumatur numerus x , cujus cubo summa quadratorum aequalis est reddenda, duos semper y quæfitioni satisfacere, positivum alterum, alterum negativum, sed ejusdem magnitudinis absolutae. Si x sumatur integer atque positivus, numerus y semper realis, atque tanto major erit, quo major sumitur x . Sed si x negativus sumatur, vel fractus verus, y erit impossibilis. Tandem y erit rationalis, si x quadratum aliquem numerum unitate excedit, integer vero erit, si x sumatur integer. Minimus igitur numerorum integrorum, qui pro x substitutus numerum y integrum atque rationalem reddit, est 2. Deinde 5, 10, 17 etc. aequae utiles sunt ad numerum y integrum rationalem reddendum. Hic est modus numerum y eliciendi ex numero x tanquam dato, qui igitur in quovis problemate hujus gene-

generis est quantitas variabilis, omnes omnino valores determinatos in se complectens, et numerus y hujus variabilis functio.

§. 134.

Invenire duos numeros, quorum alter pendet ab altero eo modo, quem aequatio $x^3 - xxy = 43x - 9y - 42$ definit.

SOL. Transpositis aequationis terminis fit $x^3 - 43x + 42 = xxy - 9y$, ideoque $y = \frac{x^3 - 43x + 42}{xx - 9}$

unde y colligi satis promte potest, si assumatur x . Ut autem problema cum aliqua universalitate solvatur, percurrendi sunt praecipui numeri, qui per x denotari possunt; eritque ad

$x = +\infty$	-	-	-	-	$y = +x$
$+10$	-	-	-	-	$+6, 7$
$+9$	-	-	-	-	$+5, 3$
$+8$	-	-	-	-	$+3, 8$
$+7$	-	-	-	-	$+2, 1$
$+6$	-	-	-	-	0
$+5$	-	-	-	-	-3
$+4$	-	-	-	-	$-9, 4$
$+3$	-	-	-	-	∞
$+2$	-	-	-	-	$+7, 2$
$+1$	-	-	-	-	0
0	-	-	-	-	$-4, 6$
-1	-	-	-	-	$-10, 5$
-2	-	-	-	-	-24
-3	-	-	-	-	$-\infty$
-4	-	-	-	-	$+21, 4$
-5	-	-	-	-	$+8, 2$
-6	-	-	-	-	$+3, 1$
-7	-	-	-	-	0
-8	-	-	-	-	$-2, 1$
-9	-	-	-	-	$-4, 1$
-10	-	-	-	-	$-5, 8$
$-\infty$	-	-	-	-	$-x$

Atque

Atque hoc modo, si y detur per quamcunque ipsius x functionem, substitutis in hac formula loco x numeris, qui a termino 0 excurrunt versus utramque partem, series oritur numerorum, quorum quilibet per eandem functionem generatim exprimitur: quare alia atque alia functione ipsius x assumpta innumerabiles produci possunt ejusmodi series.

§. 135.

Series enim generatim est numerorum communi quadam formationis lege utcunque sese consequentium congeries, quæ producta supponitur per terminos omnes, qui in formationis determinatione continentur. *Series* dicitur *primitiva*, si spectatur ut talis, cujus lex formationis ab alia quadam serie non dependet: *series* autem, quæ in formatione dependet ab alia quadam serie, *derivativa* vocatur. Ad ejusmodi series pertinet *progressio geometrica*, quæ constat terminis continuo geometricè proportionalibus, et *progressio arithmetica*, quæ terminis æque differentibus constat. *Series differentiales* sunt, quæ prodeunt, si capiantur differentiæ inter proximos quosvis terminos cujuscunque seriei, quæ ut primitiva spectatur, et denuo differentiarum differentiæ, donec ultimato inveniuntur differentiæ æquales, quarum differentiæ, si denuo capiantur, evadunt $= 0$. *Series differentialis ordinis primi* est, cujus termini sunt differentiæ terminorum seriei primitivæ, *ordinis secundi*, cujus termini sunt differentiæ terminorum seriei differentialis ordinis primi, et sic porro. *Series summatrices* sunt, quæ prodeunt capiendo summas terminorum seriei cujuscunque, quæ ut primitiva sumitur, et summas harum summarum, sicque porro; estque *summatrix ordinis primi*, quæ constat summis terminorum primitivæ; *ordinis secundi* et sequentium, cujus termini sunt summae terminorum summatricis ordinis primi et sequentium. Ipsa *series primitiva* dicitur *primi ordinis*, si ejusdem differentiae primæ omnes sunt constantes, quare omnes

progressiones arithmeticae sunt series primi ordinis. *Series secundi ordinis* sunt, quarum differentiae tertiae constantes sunt; ad *quartum ordinem* et sequentes referentur series, quarum differentiae quartae et posteriores demum sunt constantes.

§. 136.

In hac divisione permulta serierum genera continentur, neque tamen omnes series ad haec genera revocare licet, quia innumerabiles series occurrunt, quae differentiis sumendis nunquam ad terminos constantes deducunt, cujusmodi praeter innumeras alias sunt progressiones geometricae, quae nunquam praebent differentias constantes. Sit enim series A

(A) L, M, N, O, P, Q, etc.

(B) $M - L$, $N - M$, $O - N$, $P - O$, $Q - P$, etc, progressio geometrica quaecunque, cujus differentialis prima est series B, erit quoque series B progressio geometrica; et termini ejus contigui erunt in eadem ratione, in qua continuantur termini primitivae. Est enim $M : L = N : M$, et ideo $M - L : L = N - M : M$, vel $M - L : N - M = L : M = M : N$. Deinde est $N : M = O : N$, proinde $N - M : M = O - N : N$, vel $N - M : O - N = M : N$, et ideo $M - L : N - M = N - M : O - N = M : N = L : M$, quae argumentatio per totam seriem continuari potest, ex eaque simul patet, quia series differentialis prima est geometrica, etiam differentialem secundam, tertiam, et sequentes omnes esse series geometricas, quare nunquam ad differentias constantes perveniri potest. Plures igitur serierum classes constitui debebunt, quarum una tantum in hos ordines qui tandem ad differentias constantes revocantur, subdividitur.

§. 137.

Duae autem res ad naturam serierum cognoscendam inprimis requiri solent. Terminus generalis, atque summa seu Terminus summatorius. *Terminus generalis*

generalis est expressio indefinita, que unumquemque seriei terminum complectitur, atque ideo est ejusmodi functio variabilis x , quæ posito $x = 1$, terminum seriei primum exhibet, secundum vero, posito $x = 2$; tertium posito $x = 3$; quartum posito $x = 4$, et ita porro. *Indices* seu *Exponentes terminorum* in qualibet serie vocantur numeri, qui indicant, quotus quisque terminus sit in ordine. Sic termini primi index erit 1, secundi 2, tertii 3 et ita porro. Hinc indices singulis cujusque seriei terminis inscribi solent, hoc modo:

<i>Indices.</i>							
1	2	3	4	5	6	7	etc.
<i>Termini.</i>							
A	B	C	D	E	F	G	etc.

unde statim patet, G esse seriei propositae terminum septimum, cum ejus index sit 7. Hinc terminus generalis nihil aliud erit, nisi terminus seriei, cujus index vel exponens est numerus indefinitus sive variabilis x . Quodsi progressionis arithmeticæ seu seriei primi ordinis terminus primus sit a et b differentia terminorum, series arithmetica sequentem habebit formam generalem:

<i>Indices.</i>						
1	2	3	4	5	6	etc.
<i>Termini.</i>						
a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$	$a + 4b$	$a + 5b$	etc.
<i>Series differentialis prima.</i>						
	b	b	b	b	b	etc.

ex qua statim patet, terminum, cujus index sit $= x$, fore $a + (x - 1)b$. Erit igitur progressionis arithmeticæ terminus generalis $a + (x - 1)b = bx + a - b$, qui ex termino primo seriei primitivæ et termino primo seriei differentialis componitur. Quodsi autem terminus secundus seriei, qui est $a + b$, vocetur a^1 , erit $b = a^1 - a$, et terminus generalis $= (a^1 - a)x + 2a - a^1 = a^1(x - 1) - a(x - 2)$; unde ex

cognitis termino primo et secundo progressionis arithmeticae ejus terminus generalis formabitur. Quodsi geometricae progressionis terminus primus sit a , et exponens rationis termini primi ad secundum $= e$, erit forma generalis progressionis geometricae ea, quae sequitur.

Indices.

1, 2 3 4 5 6 7 etc.

Termini.

a ae ae^2 ae^3 ae^4 ae^5 ae^6 , etc,

ex quo patet, si index termini sit x , esse ipsum terminum $= ae^{x-1}$, quae est expressio termini generalis seriei geometricae.

§. 138.

Terminus summatorius seriei cujuscunque propositae est functio variabilis x , quae aequalis est summae tot terminorum seriei, quot unitates continet numerus x . Ita igitur terminus summatorius erit comparatus, ut posito $x = 1$ prodeat terminus primus seriei; sin autem ponatur $x = 2$, summa primi et secundi; facto autem $x = 3$, summa termini primi, secundi et tertii; sicque deinceps. Proinde si ex serie proposita nova series formetur, cujus primus terminus aequalis sit primo illius, secundus aequalis summae duorum, tertius aequalis summae trium, atque ita porro, orietur seriei propositae summatrix prima, hujusque seriei summatricis terminus generalis, erit terminus summatorius seriei propositae. Sit series proposita haec

a a^I a^{II} a^{III} a^{IV} a^V a^{VI} etc,

hujusque seriei summatrix sit

A A^I A^{II} A^{III} A^{IV} A^V A^{VI} etc,

erit ex natura seriei summatricis

$$A = a$$

$$A = a$$

$$A^I = a + a^I$$

$$A^{II} = a + a^I + a^{II}$$

$$A^{III} = a + a^I + a^{II} + a^{III}$$

$$A^{IV} = a + a^I + a^{II} + a^{III} + a^{IV}$$

etc.

Hinc serierum summaticis differentia erunt $A^I - A = a^I$; $A^{II} - A^I = a^{II}$; $A^{III} - A^{II} = a^{III}$; etc, unde series proposita termino primo minuta erit series differentiarum primarum seriei summaticis. Quodsi igitur seriei summatici præfigatur terminus $= 0$, ut habeatur $0, A, A^I, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^V$, etc. erit series differentialis prima hujus seriei ipsa series proposita:

$$a \quad a^I \quad a^{II} \quad a^{III} \quad a^{IV} \quad a^V \quad \text{etc.}$$

Erunt igitur seriei propositæ differentia primæ differentia secundæ summaticis, atque differentia secundæ illius erunt differentia tertiæ hujus, tertiæ autem illius quartæ hujus, atque sic porro. Quare si series proposita tandem habeat differentias constantes, tunc etiam ejus summatix ad differentias constantes deducetur, eritque series ejusdem naturæ, sed uno ordine superior.

§. 139.

Series numerorum polygonorum sunt summatrices primæ progressionis arithmeticæ ab unitate incipientis. Vocantur *triangulares*, si differentia terminorum $= 1$, *quadrangulares*, *pentagoni*, *hexagoni*, etc. si differentia terminorum $= 2, 3, 4$, etc. *Series numerorum pyramidalium* sunt summatrices omnium ordinum seriei numerorum polygonorum, et termini talis seriei vocantur *numeri pyramidales trigoni*, *tetragoni*, etc. prouti series primitiva, ex qua formantur, fuerit series numerorum triangularium, vel quadrangularem, vel pentagonorum etc. *Series numerorum figuratorum* sunt series summa-

trices omnium ordinum ejusmodi seriei primitivæ, cujus omnes termini inter se æquales sunt, qui termini dicuntur *generatores* serierum numerorum figuratorum. Generatores isti possunt cuilibet numero assumpto æquales esse. Si statuantur unitati æquales, summatrix prima fit progressio arithmetica ab unitate incipiens, in qua differentia terminorum $= 1$, proinde summatrix secunda fit series numerorum triangularium et summatrix reliquorum ordinum sunt series numerorum pyramidalium trigonorum.

§. 140.

Si seriei cujusdam primitivæ quærantur summatrix vel differentiales omnium ordinum, numerus exprimens, quota fit series in ordine summatrixium vel differentialium serie primitiva connumerata, vocatur *index seriei*, qui igitur ab *indice termini* est distingendus. Quodsi series figuratæ ordinentur, uti in sequente schemate, erit *ut index ordinis seriei ad unitatem, sic multipulum termini cujusvis indicis x in indicem suum ad summam x terminorum.*

Indices Serierum.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	&c.
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
II	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
III	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
IV	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
V	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	
VI	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	
VII	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	
VIII	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	
IX	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	
X	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	
XI	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	
XII	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
&c.													

Sit y index ordinis seriei, V terminus quivis, x ejus index, S vero summa x terminorum, atque demonstrandum est, fore $y : 1 = xV : S$. In seriei I veritas propositionis per se manifesta est. Quodsi autem in una serie hoc verum sit, idem quoque verum esse in serie proxime consequente ita demonstratur. Sint duæ pro-

y	$y+1$	
P	Q	
a	o	
b	g	
c	b	
d	k	
e	l	
f	p	
	q	

xime consequentes series P et Q, index ipsius P sit y , quare index sequentis Q erit $y+1$; numerus terminorum in P sit x , unde in Q erit $x+1$. Jam per hypothesein in serie P est $y : 1 = xf : a + b + c + d + e + f$, atque per genesin seriei Q est $a + b + c + d + e + f = q$, ideo est $y : 1 = xf : q$, et $q = \frac{xf}{y}$. Eodem argumento ostenditur, esse

$$p = \frac{(x-1)e}{y}$$

$$l = \frac{(x-2)d}{y}$$

$$k = \frac{(x-3)c}{y}$$

$$b = \frac{(x-4)b}{y}$$

$$g = \frac{(x-5)a}{y}$$

$$\text{Ergo } q + p + l + k + b + g = \frac{xf}{y} + \frac{(x-1)e}{y} +$$

$$\frac{(x-2)d}{y} + \frac{(x-3)c}{y} + \frac{(x-4)b}{y} + \frac{(x-5)a}{y} =$$

$$\begin{aligned}
 & (xf + (x-1)e + (x-2)d + (x-3)c + (x-4)b + (x-5)a) \\
 & \quad \times \frac{1}{y} \\
 & = (xf + xe - e + xd - 2d + xc - 3c + xb - 4b + xa - 5a) \\
 & \quad \times \frac{1}{y} \\
 & = (x(f + e + d + c + b + a) - e - 2d - 3c - 4b - 5a) \times \frac{1}{y}.
 \end{aligned}$$

Sed $g = a$

$$h = a + b$$

$$k = a + b + c$$

$$l = a + b + c + d$$

$$p = a + b + c + d + e$$

ideo $g + h + k + l + p = 5a + 4b + 3c + 2d + e$.Præterea $a + b + c + d + e + f = q$ (*gen. seriei*)

Facta igitur substitutione erit

$$q + p + l + k + h + g = (xq - p - l - k - h - g) \times \frac{1}{y}$$

$$\text{ergo } yq + y(p + l + k + h + g) = (xq - p - l - k - h - g),$$

$$\text{et } y(p + l + k + h + g) + 1 \times (p + l + k + h + g) = xq - yq,$$

$$\text{id est } (y + 1)(p + l + k + h + g) = (x - y)q, \text{ proinde } p +$$

$$l + k + h + g = \frac{x - y}{y + 1} q. \quad \text{Addatur utrinque } q, \text{ et}$$

$$\text{fiet } q + p + l + k + h + g = \frac{x - y}{y + 1} q + q = \frac{(x - y)q + (y + 1)q}{y + 1}$$

$$= \frac{xq - yq + yq + q}{y + 1} = \frac{(y + 1)q}{y + 1}. \quad \text{Ergo in serie}$$

Q est $y + 1 : 1 = (x + 1)q : q + p + l + k + h + g$. Valet vero analogia ista in serie prima, ergo valet in secunda, proinde et in tertia, quarta, quinta, et pro quavis alia.

§. 141.

Ex his deducitur formula pro termino summatorio seriei figuratæ cujuscunque, si generatores sunt unitati æqua-

x quales. In prima serie P indicis $y = 1$ terminus sum-
matorius est $\frac{x}{1} = q$. In secunda Q est $0 + g + b + k$

$$+ l + p = \frac{x - y}{y + 1} q = \frac{x - 1}{2} q; \text{ sed } q = \frac{x}{1}, \text{ quare}$$

$$0 + g + b + k + l + p = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2} . \text{ Quodsi series P}$$

fit secunda, Q fit tertia, eritque index seriei $P = y = 2$,

$$\text{atque } 0 + g + b + k + l + p = \frac{x - y}{y + 1} q = \frac{x - 2}{3} q,$$

$$\text{sed } q = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}, \text{ ideo } 0 + g + b + k + l + p =$$

$$\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} . \text{ Eodem modo pergendo invenitur}$$

terminus sumatorius pro serie

$$\text{IV. } \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} .$$

$$\text{V. } \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot x - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} .$$

er generaliter pro serie ordinis y erit terminus sumina-
torius connumeratis cyphris

$$\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot \dots \cdot x - y + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot y} .$$

Eadem formula mutari potest in aliam, ubi x denotat
indicem terminorum incipiendo ab unitate, adtendendo
ad sequentia. Si y est index seriei, erit $y - 1$ numerus
cyphrarum ab unitate usque ad initium seriei regredien-
do, unde si jam x dicatur numerus terminorum inci-
piendo quamlibet seriem ab unitate, quod ante erat x ,
jam fiet $x + y - 1$. Proinde hoc valore in locum illius

substituto, terminus summatorius pro quavis serie ordinis y hanc habet formam,

$$\begin{array}{r} x+y-1. \quad x+y-2. \quad x+y-3. \dots (x+y-1-y+1=x) \\ \hline 1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \quad . \quad 4 \quad . \quad 5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y. \\ \text{vel} \quad \frac{x \quad . \quad x+1 \quad . \quad x+2 \quad . \quad x+3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x+y-1}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \quad . \quad 4 \quad . \quad 5 \quad . \quad . \quad . \quad y.} \end{array}$$

§. 143.

Si quantitates quocunque numero x inter se combinandæ sunt exponente combinationis y ; jam inveniri potest formula generalis, quæ exprimit numerum combinationum.

Sit enim numerus combinationum $= v$, exponens combinationis 1, et

- 1) numerus quantitatuum 1, erit $v = 1$,
- 2) numerus quantitatuum 2, erit $v = 2$,
- 3) numerus quantitatuum 3, erit $v = 3$,

Ideo generaliter, si x quantitates sunt combinandæ ex-

ponente combinationis 1, erit $v = \frac{x}{1}$, et numeri com-

binationum progrediuntur ut numeri 1, 2, 3, 4, 5, etc. quæ est series figurata indicis II, ita ut exponente combinationis $= 1$ sit numerus combinationum termino summatorio seriei figuratæ indicis 1 æqualis, si hic pro indice termini seriei figuratæ scribatur numerus quantitatuum.

Deinde sit exponens combinationis 2, et

- 1) numerus quantitatuum 1, erit $v = 0$
- 2) si $x = 2$, est $v = 0 + 1 = 1$
- 3) si $x = 3$, est $v = 3$, si enim tres istæ quantitates sint a, b, c , patet, quod tertia c quæ accedit, cum qualibet priorum a et b possit combinari, ideoque 2 combinationes accedunt ad priorem unicam, est igitur $v = 1 + 2 = 3$.

- 4) si quarta d accedat, hæc iterum cum qualibet priorum

orum combinari potest, ad tres igitur priores combinationes tres accedunt, fietque $v = 1 + 2 + 3 = 6$.

5) si quinta e accedat, eodem modo patet, quatuor combinationes accedere, ita ut sit $v = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

6) si sexta accedat, est $v = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Ideo numeri combinationum progrediuntur, ut numeri figurati in serie indicis III, et generaliter numerus combinationum est terminus summatorius seriei figuratæ indicis II, ut sit $v = \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}$, si numerus quantitatum fuerit $= x$.

Porro si exponens combinationis sit 3, et

1) $x = 1$, est $v = 0$

2) $x = 2$, est $v = 0 + 0$

3) $x = 3$, est $v = 0 + 0 + 1$

4) $x = 4$, ad tres priores quantitates, quæ sint α , β , γ , quarta δ accedit, quæ cum quibusvis binis priorum combinari potest, ideo tres combinationes accedunt, fitque $v = 0 + 0 + 1 + 3$.

5) Si quinta ϵ accedat hæc iterum cum quibuslibet binis ex quatuor istis α , β , γ , δ , potest esse in combinatione. Proinde cum binarum ex his combinationes 6 sint possibiles, fit $v = 0 + 0 + 1 + 3 + 6$.

6) Sexta ζ accedente præter priores combinationes accedunt istæ in quibus ζ cum singulis binis ex his prioribus α , β , γ , δ , ϵ , combinatur. Quare cum harum combinationum sint 10 possibiles, fit $v = 0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10$.

Numeri igitur combinationum exponente $= 3$ progrediuntur ut numeri figurati in serie indices IV, estque generaliter numerus combinationum termino summatorio seriei figuratæ indicis III æqualis. Proinde ad x

quantitatus est $v = \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Formetur jam series numerorum, qui exprimunt summas combinationum, si x quantitates combinandæ sint, exponente combinationis existente 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Indices.

1 2 3 y

Termini.

$$\frac{x}{1}, \frac{x \cdot x - 1}{1 \cdot 2}; \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - y + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 4 \cdot y}.$$

erit index cujuslibet termini exponenti combinationum æqualis. Dico vero, si haec formula vera sit, numero quantitarum combinandarum existente $= x$, eaque valeat pro termino r to, eandem simul valere pro termino $(r+1)$ to. Per genesis enim seriei est terminus r tus =

$$\frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot \dots \cdot x - r + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r}$$

ex eoque formatur terminus $(r+1)$ tus, si numerator per $x - r$ et denominator per $r + 1$ multiplicetur, ut fiat terminus

$$(r+1)\text{tus} = \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot \dots \cdot x - r + 1 \cdot x - r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r \cdot r + 1}$$

$$\text{vel } \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot \dots \cdot x - r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r + 1}$$

Sed vero in termino r to ubique substituto $r + 1$ loco r , is eandem obtinet formam. Cum igitur haec formula valeat pro termino 1 et 2, quicumque sit numerus quantitarum combinandarum, eadem valere debet pro omnibus.

§. 143.

Quodsi functionis rationalis integræ variabilis x hujus formæ

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Px + Q$$

factores simplices omnes sint inter se æquales et quivis eorum sit $x - b$ erit $(x - b)^m = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Px + Q$. Posito jam $x = b$, ut fit

fit $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Px + Q = 0$, erunt hujus aequationis radices omnes inter se aequales. Praeterea est A summa factorum ex singulis 1 radicibus cum signis contrariis, B summa factorum ex singulis 2 radicibus cum signis propriis, et ita porro, (§. 100.). Sed hoc loco est factum ex 2 radicibus $= b^2$, factum ex tribus $= b^3$, factum ex quatuor $= b^4$, etc. numerus omnium radicum $= m$, Pro-

inde est $A = -\frac{m}{1}b$, $B = +\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}b^2$, $C = -$

$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3$, $D = +\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}b^4$ etc;

ex quo fit $(x-b)^m = x^m - \frac{m}{1}x^{m-1}b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^{m-2}b^2$

$- \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{m-3}b^3 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{m-4}b^4$

$\dots - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot \dots \cdot m - m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}x^{m-m}b^m$, in

quo termino series perpetuo abrumpitur, quia sequentes omnes multiplicati sunt per factorem $m - m = 0$, et proinde evanescunt. Littera enim m hic denotat numerum integrum eumque positivum, quia aequatio $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots + Q = 0$ est aequatio rationalis.

Sic loco $-b$ scribatur ubique $+b$, fiet $(x+b)^m = x^m +$

$\frac{m}{1}x^{m-1}b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}x^{m-2}b^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$x^{m-3}b^3 + \text{etc.}$ Series haec inservit binomio quocun-

que $a + b$ ad quamlibet potentiam exponentis integri positivi elevando. Est enim, si m denotet numerum in-

tegrum positivum, $(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1}a^{m-1}b +$

$\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}a^{m-2}b^2 \pm \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}b^3 +$

etc,

etc, quia inventa formula vera est, quicunque valor determinatus pro x substituatur. Est igitur $(1+b)^m =$

$$1 + \frac{m}{1}b + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}b^4 + \text{etc. in qua serie, si}$$

coefficientis termini r ti non connumerato primo est P ,

erit coefficientis termini $(r+1)$ ti $= \frac{m-r}{r+1} P$. Atque

hoc est specimen seriei, cujus termini secundum potestates ipsius b sunt ordinati, et quorum terminorum cujuslibet coefficientis formatur ex antecedente secundum legem quandam constantem. Ejusmodi series, in quibus cujuslibet termini coefficientis formatur ex coefficiente unius vel coefficientibus aliquot praecedentium vocantur *series recurrentes*

§. 144.

Quaedam progressio arithmetica inter series figuratas occurrit. Sed poterunt formulae generales, problematum has progressionem concernentium solutiones definientes etiam universaliter ex notione aequalitatis differentiarum erui. Ponatur enim terminus primus $=a$, et differentia quorumvis terminorum contiguorum $=d$; quo facto, si n sit index termini ultimi, omnis progressio arithmetica ita poterit exprimi:

INDICES.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 n

TERMINI.

$a; a+d; a+2d; a+3d; a+4d; a+5d . . . a+(n-1)d$.

Summa termini primi et ultimi erit $2a+(n-1)d$. Jam demonstrare possumus, quamlibet summam duorum terminorum ab extremis aequaliter distantium eidem huic expressioni et ideo summae termini primi et ultimi aequalem esse. Ponatur distantia duorum terminorum ab extremis

tremis aequaliter distantium ab initio et fine $= r$, et terminus r tus ab initio erit $= a + (r - 1)d$. Distantia termini r ti a fine a termino primo seu ejus index sit $= y$, quo facto erit $y + r - 1 = n$; $y - 1 = n - r$, et $y = n - r + 1$. Hinc terminus r tus a fine $= a + (n - r)d = a + nd - rd$. Dicatur terminus ultimus $= V$ et erit $a + V = a + nd - rd + a + rd - d = 2a + nd - d = 2a + (n - 1)d$.

Sit progressio arithmetica A et eadem B

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & a & & a + d & a + 2d & a + 3d & a + 4d & . . & a + (n - 1)d \\
 B & a + (n - 1)d & a + 4d & a + 3d & a + 2d & a + d & & & a
 \end{array}$$

$$2a + (n - 1)d \quad 2a + 5d \quad 2a + 5d \quad 2a + 5d \quad 2a + 5d \quad 2a + (n - 1)d$$

priori A ordine inverso subscripta. Jam non tantum terminus primus et ultimus sed generatim omnes termini ab extremis aequaliter distantes sibi invicem subscripti erunt. Posterior progressio priori addatur, et summa totalis erit duplum progressionis A, omnes autem summae partiales sibi erunt aequales. Si igitur summa progressionis dicatur $= S$, erit per modo dicta $2S =$ summae termini primi et ultimi $2a + (n - 1)d$ toties sumtae, quoties in n est unitas, seu $2S = (2a + (n - 1)$

$$d)n. \quad \text{Hinc erit } S = (2a + (n - 1)d) \times \frac{n}{2}. \quad \text{Ex hac}$$

aequatione tanquam fundamentali cum altera $U = a + (n - 1)d$ combinata praecipuorum problematum arithmeticas progressionis concernentium solutiones satis facile eliciuntur. Generatim autem, si ex hisce quinque quantis, a , U , n , d , S , tria sint data, ex iis inveniri poterunt duo reliqua.

I. Est $U = a + (n - 1)d = a + nd - d$

ideo $U - a = nd - d$

$$\frac{U - a}{n - 1} = d$$

$$\frac{U - a}{d}$$

$$\frac{U - a}{d} + 1 = n$$

$$a = U - nd + d$$

$$\text{II. } \frac{(2a + nd - d)n}{2} = S$$

$$2an + nnd - nd = 2S$$

$$a = \frac{2S - nnd + nd}{2n}$$

$$d = \frac{2S - 2an}{nn - n}$$

$$nnd + (2a - d)n = 2S$$

$$nn + \frac{2a - d}{d}n = \frac{2S}{d}$$

$$n = -\frac{2a - d}{2d} \pm r \left(\frac{2S}{d} + \frac{(2a - d)^2}{4dd} \right)$$

III. Substituatur valor $2a + nd - d = a + U$, et
erit $an + Un = 2S$

$$a = \frac{2S - Un}{n}$$

$$n = \frac{2S}{a + U}$$

$$U = \frac{2S - an}{n}$$

$$\frac{an + Un}{2} = S$$

IV. In $an + Un = 2S$ substituatur $a = U - nd + d$
ut fiat $2Un - nnd + nd = 2S$

$$U = \frac{2S + n^2d - nd}{2n}$$

$$d = \frac{2Un - 2S}{nn - n}$$

$nnd -$

$$und - nd - 2Un = 2S$$

$$nn - \frac{nd - 2Un}{d} = \frac{2S}{d} nn; - \frac{d + 2U}{d} n = \frac{2S}{d};$$

$$n = + \frac{d + 2U}{2d} \pm r \left(\frac{2S}{d} + \frac{(2d + 2U)^2}{4dd} \right)$$

V. In formula $an + Un = 2S$ substituatur valor

$$\frac{U - a}{d} + 1 = n, \text{ ut fiat } (a + U) \left(\frac{U - a}{d} + 1 \right) = 2S =$$

$$= U + a + \frac{UU - aa}{d} = 2S$$

$$a = 2S - \frac{UU - aa}{d} - U$$

$$(U + a)d + UU - aa = 2Sd$$

$$UU - aa = 2Sd - Ud + ad$$

$$\frac{UU - aa}{2S - U + a} = d$$

$$Ud + ad + UU - aa = 2Sd$$

$$UU + Ud = 2Sd + aa - ad$$

$$U = -\frac{1}{2}d \pm r(2Sd + aa - ad + \frac{1}{4}d^2)$$

§. 145.

Si detur terminus primus a progressionis geometricae et exponens rationis m termini primi ad secundum; datur ipsa progressio quousque lubet continuanda. Erit enim generaliter

INDICES.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . . . n

TERMINI SERIEI.

$a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5 . am^6 . am^7 . am^8 . . . am^{n-1}$

ex quo patet, si index termini $= n$, esse ipsum terminum $= am^{n-1}$. Est igitur et terminus ultimus generaliter $= am^{n-1}$, qui si multiplicetur per primum a , erit factum $= a^2 m^{n-1}$. Hoc factum terminorum ex-

Ee

tre-

tremorum semper æquale est facto duorum mediorum quorumcunque ab extremis æque distantium. Sic si terminus ultimus sit am^8 , erit $a \times am^8 = am \times am^7 = am^2 \times am^6$ etc. Sit generaliter distantia terminorum ab extremis æque distantium a fine et ab initio $= r$, et index r termini r ti ab initio erit $= r$. Terminus igitur r tus ab initio est $= am^r - 1$. Ut pari ratione generaliter inveniatur terminus r tus a fine, quæri debet ejus index seu distantia ab initio. Sit termini r ti a fine distantia ab initio s. ejus index $= y$ et index termini ultimi $= n$; et erit $y + r - 1 = n$, hinc $y + r = n + 1$, et $y = n - r + 1$, ideo generaliter est terminus r tus a fine $= a^n - r$, qui multiplicatus per r tum ab initio $am^r - 1$ dat factum $= a^2 m^n - 1$.

§. 146.

Palmaria progressionis geometricæ proprietas est, quod ratio differentiae summæ omnium terminorum et ultimi ad differentiam summæ omnium terminorum et primi æqualis sit rationi termini primi ad secundum.

$$\begin{array}{l} \text{Est enim} \quad a : am = a : am \\ \quad \quad \quad a : am = am : am^2 \\ \quad \quad \quad a : am = am^2 : am^3 \\ \quad \quad \quad a : am = am^3 : am^4 \\ \quad \quad \quad a : am = am^4 : am^5 \\ \quad \quad \quad a : am = am^5 : am^{n-2} \\ \quad \quad \quad a : am = am^{n-2} : am^{n-1} \end{array}$$

Ergo $a : am = a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^{n-2} : am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^{n-2} + am^{n-1}$.
Sit summa omnium terminorum $= S$, et $am^{n-1} = U$ et fiet $a : am = S - U : S - a$.

Ex hac autem analogia deduci potest alia notatu digna. Quia enim $a : am = S - U : S - a$, et $a : am = 1 : m$ erit $1 : m = S - U : S - a$

$$m : 1 = S - a : S - U$$

$$m - 1 : 1 = S - a - S + U : S - U$$

$$m - 1 : 1 = U - a : S - U.$$

i. e. Exponens unitate mulctatus est ad unitatem, uti differentia termini *primi* et ultimi ad summam omnium terminorum excepto ultimo. Fluit ex hac analogia

$$\text{aequatio } \frac{1}{m-1} = \frac{S-U}{U-a} \text{ summam omnium termi-}$$

norum definiens, mutabitur enim in sequentem $\frac{U-a}{m-1}$

+ $U = S$. Prior vero analogia $a : am = S - U : S - a$ dat æquationem fundamentalem sequentem $aS - a^2 = amS - amU$, ex qua praecipuorum, quæ geometricas progressionis concernunt, problematum solutiones facillime eruuntur, cujusmodi sunt sequentia.

§. 147.

PROBL. I. Ex dato termino primo ultimo et exponente invenire summam progressionis geometricæ.

SOL. Ex æquatione fundamentali

$$aS - a^2 = amS - amU$$

$$amU + aS - a^2 = amS$$

$$amU - a^2 = amS - aS$$

$$mU - a = mS - S = (m-1)S$$

$$\text{deducitur: } \frac{mU-a}{m-1} = S.$$

Dato termino primo exponente et indice termini ultimi datur $U = am^n - 1$. Ideo ex æquatione

$$\frac{mU-a}{m-1} = S \text{ invenietur summa terminorum determi-}$$

natae cujusdam progressionis, si tantum terminus primus, exponens et index termini ultimi fuerint dati.

Quaerendus nimirum primo erit $U = am^n - 1$ in numeris, quod commodè fieri potest ope logarithmorum, quia erit $la + (n-1)lm = l.U$. Si valor $U = am^n - 1$ sub-

stituatur in æquatione $S = \frac{mU-a}{m-1}$ ea ita mutabitur

$$S = \frac{m \times am^n - 1 - a}{m - 1} = \frac{am^n - a}{m - 1}, \text{ ex qua valor sum-}$$

mæ progressionis adhuc brevius in numeris elicitur, quia non opus est, ut primo quaeratur terminus ultimus. Notetur tantum, valorem am^n absque ulla difficultate inveniri logarithmorum ope, quia $l.am^n = l.a + n l.m$.

PROBL. II. Quemlibet progressionis terminum invenire, si detur exponens, index termini ultimi et summa progressionis.

$$S = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

$$(m - 1) S = am^n - a = (m^n - 1) a$$

$$\frac{(m - 1) S}{m^n - 1} = a$$

Haec formula dat terminum primum, ex quo invenitur quilibet alius dato ejus indice $= r$, erit enim $=$

$$\left(\frac{(m - 1) S}{m^n - 1} \right) m^{r - 1}.$$

Ex aequatione $U = am^n - 1$ similes problematum solutiones eliciuntur, quales sunt sequentes.

PROBL. III. Datis in Progressione geometrica termino primo et ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.

SOL. $U = am^n - 1$, E. $\frac{U}{a} = m^n - 1$ et $r \frac{U}{a} = m^n - 1$
 $= m$, hæc vero expressio in numeris commode invenitur ope logarithmorum, quia $l. \frac{U}{a} = lm$
 $\frac{l. \frac{U}{a}}{n - 1} = l.m$

PROBL. IV. Datis in progressionem geometricam termino primo et ultimo una cum denominatore rationis, invenire numerum terminorum.

SOL. $U = am^n - 1$. Ideo $lU = la + nlm - lm$,

Hinc $lU - la + lm = nlm$ et $\frac{lU - la}{lm} + 1 = n$.

§. 148.

Series *interpolari* dicitur, si ejus termini assignentur, qui respondent indicibus fractis vel etiam irrationalibus: Quodsi igitur seriei terminus generalis fuerit cognitus, interpolatio nullam habet difficultatem, cum, quicumque numerus loco indicis x substituatur, ista expressio præbeat terminum respondentem. Quare interpolatio serierum generatim ab inventione termini generalis pendet. Sic progressio arithmetica nullo negotio interpolabitur, seu inter duos quoslibet ejus terminorum alii locabuntur, e quibus cum prioribus nova fiat progressio arithmetica, quia ejus terminus generalis ex dato termino primo a et differentia terminorum d sic exprimitur $a + (x-1)d$. Quare indici $x = \frac{3}{2}$ respondet terminus $a + \frac{1}{2}d$, indici $x = \frac{5}{2}$ terminus $a + \frac{3}{2}d$, et sic porro. Eodem modo ex termino generali cognito series retro continuari potest, scriptis pro x numeris unitate minoribus ut et numeris negativis. Sic indici $x = \frac{1}{2}$ in progressionem arithmetica respondet terminus $a - \frac{1}{2}d$, indici $x = 0$, terminus $a - d$, sicque porro. Pari ratione interpolari vel retro continuari potest progressio geometrica ex termino generali $ax - 1$, si loco x numeri fracti vel negativi quicumque substituantur.

§. 149.

Ejusmodi problemata indederminata arithmetica, in quibus non datæ magnitudinis numeri quærendi proponuntur, sed datæ alicujus formæ, ut quadrati, cubi, biquadrati, vel ex dignitatibus atque ipsis numeris hoc vel illo modo compositi, *problemata Diophantea* solent adpellari, quia *Diophantus* ejus generis quamplurima dedit soluta. In talibus quæstionibus solvendis exemplo-

rum copia inprimis est utilis, quia universalis harum solutionum via nulla est, atque speciales ab Analystae pendent ingenio. Nonnunquam unus numerorum immediate elicitur ex altero assumpto, tanquam datus esset: aliquando tertius quidam sumitur, ex quo quæstionum uterque haberi potest per formulam vel æquationem commodam. Atque sic quoque proceditur, quando duobus plures numeri investigandi sunt. Difficile non est, tales formulas excogitare; sed prævidere, quænam id, quod per eas quæritur, quam simplicissime exhibeant, difficile est. Cæterum tanto promptius quis quamlibet quæstionem expediet, quo plura rei, circa quam ea quæstio versatur, attributa prænoverit. Multa hujus rei exempla hic adponere nobis non licet. Cum tamen ejusmodi problemata prorsus negligenda non sint, quia maximus eorum sæpe usus est in resolvendis quæstionibus Analysis Sublimioris; speciminis loco adnexa sunt sequentia problemata.

§. 150.

PROBL. I. *Datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.*

SOL. Si duo quadrati ponantur xx et yy , æquatio $aa = xx + yy$ ostendit, rem perfici posse multis modis, si numeri irrationales non excludantur. Transpositis æquationis terminis, ut fiat $aa - xx = yy$ pariter perspicitur, quomodo quæstionum unus ab altero, atque a numero dato pendeat. Sed quadrati proprie dicuntur, quorum radices numeri rationales sunt, atque hæ plerumque integræ desiderantur, non fractæ. Atque si problema ad hos restringatur, tum demum alicujus momenti fit. Ad æquationem vero accedere debet alia, quæ numerorum quæstionum quemvis rationalem reddat, si alter rationalis sumatur. Rationalis autem est numerus, quicumque ex aliis rationalibus producit per quascunque operationes arithmeticas, si radicum extractio excludatur. Si nimirum x , n et a rationales sint, et integri

tegri, erit $nx + a$ vel $nx - a$ necessario rationalis et integer. Cum ergo numerus rationalis integer ex alio exprimi possit multis modis, ea hic eligetur formula, quae ad aequationem ducat, ex qua facillime perspicitur, qualis sumendus sit numerorum unus, ut alterius forma, fiat ea, quæ quaeritur. Sit primus numerorum quaesitorum x , alter vero, qui dictus fuit y , sit $nx - a$, notante n numerum pro lubitu sumendum; erit $aa = xx + nnx - 2nax + aa$. Ergo $0 = (1 + nn)xx - 2nax$, vel

$$(1 + nn)x = 2na, \text{ et } x = \frac{2na}{1 + nn}.$$

Si jam n rationalis sumatur, et a rationalis erit, et ideo quoque y . Quis autem n assumendus sit, ut x integer prodeat, si quidem aa datus sit, non ita facile adparet, atque proinde tentaminibus relinquentum erit.

PROBL. II. *Invenire duos numeros quadratos, quorum differentia sit itidem numerus quadratus*

SOL. Sit semisumma numerorum x , semidifferentia y , erunt numeri $x + y$ et $x - y$, quorum quadrati sunt $xx + 2xy + yy$ et $xx - 2xy + yy$. Horum itaque differentia xy debet esse numerus quadratus, cujus radix non potest esse numerus impar. Sit itaque $2n$ ista radix, ut fiat $4xy = 4nn$, erit $xy = nn$; ergo quoque xy quadratus erit. Si itaque quadratus quicumque nn assumatur, isque in duos factores resolvatur, qui sumendi sunt pro x et y , potest quaestioni satisfieri.

PROBL. III. *Summam duorum quadratorum in alios duos quadratos solvere.*

SOL. Quadrati dati sunt aa et bb , radices autem quadratorum quaesitorum $x - a$ et $nx - b$, erunt quadrati quaesiti $(x - a)^2$ et $(nx - b)^2$, atque $xx - 2ax + aa + nnx - 2nbx + bb = aa + bb$. Ergo $xx - 2ax + nnx - 2nbx = 0$, vel $x - 2a + nnx - 2nb = 0$, atque $x + nnx = 2nb + 2a$.

$$\text{Ergo } x = \frac{2nb + 2a}{nn + 1}.$$

Poterit ergo quaestioni satisfieri

quocunque numero pro n sumto, modo is non fit unitas. Posito enim $n = 1$, fit $x = b + a$. Ideo numerorum quæstionum is, quis dictus est $x - a$ fit b , atque non solvitur summa quadratorum in quadrata a datis diversa.



SECTIO XI.

DE

SOLVTIONE PROBLEMATVM INDE- TERMINATORVM GEOMETRICA.

§. 151.

Quodsi problema aliquod indeterminatum propositum fuerit geometricum; atque ipsa x repræsentet lineam rectam, etiam functio y repræsentabit lineam rectam, cuius magnitudo pendet ab ipsius x quantitate. Quare si ista variabilis x modo supra exposito repræsentetur per lineam rectam indefinitam BC , in qua abscissæ AP valores positivos et oppositæ Ap valores negativos ipsius x exprimunt; quodsi præterea per singula puncta P vel p ducantur applicatae PM , pm , normales valori functionis y ad singulas AP vel Ap æquales, nimirum supra rectam BC si prodeat y positiva, infra rectam BC autem, si y inveniatur positiva; locus omnium punctorum Mm erit linea quaedam vel recta vel curva in plano anguli APM descripta, cuius natura ex functione y ipsius x perfecte cognoscitur. Quodsi igitur in problemate quodam geometrico locus puncti cuiusdam ut M quaerendus proponatur, atque æquatio problematis fundamentalis sit tantum unica præter y involvens aliam incognitam x , ex qua tanquam data determinanda est $y = PM$; ipsum problema est indeterminatum

tum et locus puncti M indeterminatus. Est enim is locus integra linea, cujus naturam functio y ipsius x exprimit. Generationem igitur problema indeterminatum geometrice construitur assignato communi loco, in quem cadit punctum quæsitum, et qui datur per functionem y variabilis x , si huic variabili valor quicunque determinatus tribuatur. Sed is locus non semper linea est in plano descripta et raro recta. Locus scilicet puncti plane determinatus punctum est, quod semper reperitur, si problema sit determinatum. Si indeterminatum sit problema, locus plerumque est linea in dato plano descripta, recta vel curva, quia problemata pleraque ad figuras in plano describendas restricta sunt. Potest autem locus et superficies esse, vel linea duplicis curvaturae, quae in plano describi non potest, quales sunt omnes, quae in superficie sphaerae describi possunt præter circuli, et infinitae aliae. Superficies autem erit locus, si verbi gratia quaeratur punctum, quod a dato plano dato intervallo distat. Ea enim distantia competit cuilibet puncto plani, dato plano ad datum intervallum paralleli. Sic locus puncti, cujus a puncto dato distantia datur, est superficies sphaerica, siquidem distantia illa non sumenda sit in plano aliquo dato. Si enim in dato plano sumenda sit, locus est peripheria circuli.

§. 152.

Quodsi locus puncti assignetur in aliqua superficie et præterea in alia, quæ priorem illam secatur, locus fit linea, quia superficiei cum superficie nihil commune est præter lineam. Si vero locus puncti in duabus lineis detur, quarum una secatur alteram, locus plane determinatur, punctis linearum infinitis ad unum vel pauca aliquod reductis, in quibus una earum linearum secatur alteram. Sic si construendum sit triangulum rectangulum super data linea recta AB , sic ut angulus rectus lateri illi dato opponatur, atque locus in quem anguli recti apex cadit, sit quaerendus;

rendus; erit is locus semicirculus ACB super datam AB tanquam diametrum descriptus. Puncto in peripheria hujus semicirculi quocunque assumpto, si ab eo rectae ducantur ad A et B, angulus lateri AB oppositus rectus est (§.146. Cor. 3. Geom. Elem.). Problema igitur indeterminatum est, et locus puncti quaesiti indeterminatus, nimirum peripheria ACB, extra quam tamen cadere non potest. *Quodsi super data AB construendum sit triangulum dato quadrato Q aequale, et quaerendus locus, in quem apex anguli basi AB oppositi cadit*; sola trianguli altitudine opus est. Ea autem altitudo sic reperitur. Si AB bifariam diuisa sit apud D, erit rectangulum sub AD et altitudine quaesita triangulo, quod construendum est, hinc et quadrato Q æquale (§.116. Geom. Elem.). Ergo AE ad latus quadrati Q, ut idem hoc latus ad altitudinem quaesitam (§.214. Cor. Geom. Elem.). Quodsi hæc altitudo sit = E, atque ad datam rectam AB ducatur parallela indefinita FG, ab eadem AB intervallo = E distans, erit quodlibet triangulum super AB descriptum, cujus apex cadit in FG, quadrato Q æquale, atque adeo recta FG locus, qui quaerebatur. *Construendum jam sit triangulum super AB, de quo duæ istæ conditiones simul valent*, nimirum primo, ut angulus lateri AB oppositus rectus sit, et secundo, ut triangulum æquale sit quadrato Q, et locus apicis anguli, lateri AB oppositi quaerendus; atque is locus erit determinatus et problema determinatum. Prima conditio exigit, ut apex trianguli cadat in peripheriam ACB, altera eidem locum assignat in recta indefinita FC. Cadet ergo vel in H vel in K, quæ puncta sola peripheriæ cum recta sunt communia, et quodlibet triangulorum AHB et AKB et rectangulum erit, et æquale quadrato Q.

§. 153.

Problemata ista naturam problematis indeterminati ejusque a problemate determinato differentiam satis clare ostendunt, licet ipsæ solutiones pure geometricæ sint, atque

atque ab algebra ipsa subsidii nihil acceperint. Ultimum
 problema, quod erat determinatum solvi poterat re-
 solutione quæstionis propositæ in alias simplices, qua-
 rum quævis erat quidem indeterminata, sed tamen se-
 orsim solvi poterat, et harum solutionum conjunctio-
 ne. Eadem via et algebra incedit, ut ex problematibus
 passim jam propositis adparere debuit. Sed loco linea-
 rum, quibus geometria simplices illas quæstiones, in
 quas problema resolutum est, seorsim solvit, algebra
 æquationibus utitur, quarum quævis uni vel quibusdam
 problematis conditionibus; conjunctæ vero omnibus sa-
 tisfaciunt, atque ita quæsitum plane determinant. Id
 quomodo fiat exemplis iisdem allatis optime declari po-
 test. Ultimi problematis erant duæ conditiones atque
 earum prima hæc erat, Trianguli super AB constru-
 endi angulus latero AB oppositus debet esse rectus. Con-
 structum sit ejusmodi triangulum super AB atque ex api-
 ce M ad basin AB demissa perpendicularis MP, erit ex
 §. 205. Cor. I. Geom. Elem. $AP : PM = PM : PB$. Quo igitur
 huic problematis conditioni satisfiat, inveniendus est
 locus puncti M talis, ut demisso ex eodem ad datam AB
 perpendiculari MR eadem sit media proportionalis inter
 duo segmenta AP et BP rectæ AB. Proinde si AP dica-
 tur x , $PM = y$, $AB = a$ atque adeo $PB = a - x$, erit
 $x : y = y : a - x$, et æquatio uni problematis conditio-
 ni satisfaciens ista $yy = ax - xx$, æquatio pro circulo,
 cujus axis est diameter $= a$, et initium abscissarum pun-
 ctum A diametri extremum. Altera problematis ulti-
 mi conditio erat ista: triangulum super AB constru-
 endum debet quadrato Q æquale esse. Quodsi igitur hu-
 jus quadrati latus ponatur $= b$, erit $\frac{1}{2}ay = bb$, vel $y =$
 $\frac{2bb}{a}$ æquatio pro linea recta axi ad distantiam $\frac{2bb}{a}$
 parallela, quæ alteri problematis conditioni satisfacit.

Duæ igitur æquationes $yy = ax - xx$, et $y = \frac{2bb}{a}$

cunctim suntæ problematis illius completam prae-
bent solutionem. Si enim ad eandem axem AB et idem
initium abscissarum A construatur locus puncti M, quem
indicat æquatio $yy = ax - xx$, et simul locus puncti M
per æquationem $y = \frac{2bb}{a}$ expressus; intersectionum
puncta sunt illa, quæ quærentur.

§. 154.

Intelligitur ex his VETERVM theoria de locis geo-
metricis. Etsi enim ex supra expositis jam pateat, quod
locus puncti indeterminatus possit esse non tantum linea
in plano descripta, sed et curva duplicis curvaturæ, quin
et superficies, eaque vel plana vel curva; tamen VETE-
RES præcipue tantum lineam in plano descriptam et qui-
dem talem, cujus quodlibet punctum æque aptum est ad
resolvendum problema geometricum indeterminatum,
vocabant *locum geometricum*. Lineam rectam et circu-
lum *locos planos* vocabant. Praeter circulum præcipue
curvas intersectione plani cum superficie conica deter-
minatas, si planum secans basi conici non parallelum sit,
considerare et ipsas has curvas *locos solidos* appellare so-
lebant. Generatur superficies conica, recta circa punctum
235. aliquod extra planum circuli positum ita conversa, ut
236. semper per peripheriam ejus circuli transeat. Recta
337. illa ponitur indefinita, ideo duorum conorum apud ver-
ticem oppositorum superficies ita simul oriuntur, quo-
rum communis est axis. Planum autem vel alterutrum
horum conorum tantum secat, vel utrumque. Si per
verticem transeat planum secans, sectionem fore angu-
lum aliquem planum rectilineum, ultro patet; circulum
autem fore sectionem, quæcunque fit per planum basi
conici, vel circulo illi, circa quem superficies conica pri-
mum descriptæ est, parallelum, demonstratum est §. 343.
Geom. Elem. Istæ igitur sectiones præcipue sunt confi-
derandæ, quarum plana neque per verticem transeunt,
ne-

neque basi parallela sunt. Sit APM planum sectionis, et HMG planum circuli basi coni paralleli, quod a plano APM in recta PM secatur. Erit PM si producat, una ex chordis circuli HMG. Sit hæc chorda bifariam in puncto P divisa, atque conus etiam per axem suum atque per punctum P sectus plano CDE, quod planum circuli GMH secet in GH. Erit GH circuli diameter chordæ PM perpendicularis (§. 120. *Geom. Elem.*). Idem planum CDE etiam planum sectionis APM secabit in AP, quæ vel parallela erit lateri CD *Fig.*²³⁵~~10~~, et curva AM dicetur *Parabola*; vel secabit illud versus coni verticem C productum in I, *Fig.*²³⁶~~11~~, quo casu curva AM, quæ producit, *Hyperbola* dicta est; vel occurret eidem in oppositam partem D producto apud I *Fig.*²³⁷~~12~~, et curva AM, in qua planum APM secat conicam superficiem, *Ellipsis* vocabitur. Plures tribus istis casibus esse non possunt. Recta igitur AP parabolæ in unico tantum puncto A occurrit, Hyperbolæ vero et Ellipsi in duobus punctis A et I. Puncta illa, in quibus recta AP producta Sectionem conicam secat, dicuntur *vertices* sectionis, quorum igitur duo sunt in Hyperbola et Ellipsi, unicum tantum in Parabola. Ipsa recta AP producta, intra vertices Hyperbolæ et Ellipseos cadens et per unicum parabolæ verticem transiens, harum Sectionum *Latus transversum* vocatur.

§. 155.

Quodcunque planum ut GMH sumatur basi coni parallelum, erit semper GMH semicirculus et recta MP diametro GH perpendicularis (§. 234. *Cor. I. Geom. Elem.*) quia omnes GH ita productæ ut et omnes PM parallelae sunt (§. 243. *Geom. Elem.*). Est igitur in semicirculo $PMq = GP \times PH$. Ponatur $PM = y$, $AP = x$, sintque AF et IK diametro GH parallelæ. Erit in figura ²³⁸~~10~~.

$$\begin{aligned}
 CF : FA = AP : PH, \text{ ideoque } PH &= \frac{FA}{CF} x. \text{ Sed } GP \\
 &= FA,
 \end{aligned}$$

$= FA$, ergo $PH = \frac{GP}{CF} x$. Hoc valore in $PMq =$

$GP \times PH$ substituto, erit $yy = \frac{GP^2}{CF} x$. Ideo quadra-

tum semiordinatae in Parabola æquale est rectangulo sub abscissa et recta constante ad CF et GP tertia proportionali, quæ Parabolæ *latus rectum* sive *parameter* vocatur. Idem igitur parameter est tertia proportionalis ad abscissam x et adplicatam y , quare illud geometricè in parabola invenitur, ducta adplicata quacunque PM , abscissa

Fig. 228. AQ huic adplicatæ PM æquali facta, et per Q ducta recta QN adplicatæ PM parallela. Cum enim, ducta recta AM eaque producta, donec ipsi QN occurrat in N , fiat

$AP(x) : PM(y) = AQ(y) : QN$, erit $QN = \frac{yy}{x}$. Po-

natur $QN = p$, erit $p = \frac{yy}{x}$, vel $yy = px$ æquatio ex-

primens naturam parabolæ abscissis super latus transuersum et vertice A tanquam initio computatis.

§. 156.

In Hyperbola et Ellipfi *Fig. 236 et 237.* est $AI : AP = IK : PH$, et $AI : PI = AF : PG$. Quare est $PH =$

$\frac{IK \times AP}{AI}$ et $PG = \frac{AF \times PI}{AI}$. Quodsi igitur ponatur

$AP = x$, $PM = y$, $AI = a$, fiat in Hyperbola $PI = a + x$ et in Ellipfi $PI = a - x$. His valoribus substitutis

in $PMq = PG \times PH$ fiet $yy = \frac{IK \times AF}{a} \times \frac{ax + xx}{a} =$

$\frac{IK \times AF}{a} x + \frac{IK \times AF}{a} \cdot \frac{xx}{a}$ et quidem in hyperbola;

in ellipfi vero est $yy = \frac{IK \times AF}{a} \times \frac{ax - xx}{a} = \frac{IK \times AF}{a}$

$x -$

$x = \frac{IK \times AF}{a} \cdot \frac{xx}{a}$. Proinde in hyperbola est qua-

dratum adplicatae y æquale rectangulo ex recta quadam constante, quæ ad rectas AI, IK et AF est quarta pro-

portionalis, in abscissam, una cum alio rectangulo ex ea-
dem abscissam in quartam proportionalem ad latus trans-

versum AI, constantem $\frac{IK \times AF}{a}$ et abscissam. In El-

lipfi vero quadratum femiordinatae y est æquale differen-

tiae eorundem rectangulorum. Quodsi ideo constans illa
 $\frac{IK \times AF}{a}$, quæ harum sectionum *parameter* seu *latus re-*

ctum dicitur, ponatur $= p$, erit $yy = px \pm \frac{pxx}{a}$ æ-
quatio generalis pro ellipsi et hyperbola, abscissis su-

per latus transversum a vertice tanquam initio com-

putatis et angulo coordinatarum recto, in qua æqua-

tione signi ambigui $\pm$ superius pro hyperbola et in-

ferius pro ellipsi valet. Terminis illius æquatio-

nis legitime transpositis fit $p = \frac{ayy}{x(a \pm x)}$. Ideo

latus rectum in hyperbola et ellipsi data geometricè in-

veniri potest sequentem in modum. Ducatur femior-

F. 238.
239.

dinata rectangula quæcunque MP ad latus transversum,
et capiatur AQ = PM, quo facto, si per Q ducatur QN
ipsi PM parallela, occurrens rectae AM in N, erit AP(x)
: PM(y) = AQ(y) : QN = $\frac{yy}{x}$. Prolongetur PM
in R ita, ut fit PR = QN = $\frac{yy}{x}$. Per puncta I et R
ducatur recta occurrens rectae AS per verticem applica-
tae PM parallelam ductæ in puncto S, eritque IP($a \pm x$)
: PR

$$: PR \left(\frac{yy}{x} \right) = IA(a) : AS. \quad \text{Quare est } AS$$

$$= \frac{a yy}{x(a+x)} \text{ parameter sectionis quæsitus.}$$

§. 157.

Tres istæ æquationes pro sectionibus conicis.

$$yy = px$$

$$yy = px + \frac{p x x}{a}$$

$$yy = px - \frac{p x x}{a}$$

non differunt nisi positione et magnitudine lateris transversi $a = AI$. Si enim in ellipsi hoc latus transversum positum fuerit affirmativum, in hyperbola illud negativum evadit, quia cadit ad partem oppositam. Scripto

autem in æquatione $yy = px - \frac{p x x}{a}$ loco $+ a$ jam $- a$

fit $yy = px + \frac{p x x}{a}$, quæ est æquatio pro hyperbola.

Poterat vero $+ a$ positiva in statum oppositum $- a$ non pervenire, nisi angulo GPI inclinationis plani sectionis AMI ad planum circuli GMH basi paralleli sensim crescente, in casu quo GPI fit angulus rectus, latus transversum AI cum coni latere CD parallelum adeoque infinitum evadat. Tum vero ellipsis degenerat in parabola

et simul æquatio $yy = px - \frac{p x x}{a}$, si $a = \infty$

fit $yy = px$. Quin et expressio parametri $\frac{a yy}{x(a+x)}$,

quia jam $a = \infty$, mutatur in sequentem $\frac{yy}{x}$.

§. 158.

§. 158.

Considerabimus nunc planum sectionis conicæ so-^{F.238.}
litarium et veluti cono exemptum, atque ex æquatione^{239.}
pro qualibet harum sectionum deducemus palmarias
quasdam harum curvarum proprietates. Ac primo qui-
dem æquatio pro hyperbolis et ellipsi $ayy = pax \pm pxx$
sequentem dat analogiam $yy : ax + xx = p : a$. Sed est
 $ax \pm xx = x(a \pm x) =$ rectangulo sub abscissis AP et
IP, proinde in hyperbolis et ellipsi est *quadratum semi-*
ordinate ad rectangulum sub abscissis respondentibus, ut pa-
rameter ad latus transversum. Quodsi latus ellip-^{F.240.}
seos transversum AB bissectum intelligatur apud C, at-
que per C ducatur ordinatim applicata orthogona-
lis DE, dicitur punctum C ellipseos *centrum*, atque
ED *latus conjugatum*, five *axis conjugatus*. Loco para-
metri in æquationem ellipseos introduci potest hæc con-
stans DE, quo facto eadem aliam recipit formam, quæ
commodiorem nonnunquam reddit calculum. Eum in
finem ponamus nunc AC = CB = a et CD = CE = b ,
ut jam sit AB = $2a$, et æquatio ellipsis nunc erit $yy = px$
 $- \frac{pxx}{2a}$, atque cum posito $x = AC = a$, fiat $y = \sqrt{\frac{1}{2}pa}$
 $= CE$, ponatur CE = b , et fiet $bb = \frac{1}{2}pa$, hincque
 $p = \frac{2bb}{a}$. Substituto hoc valore pro p , habemus pro

ellipsi æquationem sequentem $yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$.

Æquatio $bb = pa - \frac{paa}{2a}$, vel $2abb = 2paa - paa$

sequentem præbet analogiam $p : 2a = bb : aa$, id est, *pa-*
rameter ellipseos est ad latus transversum, ut quadratum
semiaxis conjugati ad quadratum semilateris transversæ.
Ipse hæc analogia cum præcedente comparata dat ter-
tiam, : quadratum semiordinate yy est ad rectangu-
lum
Ff lum

lum sub abscissis respondentibus $x(2a-x)$ ut quadratum femiaxis conjugati bb ad quadratum femiaxis transversi aa . Multiplicatis mediis et extremis habebitur ipsa illa

$$\text{æquatio } aayy = (2ax - xx)bb, \text{ vel } yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx.$$

Denique ex æquatione $p = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a}$ deduci-

tur $2a : 2b = 2b : p$, proinde *parameter ellipseos est tertia proportionalis ad axem transversum et conjugatum; et axis conjugatus inter transversum axem et parametrum proportionem media.*

§. 159.

§.239. Latus hyperbolarum transversum AI instar lateris transversi ellipseos bissectum quidem intelligi potest in puncto C, quod et hic *centrum hyperbolarum* dicitur; sed vero si per hoc punctum duci intelligatur ordinata rectangula, haec nusquam hyperbolis occurrere potest, ideo hyperbolae non istar ellipseos habebunt axem conju-

gatum. Idem et ex æquatione $yy = px + \frac{p^2x^2}{2a}$ pro hy-

perbolis eruitur. Ponendo enim $x = -a$, habemus $y = r - \frac{1}{2}pa$, quae est quantitas imaginaria. Sit haec quantitas $r - \frac{1}{2}pa = br - 1$, atque exinde concludetur $-\frac{1}{2}pa = -bb$, vel $\frac{1}{2}pa = bb$, unde in hyperbola

quoque est $p = \frac{2bb}{a}$, et substituto hoc valore fit æqua-

tio pro hyperbolis $yy = \frac{2bb}{a}x + \frac{bb}{aa}xx$, quæ quidem

ex æquatione pro ellipfi $yy = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$ poterat

elici loco $+bb$ scribendo $-bb$, atque ideo erit $yy = \frac{2bb}{a}x \pm \frac{bb}{aa}xx$ æquatio generalis pro ellipfi et hyper-

bolis

bolis, in qua signi dubii $\pm$ superius pro hyperbolis inferius vero pro ellipsi valet. Quodsi abscissæ a centro C tanquam initio computentur in ellipsi et hyperbolis, ita ut non amplius AP sit abscissa, sed CP, in ellipsi fit $AP = a - x$, et in hyperbolis $AP = x - a$, quare si in

æquatione $yy = \frac{2bb}{a}x + \frac{bb}{aa}xx$ loco x scribatur x

$- a$, erit $yy = \frac{2bb}{a}(x - a) + \frac{bb}{aa}(x - a)^2 = \frac{2bb}{a}x -$

$\frac{2bb}{a} + \frac{bb}{aa}xx - \frac{2bb}{a}x + bb = -bb + \frac{bb}{aa}xx$, æqua-

tio pro hyperbolis: si vero in æquatione $yy = \frac{2bb}{a}x -$

$\frac{bb}{aa}xx$ scribatur $a - x$ loco x , fiet $yy = \frac{2bb}{a}(a - x) -$

$\frac{bb}{aa}(a - x)^2 = 2bb - \frac{2bb}{a}x - bb + \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}$

$xx = bb - \frac{bb}{aa}xx$, æquatio pro ellipsi abscissis in axe

transverso a centro computatis. Aequatio pro hyperbola introducendo parametrum fit $yy = -\frac{1}{2}ap + \frac{p}{2a}xx$; atque æquatio pro ellipsi facta hac substitutione

sic mutatur $yy = \frac{1}{2}ap - \frac{p}{2a}xx$.

§. 160.

Si abscissæ a centro in axe conjugato computentur, atque ponatur $CG = x$ et $GM = y$, ex æquatione pro ellipsi fit $aaxx = aabb - bbyy$, vel $bbyy = aabb - aaxx$,

et $yy = aa - \frac{aa}{bb}xx = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$. Eadem per-

mutatione coordinatarum facta ex æquatione pro hyper-

bola fit $yy = \frac{aa}{bb} (\mp bb + \pm xx)$. Tertia proportionalis ad latus conjugatum et latus transversum hic quoque vocatur *parameter lateris* five *axis conjugati*. Fit vero ex

analogia $2b : 2a = 2a : \frac{2aa}{b}$, iste parameter $= \frac{2aa}{b}$, qui

si dicatur q , erit $q = \frac{2aa}{b}$ et $\frac{q}{2b} = \frac{aa}{bb}$. Introdu-

cendo itaque parametrum axis conjugati, aequationes in-

ventae pro ellipsi et hyperbola sic mutantur $yy = \frac{q}{2b}$

$(bb - \mp xx)$ atque $yy = \frac{q}{2b} (\mp bb + xx)$, vel $yy = \frac{qb}{2}$

$- \frac{q}{2b} \mp xx$, atque $yy = \mp \frac{qb}{2} + \frac{q}{2b} xx$, unde fluunt

proprietates semiordinatarum, super axe conjugato sumtis abscissis, prorsus similes iis, quæ de semiordinatis lateris transversi sunt demonstratae.

§. 161.

Focus sectionis conicæ est punctum axis, in quo semiordinata aequalis est semilateri recto. Ad hoc punctum primo in Ellipsi inveniendum, ponatur $y = \frac{1}{2}p$, ut sit

$\frac{1}{4}pp = px - \frac{p^2xx}{2a}$, et ex hac aequatione concluditur,

esse $\frac{1}{2}app = 2apx - p^2xx$, five $xx - 2ax = -\frac{1}{2}ap$,

hincque $xx - 2ax + aa = aa - \frac{1}{2}ap$, $x - a = \pm$

$\sqrt{aa - \frac{1}{2}ap}$, et $x = a \pm \sqrt{aa - \frac{1}{2}ap}$. Ellip-

sis igitur duplicem habet focum, unum in distan-

tia $a - \sqrt{aa - \frac{1}{2}ap}$ et alterum in distantia $a + \sqrt{aa -$

$\frac{1}{2}ap$) a vertice. Eadem formula simul indicat distantiam

utriusque foci a centro. Quilibet enim focus a centro

distantia $\sqrt{aa - \frac{1}{2}ap}$, seu ponendo $\frac{2bb}{a}$ loco p , distan-

tia

tia $\sqrt{aa-bb}$ removetur. Data igitur ellipfi cum la-F.240.
 tere transverso inveniri possunt foci, si per centrum C
 ducatur axis conjungatus DE, atque ex uno ipsius pun-
 cto extremo radio $a = AC$ describatur circulus, qui se-
 cabit latus transversum AB in F et f , atque haec puncta
 erunt foci. Quia enim jam est $CF = Cf = \sqrt{aa-bb}$,
 fit $AF = a - \sqrt{aa-bb}$ et $Af = a + \sqrt{aa-bb}$. Quod-
 si in hyperbola ponamus $y = \frac{1}{2}p$ habemus $\frac{1}{4}pp = px +$
 $\frac{p^2x}{2a}$, et proinde $xx + 2ax + aa = aa + \frac{1}{2}ap$, ex quae
 aequatione deducitur $x = -a \pm \sqrt{aa + \frac{1}{2}ap} = -a$
 $\pm \sqrt{aa+bb}$. Hinc et hyperbolae duplicem habent
 focum, qui invenitur ducta CD per centrum C ad axem
 hyperbolae transversum normali, et capiendo $CD =$
 $CE = \sqrt{aa + \frac{1}{2}pa}$ quae erit ^{inter} $\frac{1}{2}p$ et AC ^{media} ~~tertia~~ proportio-
 nalis. His ita praeparatis erit $AD = \sqrt{aa+bb}$. Quod-
 si igitur ex C tanquam centro radio $= AD$ describatur
 circulus latus hyperbolarum transversum secans in F et
 f , erunt F et f foci quaesiti, quia jam $AF = -AC + CF$
 $= -a + \sqrt{aa+bb}$ et $Af = -AC - Cf = -a - \sqrt{aa$
 $+ bb}$. Quod denique attinet ad parabolam, si in ae-
 quatione $yy = px$ loco y ponatur $\frac{1}{2}p$, invenitur $\frac{1}{4}pp =$
 px , adeoque $x = \frac{1}{4}p$. Parabola igitur unicuique tantum
 habet focum a vertice intervallo $\frac{1}{4}p$ distantem.

§. 162.

Ex quolibet ellipsis foco F et f ad idem curvae pun-
 ctum M ducantur rectae FM et fM ; eritque $FM^2 =$
 $(CF - CP)^2 + PM^2$, atque $fM^2 = (fC + CP)^2 + PM^2$.
 Abscissis igitur a centro in axe transverso computatis, po-
 sitis $CP = x$, $PM = y$ et $CF = Cf = f$; erit $FM = ff$
 $- 2fx + xx + yy$, atque $fM^2 = ff + 2fx + xx + yy$, id est,
 valore ipsius yy substituto $FM^2 = ff - 2fx + xx + bb$
 $- \frac{bbxx}{aa}$ et $fM^2 = ff + 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$. Est ve-

$$\text{I} \text{O } xx - \frac{b!xx}{aa} = \frac{aaxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} = \frac{(aa-bb)xx}{aa}; \text{ proin-}$$

$$\text{de } FM^2 = ff - 2fx + bb + \frac{(aa-bb)xx}{aa} \text{ et } fM^2 = ff$$

$$+ 2fx + bb + \frac{(aa-bb)xx}{aa}. \text{ Denique est } f = r(aa -$$

$$bb); \text{ ideo } FM^2 = aa - 2xr(aa-bb) + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$$

$$\text{et } fM^2 = \overset{a}{2}a + 2xr(aa-bb) + \frac{(aa-bb)xx}{aa}. \text{ Unde}$$

$$\text{concluditur } FM = a - \frac{xr(aa-bb)}{a} \text{ atque } fM = a +$$

$$\frac{xr(aa-bb)}{a}. \text{ Summa itaque harum rectarum } FM +$$

fM est $= 2a = \text{axi transverso}$. Ex qua focorum insigni proprietate modus facilis ellipsin mechanice describendi colligitur. Pro hyperbola (fig. 239.) est $CF =$

$$Cf = r(aa+bb) \text{ et } yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}. \text{ Hinc simili}$$

$$\text{calculo invenitur } FM = \frac{xr(aa+bb)}{a} - a, \text{ et } M$$

$$= \frac{xr(aa+bb)}{a} + a. \text{ Ideo in hyperbola est } fM -$$

$$FM = 2a = \text{axi transverso}.$$

§. 163.

Praeter conicas sectiones nonnullae aliae quidem curvæ consideratae fuerunt ab *Antiquis Geometriae Doctores* ab ipsis *loca linearia* vocatae. Recentiores vero Geometrae, postquam Analysis Mathematica adeo felici successu ad Geometriam fuit applicata, non tantum ipsa Veterum in Geometria curvarum inventa demonstrarunt facilius, sed et novis iisque admiratione maxima dignis eandem locupletati sunt

sunt inventis. Supra jam vidimus, quod omnis aequatio algebraica inter variables x et y repraesentet curvam aliquam continuam, seu cum *Antiquis* loquendo, locum aliquem geometricum, problemati cuidam geometrico indeterminato construendo inservientem. Algebraicae autem aequationes distribuuntur in ordines secundum numerum dimensionum maximae potestatis incognitae. Ideo loco divisionis locorum geometricorum in planos solidos et lineares Recentiores Geometrae locos geometricos seu curvas continuas in plano descriptas distribuunt in diversos ordines secundum ordinem aequationis curvae naturam exprimentis. In ordinibus vero aequationum, quibus lineae algebraicae exprimuntur, constituendis unaquaeque variabilis censetur unam dimensionem constituere. Sic quadratum uniuscujusque atque productum ex duabus duas, productum ex tribus variabilibus sive iisdem sive diversis habet tres dimensiones, et sic porro. (§. 121.) Proinde aequatio dicitur *primi ordinis*, quae si pro y ubique scribatur x , vel y pro x fit aequatio determinata primi ordinis; aequatio secundi ordinis vocatur, quae simili substitutione fit aequatio determinata secundi ordinis, et ita porro. Linea vero per aequationem primi ordinis definita et ipsa *linea primi ordinis*, seu *locus geometricus primi ordinis*; linea per aequationem secundi ordinis definita *linea* vel *locus secundi ordinis* dicitur, et reliquae eodem modo distribuuntur.

§. 164.

Aequatio igitur indeterminata primi ordinis erit, in qua praeter terminum constantem a insunt βx et γy vel conjunctim, vel seorsum. Secundi ordinis aequatio praeter constantem a et βx , γy , continebit δx^2 , ϵxy , ζy^2 vel conjunctim, vel aliquem horum terminorum aut aliquos seorsum. Terti ordinis aequatio eadem continere poterit, quae admittit aequatio ordinis secundi, habebit autem praeterea horum terminorum ηx^3 , $\theta x^2 y$,

ixy^2 , ky^3 , vel unum, vel aliquos, vel omnes. Proinde si quantitates istae ordine sequente scribantur:

I. a

II. βx , γy

III. δx^2 , εxy , ζy^2

IV. ηx^3 , $\theta x^2 y$, ixy^2 , κy^3

V. λx^4 , $\mu x^3 y$, $\nu x^2 y^2$, ρxy^3 , σy^4

aequatio indeterminata primi ordinis necessario continebit aliquas quantitates seriei II, aequatio secundi ordinis aliquam vel aliquas quantitates seriei III habebit, aequatio ordinis tertii aliquam vel aliquas quantitates vel omnes ex serie IV, et ita porro. Quaelibet etiam ex antecedentibus seriebus quantitates quascunque adsciscere poterit, sed nullam ex consequentibus. Possunt itaque termini aequationis duarum variabilium indeterminatae ordinari modo sequenti

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & a & & \\
 & & & & \hline
 & & & \beta x & | & \gamma y & \\
 & & & \hline
 & & \delta x^2 & | & \varepsilon xy & | & \zeta y^2 \\
 & & \hline
 \eta x^3 & | & \theta x^2 y & | & ix y^2 & | & \kappa y^3 \\
 & & \hline
 \lambda x^4 & | & \mu x^3 y & | & \nu x^2 y^2 & | & \rho xy^3 & | & \sigma y^4 \\
 \text{etc.} & & & & & & & & \text{etc.}
 \end{array}$$

per modum *trianguli*, quod *analyticum* vocatur, ubi omnes termini in serie horizontali habent easdem dimensiones. Possunt quoque cum Neutono ordinari per modum *parallelogrammi*,

a	βx	δx^2	ηx^3	λx^4	etc.
γy	εxy	$\theta x^2 y$	$\beta x^3 y$	$\tau x^4 y$	etc.
ζy^2	$ix y^2$	$\nu x^2 y^2$	$\phi x^3 y^2$	$\chi x^4 y^2$	etc.
κy^3	ρxy^3	$\psi x^2 y^3$	$\omega x^3 y^3$	$\xi x^4 y^3$	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

quod

quod pariter *analyticum* dici solet, ubi in quavis serie verticali collocati sunt termini, in quibus x eandem habet dimensionem. Trianguli figura præstat fere præ parallelogrammi figura. Optime enim dividitur æquatio in series, prouti in triangulo analytico horizontales seinvicem excipiunt, quarum quælibet *membrum* æquationis vocari potest, atque tum ipsa hæc membra, quia sunt functiones homogeneae duarum variabilium x et y secundum numerum dimensionum a se invicem distinguï possunt. Cæterum in omni linea algebraica per æquationem expressa data supponuntur 1. abscissarum initium, 2. positio axis, 3. angulus coordinatarum; si manente eadem linea aliquod horum vel duo, vel omnia mutantur, alias atque alias pro eadem linea æquationes prodire necesse est, cujus rei specimina eaque facilia supra jam vidimus. Easdem vero mutationes, quas subit æquatio pro linea algebraica, si referatur ad alias coordinatas distinctius jam considerare juvabit. Pro linea in posterum sæpe curva nominabitur, quamvis rectam quoque intelligere liceat, quia curvarum numerus multo potior est, rectæ autem et absque iis, quæ curvarum declarationi intervniunt, facile intelliguntur.

§. 165.

Quodsi igitur data sit æquatio quæcunque inter x F.241. et y , per quam, sumpta recta BC pro axe et puncto A pro initio abscissarum, ita ut x denotet abscissam AP et y applicatam orthogonalem PM, exprimitur natura curvæ DM; retineamus primo eundem axem BC, at aliud punctum D in eodem assumamus pro initio abscissarum; ita ut nunc puncto curvæ M respondeat abscissa DP, quæ ponatur $= t$, et applicata manebit eadem PM, quæ ante. Ponatur intervallum AD $= f$, quod ab A sinistrorsum in regionem abscissarum negativarum cadat, eritque DP $= x + f = t$, ideoque $x = t - f$. Quare si in æquatione inter x et y data ubique loco x substitua-

tur $t - f$, prodibit æquatio inter variables t et u , quæ eandem lineam curvam exhibebit. Quodsi novum initium abscissarum dextrorsum ab A fuerit remotum uti in d , atque nunc etiam ponatur $Pd = t$, et $Ad = f$, erit $Pd = t = x - f$, hincque $x = t + f$, qui est valor pro x in curvæ æquatione substituendus, ut prodeat æquatio inter variables t et y eandem curvam definiens. Initium ergo abscissarum retento axe mutabitur, si abscissa x determinata quantitate augeatur vel minuatur, adeoque x ponatur $= t \pm f$, ubi f erit quantitas affirmativa, si novum abscissarum initium sinistrorsum ab A fuerit remotum; quantitas vero negativa, si novum initium abscissarum ad dextram ipsius A fuerit situm.

§. 166.

F.242.

Assumamus jam alium axem bc priori parallelum, in eoque punctum quodcunque D pro abscissarum initio. Cadat iste axis in regionem applicatarum negativarum, sitque ejus a priori distantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $FD = AG = f$. Quodsi igitur in hoc novo axe sit abscissa curvæ puncto M respondens $DQ = t$, et applicata $QM = u$; erit $DQ = t = DF + FQ = x + f$, et $QM = u = PQ + PM = g + y$. Unde concluditur $x = t - f$ et $y = u - g$. Quare si in æquatione data inter x et y substituatur ubique $t - f$ loco x et $u - g$ loco y , orietur æquatio inter variables t et u ejusdem curvæ naturam exprimens. Quando punctum D dextrorsum ab F fuerit remotum, erit $DQ = t = x - f$, adeoque $x = t + f$. Quando vero novus axis bc in regionem applicatarum positivarum caderet, haberemus $QM = y - g = u$, hincque $y = u + g$. Innuberabiles igitur jam formari possunt æquationes diversæ, quæ tamen omnes ejusdem lineæ curvæ naturam exprimunt.

§. 167.

F.243.

Quodsi novus axis bc priorem BC secet in ipso initio abscissarum A et quidem ad angulus rectos, ita ut pro
utro-

utroque idem punctum A sit initium abscissarum; ex
 curvæ puncto M in novum axem bc ducatur perpendicu-
 laris MQ , et vocetur nova abscissa $AQ = t$, applicata
 nova $QM = u$, eritque $t = y$, et $u = x$, quia $APMQ$
 est parallelogrammum rectangulum. Hinc ex æquatio-
 ne inter $AP (x)$ et $PM (y)$ data formabitur æquatio in-
 ter $AQ (t)$ et $QM (u)$ ponendo u loco x , et t loco y .
 Prior ergo abscissa x abit in applicatam u , et prior ap-
 plicata y nunc fit abscissa t . Pro isto itaque novo axe
 nulla alia æquationi variatio inducitur, nisi quod coor-
 dinatæ x et y inter se commutentur. Perinde est,
 utrum novi axis portio Ac abscissas affirmativas et ideo
 portio Ab abscissas negativas exhibere ponatur, an vero
 contrarium statuatur. Perinde quoque est, ad quam
 partem axis bc statuatur regio adplicatarum positivarum.
 Si axis portio Ac abscissis positivis destinetur, erit AQ
 $= -t$, ficque in æquatione inter x et y loco y poni de-
 bet $-t$. Deinde si supra axem bc regio applicatarum
 negativarum statuatur, fiet $QM = -u$, atque pro x
 scribendum erit $-u$.

§. 163.

Sit angulus, sub quo novus axis bc priorem BC F. 144.
 fecat, obliquus quicunque, atque intersectio fiat in pun-
 cto A , quod in utroque axe sit abscissarum initium. Præ-
 terea data sit æquatio quæcunque pro curva LM relata
 ad axem BC inter abscissam $AP = x$ et applicatam PM
 $= y$, ex qua reperiri debeat æquatio pro eadem curva
 ad axem bc relata, seu ex curvæ puncto M ad novum
 axem demisso perpendiculo MQ , inter abscissam novam
 $AQ = t$ et applicatam $MQ = u$. Sit angulus $CAc = q$,
 et ex P ducantur normales Pp et Pq in novas coordinatas,
 eritque ob $AP = x$, $Pp = x \sin q$, $Ap = x \cos. q$, posito radio
 $= 1$, quod semper fieri solet (§. 38.). Deinde in triangulis
 PMR et AQR est angulus $MPR = AQR$, $ARQ = PRM$,
 ideoque $PMR = RAQ$ vel $CAc = q$, proinde $Pq = Qp$
 $= y \sin q$, et $Mq = y \cos. q$. Ex his concluditur AQ
 $= t$

$= t = Ap - Qp = x \cos. q - y \sin. q$, et $QM = Mq + Pp = x \sin. q + y \cos. q$. Ponatur $\sin. q = m$ et $\cos. q = n$, erit $t = nx - my$, et $u = mx + ny$, et ex his concluditur $nt + mu = nmx + mmx = x$ et $nu - mt = nny + mmy = y$ (§. 39.). Reperitur igitur æquatio quæ sita inter t et u , si in æquatione inter x et y proposita ubique loco x scribatur $mu + nt$, et $nu - mt$ loco y , si nimirum axis portio Ac abscissas affirmativas contineat, et applicatae affirmativæ in regionem QM cadant. Angulus CAC in figura nostra cadit in regionem applicatarum negativarum. Quodsi is caderet supra AC ipse angulus q negativus ac propterea ejus sinus m negative accipi deberet.

§. 169.

F. 245.

Quodsi denique novus axis bc habeat positionem quamcunque, in eoque sumtum sit punctum D quodcunque pro initio abscissarum; demittatur ex quovis curvæ puncto M in novum axem bc perpendicularum MQ , et vocetur abscissa $DQ = t$, applicata $QM = u$. Præterea ex novo abscissarum initio D in axem priorem BC ducatur perpendicularis DG , ac ponatur $AG = f$ et $DG = g$, tum vero per D ducatur Dc axi priori Bc parallela, cui prior applicata MP producta occurrat in O ; et erit $MO = y + g$, $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, ejus sinus $= m$ et cosinus $= n$ posito radio $= 1$, atque ex puncto O ducantur tam in novum axem bc , quam in applicatam MQ normales Op et Oq ; erit angulus $OMQ = ODQ = q$, $Op = Oq = (x + f) \sin. q = mx + mf$ et $Dp = (x + f) \cos. q = nx + nf$ præterea $Oq = Qp = (y + g) \sin. q = my + mg$ et $Mq = (y + g) \cos. q = ny + ng$. Ex his colligitur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ et $QM = u = mx + mf + ny + ng$, et ex his porro $x = mu + nt - f$ et $y = nu - mt - g$. Si igitur hi valores in æquatione inter x et y data substituantur, prodibit æquatio inter t et u eandem curvam LM exprimens. Quoniam nullus excogitari potest

potest axis bc , qui non in hac postrema determinatione contineatur; pro eadem quoque curva LM nulla existet æquatio inter coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter t et u inventa comprehendatur. Hæc est ratio, cur ista æquatio inter t et u vocari solet æquatio generalis pro curva LM , quoniam ea in se complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

§. 170.

Assumimus huc usque, coordinatas, quibus natura curvæ definitur inter se esse normales. f. 246. Data vero sit pro curva LM æquatio inter coordinatas rectangulas $AP = x$ et $PM = y$, et quæri poterit, retento axe BC et abscissarum initio A eodem, æquatio inter coordinatas obliquangulas quascunque. Ex puncto enim M ad axem BC ducatur recta MQ sub angulo quocunque MQA , qui sit $= \phi$, ejus sinus $= \mu$ et cosinus $= \nu$. Jam erit AQ nova abscissa et QM nova adplicata. Posito igitur $AQ = t$ et $QM = u$ erit in triangulo rectangulo PMQ

$$\frac{y}{u} = \mu \text{ et } \frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t - x}{u}. \text{ Proinde fiet } u =$$

$$\frac{y}{\mu} \text{ et } t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x, \text{ et vicissim } y = \mu u \text{ et } x = t - \nu u.$$

Quare si in æquatione inter x et y proposita ponatur $x = t - \nu u$ et $y = \mu u$ prodibit æquatio inter coordinatas obliquangulas t et u , quæ inter se datum angulum ϕ constituunt. Quodsi autem data fuerit pro curva LM æquatio inter coordinatas obliquangulas AQ et QM , ex ea vicissim reperietur æquatio pro eadem curva inter coordinatas orthogonales AP et PM . Si enim ϕ sit angulus, quem applicatæ MQ cum abscissis AQ constituunt, cujus sinus $= \mu$ et cosinus $= \nu$, dataque sit æquatio inter $AQ = t$ et $QM = u$; ex M ducatur ad axem applicata normalis MP , et posita abscissa

AP

$AP = x$, et applicata $PM = y$, erit $u = \frac{y}{\mu}$ et $t = \frac{vy}{\mu} + x$. Quare si valores isti in æquatione inter t et u proposita substituantur, prodibit æquatio inter x et y , quam quærebamus.

§. 171.

F.247. Ex his omnibus conjunctim sumtis perspicitur, quod data æquatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro curva LM , ex illa *æquatio generalissima* pro eadem linea curva ad quamcunque axem et abscissarum initium sub angulo coordinatarum quocunque relata possit inveniri. Sumatur enim recta quæcunque bc pro axe et in eo punctum D pro initio abscissarum; applicata vero MT ad hunc axem ductæ cum axe comprehendant angulum quemcunque $DTM = \phi$, cujus sinus sit $= \mu$ et cosinus $= \nu$, ita ut sit DT nova abscissa $= r$ et TM nova applicata $= s$. Ex D in axem priorem BC ducatur perpendicularis DG et ponatur $AG = f$, $DG = g$. Ducatur DO axi BC parallela, sitque anguli ODE sinus $= m$ et cosinus $= n$. Ex M ad axem novum bc ducatur normalis MQ , et ponatur $DQ = t$, $QM = u$. Erit igitur primo $t = r - \nu s$ et $u = \mu s$. Deinde vero est $x = mu + nt - f$ et $y = nu - mt - g$. Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ et $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$. Proinde si in æquatione inter x et y substituantur valores inventi, reperietur æquatio inter coordinatas obliquangulas r et s , quæ erit æquatio generalissima pro curva LM .

§. 172.

Patet igitur generaliter, quod duæ æquationes propositæ, una inter variables x et y , et altera inter variables t et u vel r et s , diversas curvas non definiant, si una earum mutari possit in alteram, substitutis pro x et y valoribus, quos huc usque elicuimus. Consideran-
ti

ti autem has mutationum formulas statim innotescit, per nullam illarum mutari posse ordinem æquationis, per quam linea exprimitur, vel ipsius lineæ ordinem. In nulla enim formularum novæ variabiles t et u vel r et s ultra primam dignitatem ascendunt, quare non tantum æquatio generalis sed et æquatio generalissima pro eadem linea ejusdem est ordinis, cujus erat æquatio proposita inter x et y . Quomocunque igitur æquatio ad eandem curvam transformetur, mutatis utcunque tam axe, et abscissarum initio, quam angulo coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejusdem erit ordinis. Licet igitur æquatio inter coordinatas sive orthogonales sive obliquangulas innumerabilibus modis variari possit, ita ut ad eandem perpetuo curvam pertineat; tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Hinc concluditur, quod duæ æquationes diversorum ordinum etiam diversas exprimant curvas, licet innumerabiles ejusdem ordinis æquationes excogitari possint unius ejusdemque curvæ naturam exprimentes. Dubitatio igitur, utrum duæ propositæ æquationes diversas exprimant curvas, an vero unam eandemque curvam, tum demum locum habere potest, si ambæ æquationes ejusdem fuerint ordinis. Atque hæc est ratio, cur character distinctionis linearum curvarum generalis omnium optime peti queat ab ordine æquationum.

§. 173.

Quaerenda sit æquatio generalis pro parabola AM, F.248.
 ejus latus transversum est AC latus rectum = p et æ- 249.
 quatio inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ ista $yy = px$; sumatur recta bc quaecunque pro axe et punctum D quodcunque pro initio abscissarum. Ex quocunque puncto curvæ M ducatur MQ ad bc normalis, et vocatis $DQ = t$ et $MQ = u$, erit $x = mu + nt + f$, et $y = nu - mt - g$. Constanti f signum contrarium + præfixum est, quia punctum G in utraque figura ver-
sus

fus dextram ipsius A partem cadit. His substitutis fit
 $(nu - mt - g) = p(mu + nt + f)$; vel scripto x pro t et
 y pro $\bar{u}$, erit $nnyy - 2mnxy + mmxx - 2ngy + 2mgx$
 $+ gg = pmy + pnx + pf$, in qua aequatione est m sinus
 anguli, sub quo axis assumptus ad latus parabolæ transver-
 sum inclinatus est, et n hujus anguli cosinus. Posito
 igitur hoc angulo recto, fit $m = 1$ et $n = 0$, adeoque
 $xx + 2gx + gg = py \pm pf$, æquatio pro parabola relata ad
 axem bc , latus transversum quoad opus est productum secan-
 tem in G. Signum constantis f in hac æquatione fit dubium,
 licet signum constantis g maneat idem. Crescente enim
 angulo CRc perpetuo crescit DG et quidem versus ean-
 dem partem, AG vero decrescit et quidem in figura 248
 AG non tantum evadit $= 0$, quando punctum G cum
 A coincidit, sed etiam versus oppositam partem crescit,
 et ideo in casu, quo angulus CGc est rectus, oppositum
 habet valorem, ut æquatio sit ista: $xx + 2gx + gg = py$
 $- pf$. In figura 249 punctum G non attingere potest A,
 et ideo AG etiam in casu, quo angulus CGc est rectus
 idem retinet signum, ut habeatur $xx + 2gx + gg =$
 $py + pf$.

§. 174.

Quando linea quæcunque algebraica, æquatione
 indeterminata inter variables x et y , ubi x abscissam et
 y adplicatam denotat, expressa in axem incidit, adpli-
 cata y habet valorem $= 0$. Quodsi igitur data sit æqua-
 tio inter abscissam x et applicatam y , in hac æqua-
 tione poni debet $y = 0$, atque æquatio resultans, quæ
 tantum x continebit, exhibebit valores ipsius x , quibus
 adplicata $y = 0$ respondet, ideoque simul axis puncta,
 ubi curva ipsum secabit. Sic in æquatione pro circulo
 AMB, quæ sumto diametro AB pro axe et puncto A pro
 abscissarum initio, est $yy = 2ax - xx$, posito $y = 0$,
 fiet $0 = 2ax - xx$, unde duo valores ipsius x resultant,
 $x = 0$ et $x = 2a$, qui indicant, axem primo in ipso abscis-
 sarum initio A, tum vero in puncto B, existente $AB =$
 $2a$,

2a, a circulo intersecari. Similique modo in aliis lineis curvis, posito in æquatione $y = 0$, radices ipsius x indicabunt intersectiones curvæ cum axe. In æquatione generali pro quavis curva linea recta quæcunque vicem axis sustinet. Quare si in æquatione generali ponatur adplicata $y = 0$, æquatio remanens indicabit, in quot punctis linea curva a recta quacunque intersecetur. Prodibit autem æquatio solam x tanquam incognitam complectens, cujus singulæ radices ostendent intersectiones curvæ cum axe. Pendebit ergo intersectionum numerus a maxima ipsius x in æquatione potestate, hincque major esse non poterit, quam exponens summæ ipsius x dignitatis. Tot vero erunt intersectiones, quot exponens maximæ dignitatis ipsius x continet unitates, si omnes radices æquationis fuerint reales, sin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, intersectionum numerus tanto erit minor. Generaliter itaque linea algebraica ordinis n a recta poterit in n punctis secari, non vero in pluribus. Neque vero hinc concludendum est omnem lineam ordinis n a quavis linea recta in n punctis secari, sed utique fieri potest, ut intersectionum numeri sit minor, quin sæpius prorsus nullus. In hoc itaque propositionis vis tantum est posita, quod intersectionum numerus major esse non possit, quam exponens ordinis, ad quem linea curva pertinet.

§. 175.

Æquatio generalissima pro locis geometricis primi ordinis erat $a + \beta x + \gamma y = 0$, ex qua, posito $y = 0$, fit $0 = a + \beta x$, quæ æquatio plutio plures una radice habere nequit. Proinde locus primi ordinis est ejusmodi linea, quæ a linea recta in pluribus uno punctis non secari potest. Hinc omnis locus geometricus primi ordinis seu omnis linea æquatione $a + \beta x + \gamma y = 0$ expressa est linea recta. Si enim curvam exprimere posset hæc æquatio, eadem in duobus saltem a linea recta intersecari posset punctis. Quando est β

Gg

= 0

$= 0$, æquatio $0 = a$ impossibilis indicat, hoc casu axem a linea recta nusquam secari, erunt enim ambæ hæ lineæ rectæ inter se parallelæ, quod simul patet ex æquatione $a + \gamma\gamma = 0$, seu $\gamma = -\frac{a}{\gamma}$, quam supra jam vidimus esse æquationem pro linea recta axi parallela. Ex his patet, quod omne problema indeterminatum primi ordinis linea quadam recta geometricè construatur, cuius rei specimen aliquod exhibet problema, quod sequitur.

§. 176.

Datis positione duabus rectis AB, AC, invenire punctum D tale, ut rectæ DE, DF ab eodem sub datis angulis ad rectas AB et AC ductæ sint in data ratione.

F.250. SOL. Quia datur positio rectarum AB et AC, datur angulus CAB. Producta autem DE, donec rectæ AC occurrat, in triangulo AEC, cuius duo anguli A et E dantur, et tertius C erit datus. Punctum vero D habebitur, si inventæ fuerint AE et DE. Sit igitur $AE = x$ et $ED = y$, sinus autem datorum angulorum CAB, E, C, F dicantur a, e, c, f . erit $c : a = x : CE = \frac{ax}{c}$, ide-

oque $CD = CE - ED = \frac{ax}{c} - y$. Praeterea $f : c =$

$CD : FD = \frac{c \times CD}{f} = \frac{ax - cy}{f}$. Si igitur data ra-

tio $DE : DF$ sit $m : n$, erit $m : n = y : \frac{ax - cy}{f}$, et

ideo $nfy = max - mcy$, vel $y = \frac{ma}{nf + mc} x$, quæ æ-

quatio est indeterminata et primi ordinis, quod indicio est, non unum aliquod punctum quæsito satisfacere, sed infinita, quæ idem præstant, puncta posse reperiri, atque

que ad valorem quemcunque ipsius x determinatum quemcunque assumentum dari valorem ipsius y determinatum, et quidem talem ut y terminetur in puncto D, si sub angulo E ad rectam AB sic applicetur, ut pars hujus rectae inter illam et punctum A intercepta sit $= x$. Locus autem omnium horum punctorum erit linea quaedam recta sic invenienda. Sumatur in recta AB punctum quodcunque B, fiat angulus ABG = E, et BG fiat quarta proportionalis ad $nf + mc$, ma , ac AB; erit recta per puncta A et G ducta locus quaesitus. Sumta enim in hac recta AG puncto H quocunque, si HK ducatur rectae BG parallela, erit AB : BG = AK : AH, si igitur ponatur AK = x , HK = y , erit $nf + mc : ma = x :$

$$y = \frac{ma}{nf + mc} x.$$

§. 177.

Aequationes generales, quas pro curvis cujusque ordinis suppeditat Analysis Mathematica, plures continent quantitates constantes arbitrarias. Quodsi hisce constantibus valores determinati tribuantur, lineae curvae penitus determinabuntur, atque ad datum axem ita describentur, ut reliquae lineae curvae omnes, quae quidem in eadem aequatione generali contentae sunt, excludantur. Sic quamvis in aequatione primi ordinis $a + \beta x + \gamma y = 0$ sola linea recta contineatur; tamen ejus positio respectu axis innumerabilibus modis variari potest, pro diversis valoribus quantitatum constantium a , β , γ . Quam primum autem his quantitibus constantibus definiti valores tribuuntur, positio lineae rectae determinatur, ut praeter hanc nulla alia aequationi satisfacere queat. Posset quidem haec aequatio $a + \beta x + \gamma y = 0$ tres determinationes admittere videri ob tres constantes arbitrarias a , β , γ . Verum ex natura aequationum intelligitur, aequationem jam determinari, si tantum ratio inter has constantes definiatur,

scilicet ratio binarum ad unam, ex quo ista aequatio duas tantum admittet determinationes. Si enim β et γ dantur per a , ita ut sit $\beta = ma$ et $\gamma = na$, aequatio $a + max + nay$, quia a per divisionem exit, jam prorsus erit determinata. Similem ob rationem aequatio generalis pro lineis secundi ordinis, quae sex continet constantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes; aequatio generalis pro lineis tertii ordinis novem; et generaliter aequatio generalis pro lineis n patietur $\frac{(n+1)(n'+2)}{2} - 1$ determinationes.

§. 178.

F.251.

Istae constantes arbitrariae autem semper ita definiiri possunt, ut linea curva per datum punctum transeat, hocque modo una determinatio orietur. Sit enim proposita aequatio generalis pro quovis ordine linearum, quae ita definiiri debeat, ut linea curva per datum punctum B transeat. Sumatur pro lubitu recta quaedam pro axe, in eoque abscissarum initium A. Demittatur ex puncto B in axem perpendicularis Bb, atque manifestum est, si curva transeat per punctum B, posito intervallo Ab pro x , perpendicularem Bb praebere valorem applicata y . Quare in aequatione generali proposita loco x substituatur Ab et Bb loco y , ficque orietur aequatio, ex qua una quantitatium constantium a, β, γ, δ etc. definiiri poterit; quo facto omnes curvae, quae in aequatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum B transibunt. Quodsi linea curva insuper per punctum C transire debeat, demittatur ab eodem perpendiculum Cc ad axem: Ponatur $x = Ac$ et $y = Cc$, atque nova habebitur aequatio, ex qua iterum una ex quantitatibus constantibus a, β, γ, δ etc. definietur. Ex his patet, tres constantes definiiri, si tria puncta B, C, D, praescribantur, quatuor vero, si quatuor data sint puncta. Generaliter itaque, si tot puncta

puncta proponantur, quot determinationes aequatio generalis admittit, linea curva penitus determinabitur.

§. 179.

Aequatio generalis pro linea primi ordinis duas tantum admittit determinationes. Ideo propositis duobus punctis, per quae linea primi ordinis transeat, eadem penitus determinatur. Ex quo patet, quod per duo puncta data plures quam una eademque rectae duci non possint, quod quidem ex elementis jam constat. Quodsi vero unum tantum proponeretur punctum, ob aequationem nondum determinatam adhuc innumerabiles lineae rectae per idem punctum duci possunt. Aequatio generalis pro lineis secundi ordinis quinque admittit determinationes. Quodsi igitur quinque proponantur puncta, per quae linea curva transire debeat, linea secundi ordinis penitus determinatur, et per quinque puncta data non nisi unica linea secundi ordinis duci potest. Aequatio autem nondum penitus determinatur, si quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur; ideo innumerabiles lineae, quae omnes sunt secundi ordinis, per ea duci poterunt. Quo vero aequatio data determinet curvam secundi ordinis, tria illorum punctorum in directum jacere nequeunt, quia linea secundi ordinis a recta in tribus punctis secari nequit, id quod ex aequatione generali secundi ordinis jam demonstravimus. In genere igitur linea ordinis n determinabitur

per tot puncta, quot haec formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$- 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates ita, ut si numerus da-

torum punctorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles lineae ordinis n duci queant. Nunquam autem, utcumque haec puncta fuerint disposita, solutio evadet

impossibilis, quia determinatio coefficientium α , β , γ , δ , etc. nunquam resolutionem æquationis quadraticæ vel altioris potestatis requirit, sed tota per æquationes simplices absolvetur. Proinde neque valores imaginarii, neque multiformes reperientur, atque hanc ob causam semper linea realis per proposita puncta transiens prodibit, atque unica, si tot puncta proponantur, quot æquatio generalis admittit determinationes.

§. 180.

Quia axis pro lubitu assumi potest, facilius fiet determinatio coefficientium, si axis per unum punctorum datorum ducatur atque initium abscissarum in ipso hoc puncto A statuatur. Sic enim posito $x = 0$ fieri debet $y = 0$, unde in æquatione generali statim fiet terminus constans $\alpha = 0$. Deinde axis quoque per aliud datorum punctorum transire poterit, atque hoc facto iterum numerus quantitatum, quibus positio punctorum datorum definitur, minuetur. Possunt etiam loco applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi, ut applicata in initio abscissarum ducta pariter per punctum datum transeat. Curvæ enim cognitio et constructio æque facile deducitur, siue applicatæ statuatur rectangulæ, siue obliquangulæ. Si quæramur linea secundi ordinis, quæ per quinque data puncta A, B, C, D, E transeat, ducatur axis per duo puncta A, B, sumaturque initium abscissarum in altero puncto A. Jungatur punctum A cum C, atque sumatur angulus CAB pro angulo coordinatarum. Ducantur ex reliquis punctis D et E ad axem applicatæ Dd et Ee illi AC parallelæ. Ponatur $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $Dd = d$, $Ae = e$, et $eE = f$, atque

posito	erit	
$x = 0$	$y = 0$	
$x = 0$	$y = b$	
$x = a$	$y = 0$	
$x = c$	$y = d$	
$x = e$	$y = f$	Idco

Ideo ex æquatione generali linearum secundi ordinis habentur sequentes quinque æquationes.

$$0 = a$$

$$0 = a + \gamma b + \zeta b^2$$

$$0 = a + \beta a + \delta a^2$$

$$0 = a + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \epsilon cd + \zeta d^2$$

$$0 = a + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \epsilon ef + \zeta f^2$$

Proinde erit $a = 0$, $\gamma = -\zeta b$, $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis substituti præbent

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \epsilon cd + \zeta dd$$

$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta ec + \epsilon ef + \zeta ff$$

Multiplicetur prior æquatio per ef et posterior per cd , et altera ab altera subtrahatur, ut eliminetur e , quo facto habetur

$$0 = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef + \delta acde$$

$$+ \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff, \text{ seu } \frac{\delta}{\zeta} =$$

$$\frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef}, \text{ unde fit } \delta = df (be$$

$$- bc - de + cf), \text{ et } \zeta = ce (ad - af - de + cf),$$

$$\text{atque sic omnes coefficientes determinati erunt. De-}$$

$$\text{terminatis hoc modo omnibus coefficientibus, ex æqua-}$$

$$\text{tione invenientur plura puncta satis vicina, per quae}$$

$$\text{curva transire debet, ex quibus curvæ tractus facile}$$

$$\text{perspicietur.}$$

$$\text{§. 181.}$$

$$\text{Quod jam adtinet ad curvas algebraicas primo or-}$$

$$\text{ordine superiores, notari adhuc meretur, necesse esse,}$$

$$\text{ut æquatio in factores rationales resolvi nequeat, si li-}$$

$$\text{nea algebraica ad eum ordinem, quem æquatio indicat,}$$

$$\text{proprie referenda sit. Quodsi enim æquatio duos vel}$$

$$\text{plures habeat factores rationales, ea duas vel plures in-}$$

$$\text{volvit æquationes, quarum quælibet peculiarem exprimit}$$

$$\text{lineam, quæ junctim sunt æquationis propositæ vim}$$

exhaurient, ita ut æquatio plures lineas ad eundem axem et idem initium abscissarum relatas simul exprimat. Sit v. g. hæc proposita æquatio ordinis secundi $(a + \beta x + \gamma y)(f + gx + by) = 0$; atque patet, unicuique ipsius x valori duplicem respondere valorem ipsius y , quorum unus ex factore $a + \beta x + \gamma y = 0$ alter vero ex factore $f + gx + by = 0$ determinatur. Utraque vero harum æquationum est pro linea recta. Proinde æquatio $(a + \beta x + \gamma y)(f + gx + by) = 0$ duas rectas ad eundem axem et idem abscissarum initium relatas simul exprimit. Cum igitur ejusmodi æquationes in factores rationales resolubiles non unam sed plures lineas algebraicas continuas in se complectantur, quarum quaevis peculiari æquatione exprimi queat, et quæ aliter in se non sunt connexae, nisi quod earum æquationes in se invicem sint multiplicatæ, qui nexus ab arbitrio nostro pendet; ejusmodi lineae unam lineam algebraicam continuam constituere censi non possunt. Hujusmodi igitur æquationes, quas complexas vocare possumus, exprimunt lineas algebraicas non continuas attamen ex continuis compositas, quas ideo *lineas complexas*, vel *systema plurium* linearum algebraicarum vocare, consultum erit. Sic æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad lineam secundi ordinis esse videtur, ita reducta $yy - ay - xy + ax = 0$ resolubilis est in factores $y - x = 0$ et $y - a = 0$, quarum æquationum simplicium utraque est pro linea recta: illa scilicet cum axe in initio abscissarum angulum semirectum constituit, hæc vero axi ad distantiam $= a$ est parallela. Pari ratione æquatio $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy = 0$ complexa est, atque coincidit cum ista $(y - x)(y - a)(yy - ax) = 0$. Proinde tres exprimit lineas algebraicas continuas, duas scilicet rectas, atque parabolam.

§. 182.

Possunt igitur pro lubitu lineae complexae quæcunque formari, quae duas vel plures lineas complectantur
alge-

algebraicas ad arbitrium descriptas. Quodsi enim unius cujusque lineæ natura exprimat per æquationem ad eundem axem idemque abscissarum initium relatam, atque hae singulae æquationes, postquam ad cyphram fuerint reductae, in se multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes lineae assumtae simul continentur. Ita si propositus fuerit circulus centro C et radio $CA = a$ descriptus, ac praeterea linea recta LN per centrum C transiens, pro quovis axe exhiberi poterit æquatio, quae circulum et lineam rectam simul exprimat. Sumatur diameter AB, quae cum recta LN angulum semirectum constituat, pro axe, ac punctum A pro initio abscissarum. Sit abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$, erit pro linea recta $PM = CP = a - x$, et quia punctum rectae M in regionem adplicatarum negativarum cadit, erit $y = -a + x$, vel $y - x + a = 0$. Pro circulo autem erit $yy = 2ax - xx$ vel $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicatis duabus hifce æquationibus in se invicem prodibit ista æquatio tertii ordinis complexa $y^3 - yxx + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0$, quae tam circulum, quam lineam rectam simul complectitur. Abscissae $AP = x$ respondent tres adplicatae, binae circuli et una rectae. Si nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$, atque divisione per hanc radicem instituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres ipsius y valores erunt, $y = -\frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Hoc descrimine inter curvas complexas et incomplexas notato perspicuum est, lineas secundi ordinis esse vel curvas continuas, vel ex duabus lineis rectis complexas. Lineae tertii ordinis erunt vel incomplexae, vel ex una recta et una linea secundi ordinis, vel ex tribus lineis rectis complexae. Atque par ratio erit linearum quarti et superiorum ordinum. Caeterum quia solae lineae incomplexae tantum censentur ejusdem ordinis esse, ad quem æquatio pertinet, in posterum de lineis complexis nunquam sermo erit, quando de lineis hujus vel

vel illius ordinis erit agendum, sed solae lineae incomplexae erunt intelligendae.

§. 183.

Aequationes, quas supra pro curvis ex sectione conici ortis, nimirum pro ellipsi, circulo, parabola et hyperbola elicimus, omnes, ideo et istae curvae, sunt ordinis secundi. Ipsa vero aequatio generalissima $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 = 0$ non alias nisi has curvas in se complectitur, ita ut omnis curva secundi ordinis sit sectio conica. Demonstratio hujus asserti praerequit sibi cognitionem de proprietatibus quibusdam curvarum secundi ordinis generalibus, quae omnibus hisce curvis communes sunt, ex aequatione secundi ordinis generalissima deducendis. Tribuatur aequationi

$$\text{isti generalissimae haec forma } \gamma y + \frac{(\epsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0, \text{ cujus radices sunt } y = -\frac{\epsilon x - \gamma}{\zeta} \pm r \left(\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} + \frac{(\epsilon x + \gamma)^2}{4\zeta^2} \right)$$

atque patet, aequationem exprimere systema duarum rectarum, si fuerit $r \left(\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} + \frac{(\epsilon x + \gamma)^2}{4\zeta^2} \right)$

quantitas rationalis; qui casus huc quidem non spectat (§. praec.) sed tamen notandum est, ipso hoc quoque casu aequationem esse pro linea ex sectione quadam conici orta. Cono enim plano quodam secto, quod transit per verticem, figura sectionis est systema duarum linearum rectarum. Hoc casu seposito sit MNF curva secundi ordinis quaecunque, atque sumatur recta AEF pro axe, punctum A pro initio abscissarum, angulus APN pro eo, quo adplicatae axi insistant, et quoties ambo ipsius y valores fuerint reales, id quod evenit, si appli-

plicata curvam in duobus punctis M et N interfecat, erit PM una radix, PN altera radix aequationis. Sum-

ma harum radicum est $PM + PN = \frac{-\epsilon x - \gamma}{\zeta}$, vel

$\frac{-\epsilon AP - \gamma}{\zeta}$, quia $x = AP$. Ducatur sub eodem an-

gulo quaevis applicata npm , erit et $-pm$ una radix, pn

altera radix, ideo quoque $pn - pm = -\frac{\epsilon x - \gamma}{\zeta} =$

$\frac{-\epsilon Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur haec aequatio a priori, ut

fiat $PM + pm + PN - pn = \frac{+\epsilon Ap - \epsilon AP}{\zeta} = \frac{\epsilon(Ap - AP)}{\zeta}$

$= \frac{\epsilon \cdot Pp}{\zeta}$, quia $Ap - AP = Pp$. Jam ducantur ex

punctis m et n rectae $m\mu$ et $n\nu$ axi parallelae, donec prio-

ri adplicatae occurrant in punctis μ et ν , eritque $M\mu =$

$MP + pn$, $N\nu = PN - pm$, ergo est $M\mu + N\nu = MP$

$+ pm + PN - pm$, ex quo porro concluditur $M\mu + N\nu =$

$\frac{\epsilon \cdot Pp}{\zeta}$, quae aequatio dat analogiam istam $\zeta : \epsilon = Pp$

$: M\mu + N\nu$. Ratio igitur $Pp : M\mu + N\nu$ perpetuo erit

eadem, ubicunque in curva ducantur rectae MN et mn ,

dummodo cum axe datum faciant angulum, atque rectae

$n\nu$ et $m\mu$ axi parallelae statuantur.

§. 184.

Si applicata PMN eo promoveatur, quo puncta F. 255.
M et N coincidunt, tum applicata tanget curvam. Sit
KCI ejusmodi tangens, cui ducantur parallelae quocun-
que rectae MN, mn , curvae utrinque occurrentes, quae
chordae seu *ordinatae* vocari solent. Porro ex punctis M,
N, m , n , ad tangentem ducantur rectae MI, MK, mi ,
 mk ,

mk , axi prius assumpto parallelæ. Quia nunc interval-
la CK , Ck ad contrariam puncti C partem cadunt, ne-
gative capi debebunt. Erit vero $CI - CK : MI = \epsilon : \zeta$
 $= Ci - Ck : mi$, vel $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.
Quia positio axis respectu curvæ est arbitraria, rectæ
 MI , NK , mi , nk , pro lubitu duci poterunt, dummo-
do inter se fuerint parallelæ, eritque semper $MI : mi =$
 $CI - CK : Ci - Ck$. Quodsi ergo rectæ parallelæ MI ,
 NK , ita ducantur, ut fiat $CI = CK$, quod evenit si MI
et NK statuantur parallelæ rectæ CL , quæ ex conta-
ctu C ducta ordinatam MN in L bifecat, fiet $CI - CK$
 $= 0$, et hinc quoque $Ci - Ck = \frac{mi \cdot (CI - CK)}{MI} = 0$,
ex quo fit $Ci = Ck$. Producaturs recta CL in l , et fiet
 $ml = Ci$, $nl = Ck$, proinde $ml = nl$. Recta igitur
 CLl , quæ ex puncto contactus C ducta unam ordinatam
 MN tangenti parallelam bifecat, omnes ordinatas mn
eidem tangenti parallelas bifariam secabit. Ejusmodi
linea recta CLl omnes ordinatas tangenti ICK parallelas
in duas partes æquales secans dicitur *Diameter* lineæ se-
cundi ordinis. Hinc innumerabiles in unaquaque lineæ
secundi ordinis duci possunt diametri, quia in singulis
punctis curvæ datur tangens.

§. 185.

F.256. Sit igitur IG ejusmodi diameter bifecans ordinatam
 MN et omnes reliquas huic parallelas bifariam. Pro-
ducatur eadem utcunque versus P atque per punctum P
ducatur recta indefinita AO ad PN normalis. Sumatur
hæc AO pro axe, erit AP abscissa $= x$, cui duplex ap-
plicata y , nempe PM et PN respondet, atque ex æqua-
tione $yy + \frac{\epsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ definiri
potest positio diametri IG in respectu ad axem, quem pro-
ducta in O interfecat. Cum enim punctum ordinatæ
 MN medium L sit in diametro, ponatur $PL = z$, et fiet
 $z =$

$$z = \frac{PM + PN}{2} = \frac{-\epsilon x - \gamma}{2\zeta} \text{ adeoque } \frac{-\epsilon x - \gamma}{2\zeta}$$

$-z = 0$, ex quo fit $2\zeta z + \epsilon x + \gamma = 0$, quæ est æqua-
 tio positionem diametri IG præbens. Ducatur ex cur-
 væ puncto M ad axem applicata obliquangula Mp, fa-
 ciens cum axe angulum MpP = φ cujus sinus sit = μ
 et cosinus = ν . Sit nova abscissa Ap = t et applicata
 pM = u , erit $y = \mu u$, et $x = t + \nu u$. (§ 170.).
 Substituantur hi valores pro x et y in aequatione $\alpha +$
 $\beta x + \gamma y + \delta x x + \epsilon x y + \zeta y y = 0$, et prodibit æqua-
 tio pro assumta applicatarum obliquitate $\alpha + \beta(t + \nu u)$
 $+ \gamma \mu u + \delta(t + \nu u)^2 + \epsilon(t + \nu u)\mu u + \zeta \mu \mu u u$
 $= 0$, ex qua legitime ordinata fit uu

$$+ \frac{(\mu\epsilon + 2\nu\delta)t + (\mu\gamma + \nu\beta)}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta} u + \frac{\delta t t + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta}$$

$= 0$. Hic ergo iterum quævis applicata duplicem habe-
 bit valorem, nempe pM et pn, quare positio diametri
 ordinatam Mn et huic parallelas bifariam secantis eodem
 modo ut ante definietur. Bisecta scilicet ordinata Mn
 in l, erit l punctum in diametro. Ponatur ergo pl = v ,

$$\text{et erit } v = \frac{pM + pn}{2} = - \frac{(\mu\epsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta)}.$$

Demittatur ex l in axem AO perpendicularis lq et ponatur

$$Aq = r \text{ et } ql = s; \text{ eritque } v = \frac{s}{\mu} \text{ et } t = r -$$

$$\frac{\nu s}{\mu}.$$

$$\text{Substitutis his valoribus prodibit } \frac{s}{\mu} = - \frac{(\mu\epsilon + 2\nu\delta)\left(r - \frac{\nu s}{\mu}\right) - \mu\gamma - \nu\beta}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\epsilon + 2\nu\nu\delta}, \text{ ex qua}$$

reducta fit $(2\mu\zeta + \nu\epsilon)s + (\mu\epsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta = 0$,
 qua æquatione positio diametri ig definitur.

§. 186.

Ambæ diametri se mutuo interfecant in puncto quodam C, ex quo ad axem demittatur perpendicularum CD, ac vocetur $AD = g$, et $CD = b$, eritque primo, quia C in diametro IG extat, $2\zeta b + \epsilon g + \gamma = 0$, ex qua

fit $b = \frac{-\epsilon g - \gamma}{2\zeta}$. Deinde quia C quoque in dia-

metro ig reperitur, erit $(2\mu\zeta + \nu\epsilon)b + (\mu\delta + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\beta = 0$. Subtrahatur prior æquatio per μ multiplicata, ac remanebit $\nu\epsilon b + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0$, seu

$\epsilon b + 2\delta g + \beta = 0$, ex qua habemus $b = \frac{-2\delta g - \beta}{\epsilon}$.

Ideo est $\frac{-\epsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\epsilon}$, ex qua deduci-

tur $g = \frac{2\beta\zeta - \gamma^3}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$ et porro $b = \frac{2\gamma\delta - \beta\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$. Cum

in his æquationibus non insint quantitates μ et ν , a quibus obliquitas applicatarum pMn pendet, manifestum est, Cidem manere, utcunque obliquitas varietur. Omnes ergo diametri se mutuo in eodem puncto C interfecant. Quare si illud semel fuerit inventum, omnes diametri per illud transibunt; ac vicissim omnes rectae per illud ductae erunt diametri, quæ omnes ordinatas sub certo quodam angulo ductas bifecabunt. Cum igitur hoc punctum in quavis linea secundi ordinis sit unicum, in eoque omnes diametri se mutuo secant, hoc punctum vocari solet *centrum lineae secundi ordinis*, quod ergo ex æquatione inter x et y proposita $\alpha + \beta x + \beta y + \delta xx$

$+ \epsilon xy + \zeta yy = 0$ ita invenitur; ut sumto $AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$

capiatur $CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\epsilon}{\epsilon\epsilon - 4\delta\zeta}$,

§. 187.

§. 187.

$$\begin{aligned}
 & \text{Ex æquatione } yy + \frac{\epsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} \\
 & = 0, \text{ dantur } PM + PN = \frac{-\epsilon x - \gamma}{\zeta} \text{ et } PM \times PN \\
 & = \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}. \text{ Sed est } (PM - PN)^2 = PM^2 \\
 & - 2PM \times PN + PN^2 = PM^2 + 2PM \times PN + PN^2 - \\
 & 4PM \times PN = (PM + PN)^2 - 4PM \times PN = \\
 & \frac{\epsilon \epsilon xx + 2\epsilon x \gamma \zeta + \gamma \zeta \zeta}{\zeta \zeta} - \frac{4\delta xx - 4\beta x - 4\alpha}{\zeta} \\
 & = \frac{\epsilon \epsilon xx + 2\epsilon x \gamma \zeta + \gamma \zeta \zeta}{\zeta^3} \\
 & - \frac{4\delta xx \zeta \zeta - 4\beta x \zeta \zeta - 4\alpha \zeta \zeta}{\zeta^3} \\
 & = \frac{\epsilon \epsilon xx + 2\epsilon x \gamma + \gamma \gamma - 4\delta xx \zeta - 4\beta x \zeta - 4\alpha \zeta}{\zeta \zeta} \\
 & = \frac{(\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta) xx + 2(\epsilon \gamma - 2\beta \zeta) x + \gamma \gamma - 4\alpha \zeta}{\zeta \zeta}
 \end{aligned}$$

quae formula est = 0, quando fit $PM = PN$, seu xx

$$- \frac{2(2\beta \zeta - \epsilon \gamma)}{\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta} x + \frac{\gamma \gamma - 4\alpha \zeta}{\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta} = 0. \text{ Fit ve-}$$

ro $PM = PN$ in punctis diametri IG extremis I et G. Proinde istius æquationis radices sunt AK et AH, ita

$$\text{ut fit } AK + AH = \frac{4\beta \zeta - 2\epsilon \gamma}{\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta} = \frac{2(2\beta \zeta - \epsilon \gamma)}{\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta}$$

$$\text{ex quo fit } \frac{AK + AH}{2} = \frac{2\beta \zeta - \epsilon \gamma}{\epsilon \epsilon - 4\delta \zeta}. \text{ Erat vero}$$

AD

$$AD = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}, \text{ ideo est } AD = \frac{AK + AH}{2} \text{ et}$$

proinde $KD = DH$. Sunt autem IK et GH perpendiculara ex terminis diametri in axem demissa; ideo IK , CD , GH , sunt parallelæ, hanc ob rem quoque $IC = CG$ (§. 200. *Geom. Elem.*). Centrum igitur C in medio diametri IG est positum, quod cum de quavis alia diametro æque valeat, consequens est, non solum omnes diametros se mutuo in eodem puncto C interfecare, sed etiam se invicem bifariam secare.

§. 188.

F.257. Sumamus nunc quamcunque diametrum AI pro axe, ad quem ordinatae adplicatae sint sub angulo $APM = q$, cujus sinus sit $= m$ et cosinus $= n$. Ponatur abscissa $AP = x$ et adplicata $PM = y$, cujus cum duo sint valores inter se æquales, alter alterius negativus, eorumque adeo summa $= 0$; in æquatione generali pro

$$\text{lineis secundi ordinis } yy + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$$

$= 0$ coefficientis termini secundi est $= 0$, ideoque $yy +$

$$\frac{\delta xx + \beta x - \alpha}{\zeta} = 0, \text{ vel } yy = -\frac{\alpha}{\zeta} - \frac{\beta}{\zeta} x$$

$$- \frac{\delta}{\zeta} xx. \text{ Quodsi igitur constantes } -\frac{\alpha}{\zeta}, -$$

$$\frac{\beta}{\zeta}, -\frac{\delta}{\zeta}, \text{ generaliter denotentur litteris } \alpha, \beta, \gamma,$$

æquatio generalis pro lineis secundi ordinis ad diametrum tanquam axem relata habebit formam sequentem $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$. Assumamus punctum G diametri extremum pro abscissarum initio, et patet, quod posito $x = 0$ fiat $y = 0$, adeoque evadat $\alpha = 0$. Proinde æquatio induet hanc formam $yy = \beta x + \gamma xx$.

Prae-

Præterea vero patet, quod posito $y = 0$, æquatio $0 = \beta x + \gamma x x$ indicet puncta G et I in axe, ubi is a curva

intersecatur. Aequationis vero $x x + \frac{\beta}{\gamma} x = 0$ radi-

ces erunt $x = 0$ et $x = GI$, proinde est $GI = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Bisecetur GI in C, et fies $CG = CI = \frac{-\beta}{2\gamma}$. Suma-

mus nunc centrum C pro initio abscissarum, et statua-

mus $EP = t$, PM vero manebit $= y$. Hoc facto fiet

$x = CG - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t$, et valore illo substituto

habemus $yy = \frac{-\beta\beta}{4\gamma} + \gamma t t$. Posito igitur x loco t

et $-\frac{\beta\beta}{4\gamma} = a$, erit $yy = a + \gamma x x$. Constantis a

signum in hac æquatione dependet a signo coefficientis ipsius $x x$, et quidem ita, ut a sit quantitas negativa, quando γ ponitur affirmativa, et vice versa a sit positiva, si γ ponatur negativa. Signum vero ipsius

a non inutatur, si pro β scribatur $+\beta$, siue $-\beta$, quia quadratum $\beta\beta$ semper habet signum $+$. Duas igitur in universum habemus curvarum secundi ordinis species,

quarum una æquatione $yy = a - \gamma x x$, altera vero æ-

quatione $yy = -a + \gamma x x$ exprimitur, abscissis a cen-

tro in curvæ diametro computatis. Atque nunc omne

negotium eo redit, ut constantes a et γ convenienter determinentur. Sit igitur $yy = a - \gamma x x$, et posito y

$= 0$ fiet $0 = a - \gamma x x$, atque $x = \pm \sqrt{\frac{a}{\gamma}} = CG =$

HI

CI,

CI, proinde tota diameter $IG = 2r \frac{a}{\gamma}$. Ponatur

$x = 0$, ac reperietur applicata CE per centrum C tran-
fiens $y = \pm r a$, ideo tota ordinata $EF = 2r a$. Erit
vero ipsa hæc ordinata EF diameter curvæ et quidem
talis, quæ omnes ordinatas diametro IC parallelas bifa-
riam secat. Per M enim ducatur ordinata MM^r diame-
tro GI parallela secans diametrum EF in puncto S. Su-
matur EF pro axe, ac vocetur $CS = t$, et $SM = u$,
fiet $t = y$ et $u = x$, proinde $tt = a - \gamma uu$ vel $uu =$

$$\frac{a}{\gamma} - \frac{tt}{\gamma} \text{ et } u = \pm r \left(\frac{a}{\gamma} - \frac{tt}{\gamma} \right), \text{ quod indi-}$$

cat, fore $SM = SM^r$, idque perpetuo, quia pro t scri-
to vel $+t$ vel $-t$ æquatio semper manet eadem. Quod-
si coefficientis γ sumatur positivus et adeo constans a ne-
gativa, ut fiat $yy = -a + \gamma xx$, manet quidem $GI =$

$2r \frac{a}{\gamma}$, sed applicata per centrum CE fit imaginaria

$= r - a$. Nihilo tamen secius, hæc diameter imagi-
naria omnes ordinatas ipsi GI parallelas bifariam secat.

Permutatis enim coordinatis fit $u = \pm r \frac{a + tt}{\gamma}$. Am-

bæ igitur diametri GI et EF ita sunt comparatæ, ut al-
tera bifecet omnes ordinatas alteri parallelas, quam ob
reciprocam proprietatem, hæ duæ diametri inter se *con-*
jugatæ appellantur.

§. 189.

Ducatur nunc adplicata quævis obliquangula MQ,
fitque angulus $AQM = \phi$, cujus finus $= \mu$ et cofinus
 $= \nu$. Angulus APM erat $= q$, ejus finus $= m$ et cofi-
nus $= n$. Proinde est angulus $PMQ = \phi - q$, ejus
finus $= \mu n - \nu m$ (§. 40.). Ponatur abscissa $CQ = t$
et

et applicata $QM = u$, erit $m : u = \mu : \gamma$, hinc $\gamma = \frac{u\mu}{m}$. Deinde $m : u = \mu n - \nu m : PQ$, et $PQ =$

$\frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Sed $x = t - PQ$, proinde $x = t -$

$\frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Substituantur hi valores in æquatione

$\gamma y + \gamma x^2 + a = 0$, nullo constantium signi habito re-

spectu, ut fiat $\frac{u\mu\mu}{mm} + \gamma \left(t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m} \right)^2$

$+ a = 0$, quæ æquatio ita reducitur: $\frac{u\mu\mu}{mm} + \gamma$

$\left(tt - 2t \left(\frac{(\mu n - \nu m)u}{m} \right) + \frac{(\mu n - \nu m)^2 uu}{mm} \right) + a = 0$

$\frac{u\mu\mu + mm\gamma tt}{mm} - \frac{2\gamma tm (\mu n - \nu m) u}{mm}$

$+ \frac{\gamma (\mu n - \nu m)^2 uu}{mm} + \frac{mma}{mm} = 0$

$u\mu\mu + mm\gamma tt - 2\gamma tm (\mu n - \nu m) u = \gamma (\mu n - \nu m)^2 uu + mma = 0$

$(\mu\mu + \gamma (\mu n - \nu m)^2) uu - 2\gamma m (\mu n - \nu m) ut + mm\gamma tt + mma = 0$,

Ex hac æquatione applicata u duos obtinet valores QM et $-Qn$. Tribuatur eidem hæc forma $uu -$

$\frac{2\gamma m (\mu n - \nu m) t}{\mu\mu + \gamma (\mu n - \nu m)^2} + \frac{\gamma mmtt + a mm}{\mu\mu + \gamma (\mu n - \nu m)^2} = 0$,

Hæc 2,

erit

eritque $QM - Qn = \frac{2\gamma m (\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}$. Bifecetur

ordinata Mn in p , et erit recta Cpg nova diameter secans omnes ordinatas ipsi Mn parallelas bifariam. Est vero $pQ + Qn = pn = pM$, $QM - pQ = pM = pn$, ideo $Qp + Qn = QM - pQ$ et $2Qp = QM - Qn =$

$$\frac{2\gamma m (\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}, \text{ proinde } Qp = \frac{\gamma m (\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2}$$

§. 190.

Obtineri poterit anguli GCg tangens sequenti modo. Ponatur in formula generaliori $t\phi = \frac{b \sin. \alpha}{a - b \cos. \alpha}$

(§. 42.) $\phi = GCg$, $a = CQ$, $b = Qp$, et $CQp = \alpha$,

eritque $\text{tang. } GCg = \frac{Qp \cdot \sin CQp}{CQ - Qp \cdot \cos CQp}$. Est vero $\sin$

$CQp = \sin AQM = \mu$, $\cos CQp = \cos AQM$ negativo sumto $= -\nu$ ergo $\text{tang } GCg$

$$= \frac{\mu Qp}{CQ + \nu Qp} = \frac{\mu \gamma m (\mu - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2} : t$$

$$= \frac{\nu \gamma m (\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2} = \frac{\mu \gamma m (\mu n - \nu m)t}{t\mu\mu + \gamma t(\mu n - \nu m)^2 + \nu \gamma m (\mu n - \nu m)t}$$

$$= \frac{\mu \gamma m (\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma(\mu n - \nu m)^2 + \nu \gamma m (\mu n - \nu m)}$$

$$= \frac{\mu \gamma m (\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma\mu\mu n - 2\gamma\nu m\mu n + \gamma\nu m m + \gamma\nu m\mu n - \nu\nu m m \gamma}$$

$$= \frac{\mu \gamma m (\mu n - \nu m)}{\mu\mu + \gamma\mu\mu n - \gamma\nu m\mu n} = \frac{\gamma m (\mu n - \nu m)}{\mu + \gamma\mu n - \gamma\nu m}$$

=

$$= \frac{\gamma m (\mu n - \nu m)}{\mu + n\gamma (\mu n - \nu m)}. \text{ Ponamus angulum } GCg = p,$$

$$\text{et erit } \text{tang. } p = \frac{\gamma \mu (\mu n - \nu m)}{\mu + n\gamma (\mu n - \nu m)}, \text{ ex quo fit}$$

$$\mu \text{ tang. } p + n\gamma \text{ tang. } p (\mu n - \nu m) = \gamma m (\mu n - \nu m)$$

$$\mu \text{ tang. } p = (\gamma m - \gamma n. \text{ tang. } p) (\mu n - \nu m) \text{ et}$$

$$\frac{\mu. \text{ tang. } p}{(m - n. \text{ tang. } p) (\mu n - \nu m)} = \gamma. \text{ Sed } \mu = \sin \Phi, \nu =$$

$\cos. \Phi, m = \sin. q, n = \cos. q.$ Ponatur angulus $ECe = \pi$, eritque $\angle QM = \Phi = q + \pi$ et $\pi = \Phi - q$. Est igitur $\mu n - \nu m = \sin. \Phi. \cos. q - \cos. \Phi \sin. q = \sin. \pi.$

$$\text{Proinde } \gamma = \frac{\text{tang. } p. \sin. \Phi}{(\sin q - \cos q. \text{ tang. } p) \sin \pi}$$

$$= \frac{\text{tang. } p. \sin. (q + \pi)}{(\sin. q - \cos. q. \text{ tang. } p) \sin \pi}. \text{ Multiplicetur nu-}$$

merator et denominator per $\cos. p$, et fiet $\gamma =$

$$\frac{\cos. p. \text{ tang. } p. (\sin. q + \pi)}{(\sin. q. \cos. p - \cos. q. \text{ tang. } p. \cos. p) \sin. \pi}. \text{ Sed est } \text{tang. } p.$$

$$\cos. p = \sin. p, \text{ ideo fit } \gamma = \frac{\sin. p. \sin. (q + \pi)}{(\sin. q. \cos. p - \cos. q. \sin. p) \sin \pi}$$

$$= \frac{\sin. p. \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi. \sin. (q - p)}, \text{ ob } \sin. q. \cos. p - \cos. q. \sin. p =$$

$\sin. (q - p).$ Vocemus jam semidiametrum $CG = f$ et

semiconjugatam $CE = CF = g$, et cum fit $CG = r \frac{a}{\gamma}$

sive γ sit negativum, sive affirmativum, erit $f = r \frac{a}{\gamma}$

et $ff = \frac{a}{\gamma}$; cum deinde fit $CE = \gamma a = g$, et $a = gg$, erit $a = \gamma ff = gg$ proinde $\gamma = \frac{gg}{ff}$ et $\frac{gg}{ff} = \frac{\sin. p. \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi \sin. (q - p)}$.

§. 191.

Ex æquatione igitur $yy = a - \gamma xx$ fit $yy = gg - \frac{gg}{ff}xx$, atque altera $yy = -a + \gamma xx$ sic mutatur

$= -gg + \frac{gg}{ff}xx$. Si abscissæ in diametro a vertice computentur; æquatio generalis est $yy = \beta x + \gamma xx$, ubi coëfficiens β datur per æquationem $-\frac{\beta\beta}{4\gamma} = a$,

unde pro γ negativo, fit $\frac{-\beta\beta}{4 \times -\gamma} = \frac{\beta\beta}{4\gamma} = a$, hinc $\beta\beta$

$= 4a\gamma = \frac{4g^4}{ff}$, et $\beta = \frac{2gg}{f}$. Quia igitur sub hac hypothefi est coëfficiens γ negativus, habetur æquatio

pro una specie $yy = \frac{2gg}{f}x - \frac{gg}{ff}xx$. Pro γ po-

sitivo fit $-\frac{\beta\beta}{4\gamma} = -gg$, quia $+a$ est $= +gg$, un-

de pro hoc quoque casu est $\beta = \frac{2gg}{f}$, et æquatio

pro altera specie fit $yy = \frac{2gg}{f}x + \frac{gg}{ff}xx$. Quia

est $2f : 2g = 2g : \frac{2gg}{f}$, coëfficiens ipsius x est tertia proportionalis ad diametrum, in qua abscissæ capiuntur, ejus-

ejusque conjugatam, quae *parameter* illius diametri vocatur. Posito hoc parametro $= p$, erit $\frac{2gg}{f} = p$,

atque $\frac{gg}{ff} = \frac{p}{2f}$. His substitutis æquatio pro una

specie fit $yy = px - \frac{pxx}{2f}$, et pro altera $yy = px +$

$\frac{pxx}{2f}$, unde concluditur tertia $yy = px$, si $f = \infty$,

quo casu est p tertia proportionalis ad abscissam et applicatam. Sit angulus gCe rectus, et erit $q + \pi - p = 90^\circ$, ideo $\pi = 90^\circ + p - q = 90^\circ - (q - p)$ et $\sin \pi = \cos. (q - p)$. Porro $q + \pi = 90^\circ + p$, hinc $\sin$

$(q + \pi) = \cos. p$, et $\frac{gg}{ff} = \frac{\sin. p. \cos. p}{\sin (q - p) \cos. (q - p)} =$

$$\frac{\sin 2p}{\sin 2(q - p)} = \frac{\sin 2p}{\sin 2q. \cos 2q - \cos 2q. \sin 2p}.$$

Ergo est $\frac{ff}{gg} = \frac{\sin 2q. \cos 2p}{\sin. 2p} - \cos 2q. = \sin 2q. \cot 2p$

$- \cos 2q$, ex quo fit $\cos 2q + \frac{ff}{gg} = \sin 2q. \cot 2p$, et

$$\cot 2p = \frac{\cos 2q}{\sin 2q} + \frac{\frac{ff}{gg}}{\sin 2q}, \text{ quæ æquatio semper}$$

præbet solutionem possibilem. Datis igitur duabus diametris conjugatis, quæ angulum quemcunque obliquum $GCE = q$ inter se comprehendunt, semper duci poterunt duae aliae diametri conjugatae, quæ angulum gCe rectum comprehendant. Datur enim an-

$$\text{gulus } GCg \text{ ex æquatione } \cot 2p = \frac{\cos 2q}{\sin 2q} + \frac{\frac{ff}{gg}}{\sin 2q}.$$

§. 192.

r.258. Aequationes pro tribus linearum secundi ordinis speciebus inventæ adeo universales sunt, ut f quemcunque diametrum, atque g ejus conjugatam, p vero illius diametri parametrum denotare possint. Sint igitur $CA = a$ et $CE = b$ duæ semidiametri conjugatae lineae secundi ordinis orthogonales, quæ vocari solent *semidiametri principales*, ita ut punctum C sit curvæ centrum. Sit abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, eritque æquatio pro una specie $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$. Si ex centro C , quod pro initio abscissarum fuit assumtum, ad curvæ punctum M quodcunque ducamus rectam CM , erit $CM = r(xx + yy) = r(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)$, unde intelligitur, si fuerit $b = a$, seu $CE = CA$, fore $CM = rbb = b = a$. Hoc ergo casu omnes rectæ ex centro C ad curvam productæ inter se erunt æquales; quæ cum sit proprietas circuli, manifestum est, curvam secundi ordinis, cujus binæ diametri conjugatæ sunt inter se æquales, esse circulum, cujus adeo æquatio inter coordinatas orthogonales, positis $CI = x$ et $PM = y$, erit $yy = aa - xx$ existente radio circuli $CA = a$, quam eandem æquationem supra ex natura ciruli invenimus. Quodsi autem non fuerit $b = a$, recta CM per x nunquam poterit rationaliter exprimi. Dabitur autem aliud punctum F in axe ejus conditionis, ut omnes rectæ FM ab eodem ab curvam ductæ rationaliter exprimi possint. Ad quod inveniendum ponatur $CF = f$, atque ob $FP = f - x$, erit $FM^2 = FP^2 + PM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)}{aa}xx$, quæ expressio quadratum evadet, si fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$, hinc-

hincque $aaff = (aa - bb)(bb + ff) = aabb + aaff - b^4 - bbff$, et $aaff$ utrinque subtrahendo, $0 = aabb - b^4 - bbff = (aa - bb - ff)bb$. Horum igitur factorum unus est $= 0$, quare cum non sit $bb = 0$, erit $aa - bb - ff = 0$, hincque porro concluditur $f = \pm \sqrt{aa - bb}$. Huiusmodi igitur punctum dabitur geminum in axe AC, utrinque scilicet a centro intervallo $CF = \sqrt{aa - bb}$ remotum. Patet vero simul diametrum a , in qua hæc puncta sunt sita, altera b maiorem fore, quia $aa = bb + ff$, et hinc quadratum ipsius a quadrato ipsius b majus est, quod fieri non posset, nisi sit $a > b$. Diameter hæc major a sua conjugata b ita distinguitur, ut ea vocetur *Axis principalis* sive *transversus*, dum altera b ejus *axis conjugatus* appellatur. Puncta vero F et G *Foci* seu *Umbilici* curvæ dicuntur. Erit autem $FM^2 = aa - 2x\sqrt{aa - bb} + \frac{(aa - bb)}{aa}xx$, hincque $FM = a - \frac{x\sqrt{aa - bb}}{a}$

$= AC - \frac{CF \cdot CP}{AC}$. Facto $CP = 0$, fiet $FM = FE = a = AC$, sumpta autem abscissa $CP = CF$, seu $x = \sqrt{aa - bb}$, recta FM abit in applicatam FG, quæ erit $= \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, seu fiet applicata in foco tertia

proportionalis ad semidiametrum principalem et semidiametrum conjugatam. Applicata hæc orthogonalis in ipso foco alterutro erecta nomen *Semiparametri* obtinuit. Tota enim *Parameter* est ordinata in F seu FG bis sumpta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Nemo jam non perspicit, quod ista linearum secundi ordinis species, quam exprimit æqua-

tio $yy = a - \gamma xx$, seu $yy = bb - \frac{bb}{aa}xx$, abscissis in axe transverso a centro computatis vel $yy = px - \frac{p^2 xx}{2a}$,

abscissis a vertice computatis, fit ea ex sectionibus conicis, quam supra *ellipsin* vocauimus, cuius species est *parabola*, posito axe transverso a infinito, ad quam ideo generaliter est $yy = px$, quicumque diameter pro axe sumatur, siue principalis siue obliquangula. Aequatio

pro ellipsi $yy = bb - \frac{bb}{aa} xx$ mutatur in æquationem

pro tertia specie linearum secundi ordinis, si loco $+bb$ scribatur $-bb$, quare et conclusiones ex æquatione pro ellipsi deductæ hic quoque valent, si ubique $-bb$ loco $+bb$ scribatur. Dabuntur ideo in axe duo puncta F et G a

centro C intervallo $f = \sqrt{(aa + bb)}$ remota, et quidem talia, ut omnis recta FM et GM ex ejusmodi puncto ad curvam ducta per x rationaliter exprimi possit. Nimirum fiet FM =

$$\frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} - a, \text{ atque GM} =$$

$$\frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} + a. \text{ Ideo applicata orthogonalis in}$$

hoc puncto fit = $\frac{bb}{a}$. Puncta hæc sunt *Foci* hujus

curvæ et diameter orthogonalis in quo sita sunt, diameter seu *axis transversus* hujus curvæ, ordinata vero per focum ejus *parameter*. Ipsam igitur hanc curvam hyperbolas oppositas esse, nemo non videt. Ex his autem omnibus quæ a §. 183. usque ad hunc §. 192. sunt exposita patet, quod omnis curva secundi ordinis sit vel circulus, vel ellipsis, vel parabola, vel hyperbola, ideoque una ex sectionibus conicis. Omne igitur problema indeterminatum, quod ad æquationem secundi ordinis conducit, per sectionem quandam conicam geometricè construitur, cujusmodi est id, quod sequitur.

§. 193.

Data base AB trianguli ABC et summa vel differentia laterum AC et BC, invenire locum apicis C.

SOL. Ex apice C ad basin ducatur perpendicularis F.259.
 CD, ac ponatur $AB = b$, quia est constans. Cum au- 260.
 tem AD et CD sint variabiles, dicatur $AD = x$ et $DC = y$,
 erit $DB = b - x$, $AC = \sqrt{xx + yy}$, et $CB = \sqrt{DB^2 + DC^2} = \sqrt{bb - 2bx + xx + yy}$. Quodsi igitur pri-
 mo summa laterum $AC + CB$ detur $= a$, quae base
 $AB = b$ major erit, fiet $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{bb - 2bx + xx + yy} = a$, $\sqrt{bb - 2bx + xx + yy} = a - \sqrt{xx + yy}$; $bb - 2bx + xx + yy = a^2 - 2a\sqrt{xx + yy} + xx + yy$; $-2bx = a^2 - bb - 2a\sqrt{xx + yy}$, vel si ponatur $aa - bb = cc$,
 fiet $-2bx = cc - 2a\sqrt{xx + yy}$, vel $2a\sqrt{xx + yy} = cc + 2bx$, ideo $4a^2xx + 4a^2yy = c^4 + 4bccx + 4bbxx$,
 vel $4a^2yy = c^4 + 4bccx + 4bbxx - 4a^2xx$, quare cum
 sit $aa - bb = cc$, atque hinc $bb - aa = -cc$, fiet $4a^2yy = c^4 + 4bccx - 4ccxx$. Quodsi secundo ponatur diffe-
 rentia laterum AC et BC data esse, eaque sit $= d$, erit
 $b > d$, quia in quolibet triangulo quodcunque latus
 assumptum majus est differentia reliquorum. Præterea
 erit $\sqrt{xx + yy} - \sqrt{bb - 2bx + xx + yy} = d$, et ideo
 $bb - 2bx + xx + yy = dd - 2d\sqrt{xx + yy} + xx + yy$,
 vel $bb - 2bx = dd - 2d\sqrt{xx + yy}$, et $-2bx = dd - bb - 2d\sqrt{xx + yy}$. Quare posito hic $bb - dd = ee$,
 adeoque $dd - bb = -ee$, fiet $-2bx = -ee - 2d\sqrt{xx + yy}$ et $2d\sqrt{xx + yy} = 2bx - ee$, hinc $4ddxx + 4ddyy = 4bbxx - 4beex + e^4$, et $4ddyy = e^4 - 4beex + 4bbxx - 4ddxx$ vel $4ddyy = e^4 - 4beex + 4eexx$, ob $bb - dd = ee$. Utroque igitur casu locus problemati satisfaciens
 est sectio quædam conica. Restat ut inveniatur, quae-
 nam ex sectionibus conicis priori et quænam posteriori
 problematis casui satisfaciat. Quod igitur attinet ad pri-
 mam aequationem $4a^2yy = c^4 + 4bccx - 4ccxx$, basis AB
 trianguli ACB bisecetur in E, atque loco puncti A jam
 punctum E sumatur pro abscissarum initio. Ponatur
 $ED = z$, erit $AE = \frac{1}{2}b = x + z$, adeoque $x = \frac{1}{2}b - z$.
 Valore hoc pro x in aequatione substituto fiet $4a^2yy = c^4 + bbcc - 4cczz$, cum vero sit $bb = aa - cc$, habe-
 tur

tur $4aayy = aacc - 4cczz$ vel $yy = \frac{cc}{4} - \frac{cc}{aa} zz$,

quam æquationem esse pro ellipsi ultro patet. Hujus enim curvæ æquatio, abscissis a centro in diametro orthogonalis computatis, vocata semidiametro principali $= a$, et semidiametro conjugata $= \beta$, erat $yy = \beta\beta - \frac{\beta\beta}{aa} xx$, ex qua cum æquatione inventa comparata ad-

paret, fore $\frac{cc}{4} = \beta\beta$, adeoque $\beta = \frac{c}{2}$ et $c = 2\beta$.

Praeterea $\frac{cc}{aa} = \frac{4\beta\beta}{aa} = \frac{\beta\beta}{aa}$, hincque $4aa = aa$

et $2a = a$. Locus igitur quæsitus in casu problematis primo est ellipsis, cujus diameter orthogonalis est a et diameter conjugata $= c$. Factis igitur $EF = EG = \frac{1}{2}a$ erit FG ellipsis quæsitæ axis principalis, tum ducta per E recta HI ad FG normali, et factis $EH = EI = \frac{1}{2}c$ erit HI ipsis axis conjugatus. Puncta vero A et B erunt foci hujus ellipseos. Posito enim $z = \pm \frac{1}{2}b = EA = EB$ fit $4aayy = c^4 + bbcc - ccbb = c^4$, proinde $yy =$

$\frac{c^4}{4aa}$, et $y = AK = \frac{c^2}{2a}$, hinc $KL = 2AK =$

$\frac{c^2}{a}$, id est tertia proportionalis ad axem principalem

ejusque conjugatum, ex quo patet KL esse parametrum. In casu problematis secundo est $4ddy = e^4 - 4eebx + 4eexx$. Biseccetur et hoc casu AB in E atque loco puncti A sumatur E pro initio abscissarum. Quare posito $ED = z$, fiet $AD = x = \frac{1}{2}b + z$, et facta substitutione erit $4ddy = e^4 - 2eebb - 4eebz + eebb + 4eebz + 4eezz = e^4 - eebb + 4eezz$. Hic vero est $bb = ee + dd$, quare fit

$4ddy = e^4 - e^4 - eedd + 4eezz$, vel $yy = \frac{ee}{4} +$

$\frac{ee}{dd}$

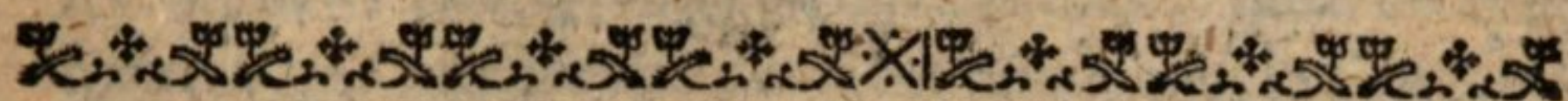
$\frac{ee}{dd} zz$, quam æquationem esse pro hyperbolis ultro patet. Erat enim æquatio pro hyperbolis, si abscissæ a centro in diametro orthogonalis computentur, et semidiameter orthogonalis ponatur $= a$, ejusque semiconjugata $= \beta$, hæc $yy = -\beta\beta + \frac{\beta\beta}{aa}xx$. Comparatio hujus æquationis cum ea, quæ inventa est, dat $-\frac{ee}{4} = -\beta\beta$, ideo $\beta = \frac{e}{2}$ et $e = 2\beta$; porro $\frac{\beta\beta}{aa} = \frac{ee}{dd} = \frac{4\beta\beta}{dd}$, proinde $4aa = dd$ et $d = 2a$. Sunt igitur in casu problematis secundo hyperbolæ locus quæsitus, quarum axis principalis est d et e axis conjugatus. Quodsi ideo fiat $EF = EG = \frac{1}{2}d$, erit FG diameter hujus curvæ orthogonalis. Puncta vero A et B sunt foci ipsius, quia posito $z = EA = EB = \pm \frac{1}{2}b$ fit $4ddyy = e^4 - eebb + eebb$, seu $4ddyy = e^4$ et $y = r \frac{e^2}{4dd} = \frac{e^2}{2d}$. Dupla igitur ordinata in A vel B est tertia proportionalis ad axem transversum et conjugatum, ex quo patet, eandem esse parametrum et adeo A et B focos hyperbolarum.

§. 194.

Attente qui perscrutatus est ea, quæ hætenus de solutione geometrica earum problematum indeterminatorum, quorum conditiones exprimuntur æquatione inter duas variables primi vel secundi ordinis, sunt exposita; is haud difficulter intelliget, omne problema, quod ad æquationem indeterminatam tertii ordinis perducit, construi posse per lineam tertii ordinis; illud vero, ex cujus conditionibus eruitur æquatio indeterminata quarti ordinis, per curvam quarti ordinis, et sic per-

ro. Ex iisdem vero patet, quod is, qui quodlibet problema indeterminatum ipsi propositum geometricè solvere cupit, completam curvarum theoriam habere debeat perspectam, quam in Geometria Sublimiori sumus tradituri. Haec causa est, cur in diversas linearum tertii et altiorum ordinum species, earumque proprietates, hic non inquirimus. Explicanda vero hoc loco erant linearum secundi ordinis proprietates palmariae, quia earundem cognitione carere prorsus nequit, qui veram Analysis Mathematicae indolem sibi reddere cupit perspectam. Unicum hic quoque notasse consultum erit, quod natura linearum in eodem plano descriptarum et aliis modis exprimi queat æquatione inter duas variables; quorum præter expositum præcipuus iste est, vi cuius omnia propositae lineae puncta ad unum aliquod punctum plani fixum C referuntur, atque æquatio quaeritur inter rectam variabilem $CM = z$, et angulum $ACM = \phi$, vel $\sin \phi$, $\text{tang. } \phi$, vel aliam quancunque lineam trigonometricam ad angulum ϕ relatam. Data enim ejusmodi æquatione, pro quovis angulo ACM definiri longitudo variabilis CM , sicque punctum curvæ M determinari potest. Quodsi pro curva AM data sit æquatio inter coordinatas orthogonales $CP = x$ et $PM = y$, invenitur æquatio pro eadem curva inter angulum $ACM = \phi$ et $CM = z$, si ponatur $y = z \sin \phi$ atque $x = z \cos \phi$, quia in triangulo rectangulo CPM est $\frac{y}{z} = \sin \phi$ atque $\frac{x}{z} = \cos \phi$ (§. 42.). Hinc vice versa, si data sit æquatio pro curva AM inter variabilem z , ac anguli ϕ finum et cosinum; posito $\sin \phi = \frac{y}{z}$; $\cos \phi = \frac{x}{z}$, atque præterea $z^2 = r^2(x^2 + y^2)$, reperitur æquatio

quatio pro eadem curva inter coordinatas orthogonales CP et PM.



SECTIO XII.

DE

SOLVTIONE PROBLEMATVM NON SIMPLICIVM DETERMINATORVM GEOMETRICA.

§. 195.

Quia æquationes analyticae omnes convenienter reductae ostendunt modum eliciendi quæsitum ex iis, quæ per litteras denotantur data exprimentes, non tantum arithmetice, si data expressa sint per numeros, sed quoque geometricè, si per lineas rectas exhibeantur, vel alia extensa, quae in Geometria solent considerari; restat, ut explicemus modum invendi radices æquationum per constructionem geometricam. Atque cum linea recta simplicissima sit earum, quae Geometria considerat, quantitatum; ejusmodi potissimum quæri solent methodi, quibus radices æquationum exhiberi possunt per lineas rectas. Potest hoc negotium confici multis modis, si *postulentur* delineationes in plano non tantum lineae rectae et circuli, sed et omnium curvarum algebraicarum, quæ exprimi possunt æquationibus inter duas variables, abscissam nimirum et applicatam, algebraicis. Quare plenaria omnium problematum non simplicium geometrica solutio expectari demum poterit ab eo, qui non tantum Geometriæ Elementaris sed et Sublimioris imbutus est scientia. Explicare tamen debet ipsa Analysis

lysis methodos huic scopo inservientes generales, ut præstantissimæ hujus Artis inveniendi dignitas atque universalis usus eo distinctius possit perspicui.

§. 196.

F.262.

Unitis duabus æquationibus indeterminatis, quarum quævis peculiarem definit lineam algebraicam, semper producit æquatio utramque lineam exprimens ad eandem axem et idem abscissarum initium relatam (§. 182.). Possunt vero ejusmodi linearum ita descriptarum una alteram in uno pluribusve punctis secare, atque hoc casu duæ earum curvarum applicatæ in puncto intersectionis æquales sunt. Hac itaque æqualitate supposita eliminatis litteris, quæ applicatas denotant, inveniuntur abscissæ, quæ ad puncta illa intersectionum pertinent, ex æquationibus, quibus curvæ definiuntur. Ad axem AB atque initium abscissarum C descripta sit parabola MDE definita per æquationem $y = -bx + xx$ sub angulo coordinatarum recto. Ad eundem axem et idem initium abscissarum descriptus sit circulus CFD, quem definit æquatio $rr = xx + uu$, littera r radium et u applicatam denotante: erunt ad puncta P et p, in quibus peripheria circuli parabolam secat, applicatæ y et u eadem. Proinde ad hæc puncta intersectionum, in quibus $u = y$, ob $y = -bx + xx$ atque $u = r(rr - xx)$, habetur $r(rr - xx) = -bx + xx$, atque sublata irrationalitate $rr - xx = bbxx - 2bx^3 + x^4$ vel $x^4 - 2bx^3 + (bb + 1)x^2 - rr = 0$. Hujus igitur æquationis radices sunt abscissæ ad puncta sectionis, quarum ergo hoc casu duæ saltem esse possunt, uti ex ipsa figura apparet. Generatim enim, si aliquæ radices æquationis ita repertæ imaginariæ fuerint, sectiones quoque illi x respondentes imaginariæ erunt. Non autem omni x , quæ ita elicitur, sectio quoque realis semper respondet, propterea quod cum y ponitur $= u$, omnes reperiri debent valores ipsius x , ad quas $y = u$,
etiam.

etiam si istae adplicatae y et u sint imaginariae. Apud imaginarias enim quantitates æqualitas quoque locum habet, quia v. g. $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}$. Ex numero itaque abscissarum realium, quae ita reperiuntur, ad numerum intersectionum concludi generationem non potest, nisi constet, nulli abscissae x respondere applicatam imaginariam y vel u . Sufficit vero, illud de una constare, quia ob $y = u$, si una harum adplicatarum realis sit, altera imaginaria esse non potest. Proinde sectionibus imaginariis nullus relinquetur locus, si in æquatione pro una earum curvarum y vel u æquetur functioni ipsius x uniformi, atque ipsa hujus curvæ æquatio sub forma generali $P + Qy = 0$ contineatur, si P et Q functiones ipsius x denotent. Tum enim, quia talis curva nullas habet applicatas imaginarias, fieri nequit, ut intersectiones imaginariæ oriantur. In casu præsentis intersectiones imaginariæ locum non habent, quia pro una curvarum assumptarum est $y = -bx + xx$ functio ipsius x uniformis. Atque proinde a numero radicum æquationis $x^4 - 2bx^3 + (bb + 1)x^2 - rr = 0$ realium ad æqualem numerum intersectionum eo casu tuto concludi potest. Hinc quoque vicissim, ipsis curvis æquationum $y = -bx + xx$ atque $yy = rr + xx$ ad eundem axem atque idem initium abscissarum descriptis, cum puncta intersectionis appareant, a numero intersectionum ad numerum radicum realium æquationis $x^4 - 2bx^3 + (bb + 1)x^2 - rr = 0$ eundem recte concluditur, atque ipsas illas radices exhibent abscissae CP et Cp in nostra figura, quarum igitur duæ sunt, una positiva, altera negativa.

§. 197.

Hisce ratiociniis nititur methodus generalis inveniendi æquationis cujuscunque non simplicis determinatæ radices reales omnes per constructionem geometricam. Proposita enim quacunque ejusmodi æquatione, cujus incognita est x , assumatur æquatio quædam indeter-

minata sub forma $P + Qy = 0$ contenta, ubi P et Q sunt functiones ipsius x , atque in ipsa proposita introducatur y loco $-\frac{P}{Q}$. Hoc facto enim duae habentur aequationes indeterminatae tales, ut eliminato y , substituto nimirum valore $-\frac{P}{Q}$ loco y in una earum, ipsa aequatio proposita resultet. Descriptis jam duabus curvis, quales duae repertae aequationes indeterminatae definiunt, ad eundem axem, et idem abscissarum initium, ex punctis, in quibus istae curvae se intersecant, ducantur applicatae ad axem; erunt abscissae respondentes radices aequationis propositae reales quaesitae. Hoc modo inveniuntur radices reales aequationis cubicae $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ponendo $x^2 = y$, ut fiat $x^3 = xy$. Quo valore in propositam aequationem introducto fit $xy + px^2 + qx + r = 0$, vel quoque $xy + py + qx + r = 0$. Construantur ad eundem axem idemque abscissarum initium duae curvae, quarum una definitur per aequationem $x^2 = y$, altera per aliquam aequationum hac substitutione productarum, erunt abscissae ad puncta intersectionum radices aequationis datae. Idem obtinetur posito $x^2 + px = y$, ut fiat $x^3 + px^2 = xy$, aequatio vero proposita sic mutetur $xy + qx + r = 0$, atque constructis eodem modo curvis aequationum $x^2 + px = y$ et $xy + qx + r = 0$. Si proposita aequatio fuerit biquadratica $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$; separatis prioribus duobus terminis $x^4 + px^3$ compleatur quadratum addendo $\frac{1}{4}p^2x^2$. Hoc quadratum $x^4 + px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2$ ponatur $= yy$, ut sit $x^2 + \frac{1}{2}px = y$; valor $x^4 + px^3 = yy - \frac{1}{4}ppxx$ introducatur in aequationem propositam, quae sic mutabitur $yy + \frac{1}{4}ppxx + qxx + rx + s = 0$, atque si lubet substituatur hic quoque valor quadrati x^2 , qui est $y - \frac{1}{2}px$, quo facto producitur $yy - \frac{1}{4}pppy + \frac{1}{8}p^3x + qy - \frac{1}{2}pqx + rx + s = 0$. Constructis jam, ut prius

curvis,

curvis, quarum una per æquationem assumptam, altera per alterutram ita elicitarum exprimitur, abscissæ ad puncta intersectionum erunt radices æquationis propositæ reales. Imaginariis intersectionibus locus non relinquitur, quia curva assumpta utroque casu est generis parabolici.

§. 198.

Nonnunquam ex ipsius problematis determinati conditionibus eruuntur duæ æquationes pro duabus curvis constructioni inservientibus. Sic problema de duplicatione vel multiplicatione quacunque dati cubi (§. 26. *Calc. Ext.*) reducitur ad illud: Inter duas rectas a et b datas invenire duas medias continue proportionales. Sit igitur prima mediarum, quas quaerere debemus, $= x$, et secunda $= y$, erit $a : x = x : y$, unde fit prima æquatio $xx = ay$. Deinde erit $x : y = y : b$, unde concluditur altera æquatio $yy = bx$. Eliminando igitur x , invenitur prima mediarum $x = \sqrt[3]{aab}$. Per constructionem vero geometricam invenitur eadem x intersectione duarum curvarum, quarum prima æquatione $xx = ay$ repræsentata est parabola, cujus parameter $= a$, altera vero æquatione $yy = bx$ repræsentata pariter parabola, cujus parameter est b , et cujus abscissæ capiuntur in recta ad prioris axem transversum in vertice A normali. Constructa itaque parabola CAM ad axem AP et initium abscissarum A ex æquatione $yy = bx$; constructa præterea parabola BAM ad eundem axem, idemque initium abscissarum ex æquatione $xx = ay$; ex puncto intersectionis M ducatur applicata MP ad axem normalis, abscissa CP erit mediarum inter a et b continue proportionalium prima. F. 263.

§. 199.

Negotium hoc aliter quoque perfici posse multis modis, a quovis adtendenti facile perspicitur; atque simul ex his abstrahi possunt regulæ, quibus convenien-

ter aequationum biquadraticis superiorum radices geometricae sunt detegendae. Lineis in eam rem opus est tertii aut quarti aut superiorum quoque ordinum, prout ipsa aequatio proposita minus vel magis alta est. Quando autem aequationes indeterminatas huic scopo infervientes elicimus, saepe in curvas incidimus, quarum difficilis est constructio, ac plerumque sat longo labore investigandum est, quae sit linea, quam aequatio producta definit. Tota vero constructionis geometricae pulchritudo consistit in facilitate executionis, atque proinde in hoc opere praeferendae semper sunt curvae, quae facilius construi possunt, iis, quarum difficilior est constructio.

Eum in finem praestat fere, duas eligere curvas, quibus uti velimus, atque a posteriori inquirere quaenam aequationes earum ope construi possint. Incipiamus a lineis rectis omnium linearum simplicissimis,

¶.264. atque deinde ad quasdam alias progrediamur his difficiliiores. Atque si duae lineae resolventes fuerint rectae EM et FM se in puncto M intersecantes, sumta sit recta EF pro axe in eoque punctum A pro abscissarum initio. Ex hoc puncto erigatur ad axem normalis AC rectam EM in B atque FM in C secans. Ponatur $AE = a$, $AF = b$, $AB = c$, $AC = e$, abscissa $AP = x$ et applicata $PM = y$, erit pro recta EM; $a : c = a + x : y$, vel $ay = ca + cx$, et pro altera FM invenitur $b : e = b - x : y$, vel $by = eb - ex$. Eliminata jam variabili x ex hisce aequationibus reperitur $bc(a + x) = ae(b - x)$ vel $x = \frac{abc - abc}{bc + ae}$

$= \frac{ab(e - c)}{bc + ae}$. Ideo per intersectionem duarum linearum

rectarum construi potest aequatio simplex $x = \frac{ab(e - c)}{ab + ae}$,

ad quam formam omnes omnino aequationes simplices revocari possunt. Proposita enim quacunque aequatione simplici, forma ipsius generalis haec est $Ax + B = 0$.

Si

Si cum hac comparetur aequatio $(bc + ae)x - ab(c - e) = 0$, ut termini respondentes aequales fiant, poni debet $A = bc + ae$ et $B = -ab(c - e)$. Duabus hisce aequationibus duae tantum ex quantitatibus constantibus a, b, c, e determinantur, proinde duae possunt pro arbitrio determinari, quod fiet ponendo $a = b = 1$ hoc vero

posito fiet $A = c + e$ atque $B = c - e$. Proinde $\frac{A + B}{2}$

$= e$, atque $\frac{A - B}{2} = c$. Si igitur datae fuerint coef-

ficientes aequationis simplicis $Ax + B = 0$ per lineas rectas, valor ipsius x per lineam rectam sic exhibebitur. Ducatur recta EF, quae fiat $= 2$, unitate vel data, vel pro arbitrio assumenda. Bisecetur EF apud A atque per

A ducta AC ipsi EF normali fiat $AB = \frac{A + B}{2}$ et $AC = \frac{A - B}{2}$. Ducantur rectae EB et EC, quae ne-

cessario seinvicem secabunt in puncto quodam M, quia ob triangula CAF et CAE apud A rectangula anguli apud E et F fiunt recto minores. A puncto M ad EF demittatur perpendicularis, erit EP valor ipsius x quaesitus. Non sine ambagibus sic invenitur valor quantitatis x , et proinde hac methodo uti raro consultum est, quia breviores ipsa Geometria Elementaris suppeditat. Sic quia

ex ipsa aequatione $Ax + B = 0$, vel $x = -\frac{B}{A}$ con-

cluditur $A : 1 = -B : -\frac{B}{A}$ ex §. 196. Cor. Geom. Elem.

observatis positionibus rectarum A et B, quae signa $+$ et $-$ indicant, habetur x per lineam rectam. Praetermittenda vero non erat methodus, quam explicamus,

applicatio ad casum hunc simplicissimum, quo indoles ipsius eo melius possit perspicui.

§. 200.

F.265.

Lineas rectas ratione facilitatis describendi excipit circulus; quare nunc inquirendum erit, quænam æquationes per intersectionem rectæ et circuli construi queant. Descripta igitur sit linea recta EM ad axem AP et initium abscissarum A, atque positis $AE = a$, $AB = b$, $AP = x$, $PM = y$, erit $a : b = a + x : y$, et $ay = b(a + x)$ æquatio pro linea recta. — Ad eundem axem idemque abscissarum initium sit descriptus circulus, cuius radius est $CM = c$; atque si ex centro C ad axem demittatur perpendicularum CD, positis $AD = f$, $CD = g$, erit $DP = x - f$ et $PM - CD = y - g$. Est vero ex natura circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$ hincque æquatio pro circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. Quia jam ex æquatione pro recta concluditur $y = \frac{ab + bx}{a}$, fit $y - g = \frac{a(b - g) + bx}{a}$

$$= b - g + \frac{bx}{a}, \text{ atque ipso hoc valore in altera æquatione substituto resultabit hæc æquatio } cc = xx - 2fx + ff + (b - g)^2 + \frac{2b(b - g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa}, \text{ sive}$$

$$+ \frac{aa}{bb} xx + \frac{2ab(b - g)}{a} x + \frac{aa(b - g)^2}{aa} = 0$$

$$+ \frac{aa}{bb} xx - \frac{2aaf}{a} x + \frac{aiff}{a} - aacc$$

Hujus proinde æquationis radices inveniri possunt per lineæ rectæ atque circuli intersectionem. Omnes vero æquationes quadraticæ in hac forma continentur. Forma enim hujus ordinis æquationum generalissima $Axx + Bx + C = 0$ reducitur ad superiorem formam, si

primo multiplicetur per $\frac{aa + bb}{A}$, ut primi termini

con-

convenient, atque hoc facto habetur $(aa + bb)xx + \frac{B(aa + bb)}{\Lambda}x + \frac{C(aa + bb)}{\Lambda}$. Deinde coaequatio

reliquorum terminorum dabit $2\Lambda ab(b - g) - 2\Lambda aaf = B(aa + bb)$, atque $af = b(b - g) - \frac{B(aa + bb)}{2\Lambda a}$. Præ-

terea est $aa(b - g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa + bb)}{\Lambda}$, ex

qua æquatione valore ipsius af substituto deducitur $(aa + bb)(b - g)^2 - \frac{Bb(b - g)(aa + bb)}{\Lambda a} + \frac{BB(aa + bb)^2}{4\Lambda\Lambda aa}$

$- aacc = \frac{C(aa + bb)}{\Lambda}$, atque $(b - g)^2 = \frac{Bb(b - g)}{\Lambda a}$

$- \frac{B(aa + bb)}{4\Lambda\Lambda aa} + \frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{\Lambda}$, ergo $b - g =$

$\frac{Bb}{2\Lambda a} \pm r\left(\frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{\Lambda} - \frac{BB}{4\Lambda\Lambda}\right)$. Hac igi-

tur æquatione et præcedente $af = b(b - g) - \frac{B(aa + bb)}{2\Lambda a}$

determinantur quantitates f et g , valoribus ipsarum a, b, c pro arbitrio sumtis. Ipsæ vero hæ quantitates ita de-

terminari debent, ut $\frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{\Lambda} - \frac{BB}{4\Lambda\Lambda}$ fiat

quantitas positiva, ne quantitas $b - g = AB - CD$ fieret imaginaria. Possumus itaque ponere $b = 0$, quo fa-

cto erit $g = r\left(cc + \frac{C}{\Lambda} - \frac{BB}{4\Lambda\Lambda}\right)$ atque $f = -$

$\frac{B}{2\Lambda}$. In æquatione igitur $g = r\left(cc + \frac{C}{\Lambda} - \frac{BB}{4\Lambda\Lambda}\right)$ unam

constantium g vel c pro arbitrio determinare licet, eo-
que facto simul altera est determinata. Posito proinde

$$g = \left(\frac{C}{A} + 1 \right) : 2 = \frac{C}{2A} + \frac{1}{2}, \text{ ut sit } \frac{C}{2A} + \frac{1}{2}$$

$$= r \left(cc - \frac{BB + 4AC}{4AA} \right) \text{ exinde concluditur } \frac{CC}{4AA} +$$

$$\frac{C}{2A} + \frac{1}{4} = cc - \frac{BB}{4AA} + \frac{C}{A} \text{ atque } cc = \frac{CC}{4AA} +$$

$$\frac{BB}{4AA} - \frac{C}{2A} + \frac{1}{4}. \text{ Substitutis his valoribus in æqua-}$$

tione pro circulo; duæ æquationes pro lineis, quarum
interfectione inveniuntur æquationis $Axx + Bx + C = 0$

$$\text{radices, erunt sequentes } y = 0, \text{ atque } \frac{CC}{4AA} + \frac{BB}{4AA}$$

$$- \frac{C}{2A} + \frac{1}{4} = xx + \frac{B}{A}x + \frac{BB}{4AA} + yy - \left(\frac{C}{A} + 1 \right) y +$$

$$\frac{CC}{4AA} + \frac{C}{2A} + \frac{1}{4} \text{ vel } xx + \frac{B}{A}x + yy - \left(\frac{C}{A} + 1 \right) y$$

$$+ \frac{C}{A} = 0. \text{ Si itaque æquationi } Axx + Bx + C = 0$$

$$\text{tribuatur forma } xx + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0, \text{ scriptis } p \text{ lo-}$$

$$\text{co } \frac{B}{A} \text{ atque } q \text{ loco } \frac{C}{A}, \text{ ut sit } xx + px + yy - (q +$$

$$1)y + q = 0, \text{ æquatio pro circulo resolvente erit } xx + px +$$

$$yy - (q + 1)y + q = 0, \text{ ex qua posito } y = 0 \text{ utique fit } xx +$$

$$px + q = 0. \text{ Ipsa vero hæc æquatio pro circulo exprimit,}$$

$$\text{abscissæ } x = 0 \text{ duplicem respondere applicatam, ex æqua-}$$

$$\text{tione } yy - (q + 1)y + q = 0 \text{ inveniendam. Hæc enim}$$

$$\text{resoluta dat } y = \frac{q+1}{2} \pm \frac{q-1}{2}, \text{ unde fit } y = q \text{ et } y$$

fit

ctio, ita ut radium circuli construentis computare non sit opus. Ducantur enim rectae AB et AD apud A se invicem normaliter secantes. Fiat $AE = -\frac{1}{2}p$ et $AF =$

$\frac{q+1}{2}$. Compleatur rectangulum AG, erit G centrum

circuli. Deinde capiatur $AD = q$ et $AC = 1$, erunt puncta C et D in peripheria circuli, proinde GC vel GD radius circuli describendi, qui secabit axem AB in duobus punctis H et K, eruntque AH et AK radices aequationis quaesitae, ambae negativae, si p et q sunt positivae quantitates; ambae positivae, si p fuerit negativa, et q positiva; una positiva et altera negativa, si p et q sint negativae quantitates.

Ipsa haec resolutio aequationis quadraticae ex principiis Geometricae elementaris deduci potest. Ex proprietate enim circuli §. 203. *Geom.* demonstrata patet, esse $AD : AK = AH : AC$. Quia vero $AK = x$; erit $AH = -p - x$: atque ob $AD = q$ et $AC = 1$, concluditur, esse $q : x = -p - x : 1$, proinde $-px - xx = q \times 1 = q$, atque $xx + px + q = 0$.

§. 201.

Considerandi jam veniunt duo circuli se intersecantes, ponaturque pro primo circulo $AD = a$, $CD = b$, et radius $CM = c$, $AP = x$, $PM = y$, erit $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$, atque ex natura circuli $xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc$. Pro altero circulo sit $Ad = f$, $dc = g$, ejusque radius $cM = b$ eritque $xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = bb$. Posterior aequatio si a priori subtrahatur, remanebit $2(f - a)x + aa - ff - 2(b + g)y + bb - gg = cc - bb$, ergo $y =$

$$\frac{aa + bb - ff - gg - cc + bb - 2(a - f)x}{2(b + g)}, \text{ ideo } b - y$$

$$= \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - bb + 2(a - f)x}{2(b + g)}$$

Ii 5

et

et $a - x = \frac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}$. Quia vero est

$(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$, facta substitutione invenitur

$$\begin{aligned} &+4(a-f)^2 - 4(a+f)(b+g)^2 + (b+g)^4 \\ &+4(b-g)^2 xx - 4(a-f)(aa-ff)x + 2(aa-cc)(b+g)^2 \\ &+4(a-f)(cc-bb) + 2(ff-bb)(b+g)^2 = 0. \\ &+ (aa-cc-ff+bb)^2 \end{aligned}$$

Hæc æquatio iterum quadratica est atque sub forma generali $Axx + Bx + C = 0$ contenta. Constantibus igitur arbitrariis simili modo, ut ante determinatis, patet, quamvis æquationem quadraticam quoque per intersectionem duorum circulorum construi posse. Simul vero manifestum est, quod æquatio algebraica quadratica altior per intersectionem duorum circulorum construi non possit, quia duo circuli in pluribus, quam duobus punctis se interfecare nequeunt. Cum igitur eadem æquatio quadratica construi possit per intersectionem rectæ et circuli, hæc constructio illi, quæ duos circulos requirit, merito præfertur. Denique ex his concludere quoque possumus, quod omne problema geometricum, cujus conditiones exprimi possunt æquatione quadam quadratica, solvi possit per Geometriam elementarem.

§. 268.

§. 202.

Sit curva GFH parabola, quam secet circulus BMm. Ex circuli centro C in axem AP cadat perpendicularum CD, sitque $AP = x$, $PM = y$, $AD = a$, $CD = b$, radius $CM = c$, erit æquatio pro circulo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = cc$. Sit FB parabolæ latus transversum axi AP hic assumptæ normale, sitque $AE = f$, $EF = g$, parabolæ parameter $= 2h$, erit ex natura parabolæ $EP^2 = 2h(EF + PM)$, id est $(x-f)^2 = 2h(g+y)$. Inde concluditur $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$, et $y-b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b+g)$. Quod

si hic valor in priori aequatione substituatur, eliminabitur y , eritque

$$\frac{(x-f)^4}{4bb} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{b} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

five

$$x^4 - 4fx^3 + 6ffx^2 - 4fb(b+g)x^2 + 4fb(b+g)x + 4bb(b+g)^2 = 0,$$

$$+ 4bb - 8abb + 4aabb - 4ccb$$

cujus æquationis radices erunt abscissæ AP, Ap, Ap, Ap. Insunt vero in eadem aequatione sex quantitates constantes a, b, c, f, g, h , ubi vero summa duarum $b+g$ pro una est reputanda, ut quinque solum, ponendo $b+g=k$, supersint. Posito nimirum $CD + EF = b+g = k$ ista habetur æquatio,

$$x^4 - 4fx^3 + 6ffx^2 - 4fbkx^2 + 4fbkx + 4bbk^2 = 0,$$

$$+ 4bb - 8abb + 4aabb - 4ccb$$

ad quam formam omnis æquatio biquadratica revocari potest. Proposita enim æquatione

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0,$$

erit comparatione instituta

$$4f = A, \text{ vel } f = \frac{1}{4}A$$

$$6ff - 4bk + 4bb = B, \text{ five } \frac{3}{8}AA - 4bk + 4bb = B.$$

Unde concluditur

$$k = \frac{3AA}{32b} + b - \frac{B}{4b},$$

$$4f^3 - 4fbk + 8abb = C,$$

$$\text{five } \frac{1}{16}A^3 - \frac{3}{32}A^3 - Abk + \frac{1}{4}AB + 8abb = C,$$

unde

$$\text{unde } a = \frac{A^3}{256bh} + \frac{A}{8} - \frac{C}{8bh}.$$

$$\text{Denique est } (ff - 2bk)^2 + 4aabh - 4ccb = D,$$

$$ff - 2bk = \frac{B}{2} - 2bh - \frac{AA}{16},$$

$$\text{et } 2ab = \frac{A^3}{128b} + \frac{Ab}{4} - \frac{AB}{16b} + \frac{C}{4b}. \text{ Quibus va-}$$

loribus substitutis invenitur aequatio c et b involvens.

§. 203.

Quia in omni aequatione determinata tolli potest terminus secundus, (§. 110.) ponamus hoc factum esse, atque hanc aequationem esse construendam

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Erit itaque primo $f = 0$, secundo $k = b - \frac{B}{4b}$, tertio

$$a = \frac{C}{8bh}, \text{ atque ob } 2bk - ff = 2bh - \frac{B}{2}, \text{ et } 2ab =$$

$$\frac{C}{4b}, \text{ quarto } 4b^4 - 2Bbh + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16bh} - 4ccb = D,$$

unde concluditur $64ccb^4 = CC + 4BBbh - 32Bb^4 + 64b^5 - 16Dhb$, ideoque $8ccb = \sqrt{(4bh(B - 4bh)^2 + CC - 16Dhb)}$. Jam eo dispiciendum est, ut tam c , quam

b obtineant valores reales. Ideo ponatur $c = b - \frac{B+q}{4b}$,

eritque $CC - 16Dhb + 8Bbhq - 32b^4q - 4bhqq = 0$. Duo, vero, ut quaesito satisfiat, casus sunt distinguendi, alter, quo D est quantitas positiva, ut $+EE$, alter, quo D est quantitas negativa, puta $-EE$. Sit itaque

I. D quantitas positiva, et construenda aequatio

$$x^4 + Bx^2 - Cx + EE = 0.$$

Pro hoc casu ponatur $q = 0$, ut sit $c = \frac{4bh - B}{4b}$, ac

fiet

fiet $\frac{CC}{16EE} = hh$, unde $h = \frac{C}{4E}$, alque $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$,

praeterea $k = c' = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, $a = \frac{2EF}{C}$, $f = 0$.

II. Sit D quantitas negativa et construenda aequatio

$$x^4 + Bx^2 - Cx - EE = 0.$$

Hoc casu fiet $64ech^4 = CC + 4hb(4hb - B)^2 + 16EEhb$ quae aequatio realem pro c valorem praebet, quidquid pro b assumatur. Fiet enim $c =$

$$\frac{\sqrt{CC + 4hb(4hb - B)^2 + 16EEhb}}{8hb}. \text{ Assumpto itaque}$$

b tali, ut facillima ipsius c constructio inde consequatur, ut ante habebitur $AE = f = 0$, $CD + EF = k = c = \frac{4hb - B}{4b}$, et $AD = a = \frac{C}{8hb}$. Si ponatur $E = 0$,

exinde concluditur constructio aequationis cubicae $x^3 + Bx - C = 0$ ope circuli et parabolae.

§. 204.

Sumtis nunc duabus lineis secundi ordinis quibuscunque, quarum aequationes ad communem axem et idem abscissarum initium relatae sint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$

$$\text{et } \alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$$

quae continentur sub formis

$$P + Qy + Ryy = 0$$

$$\text{et } p + qy + ryy = 0,$$

si P et p sint functiones secundi ordinis ipsius x , Q et q , vero primi ordinis, R vero et r constantes; eliminabitur y secundum regulas §. 34. expositas, tuncque prodibit aequatio biquadratica. Per intersectionem itaque duarum sectionum conicarum quarumvis altioris gradus aequationes construi nequeunt, quam biquadraticae. Quare cum idem praestari queat ope circuli et parabolae,

haec

haec constructio reliquis praefertur. Idem quoque ex natura linearum secundi ordinis praevideri poterat, quae a linea recta in duobus, non vero pluribus punctis secari possunt, unde duae rectae sectionem conicam in quatuor secare poterunt punctis. Cum itaque systema duarum rectarum sit species linearum secundi ordinis; patet, duas lineas secundi ordinis in quatuor punctis se interfecare posse. Quodsi haec ratiocinia applicentur ad duas lineas, quarum una est secundi, altera tertii ordinis, quae exprimuntur his aequationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$

$$\text{et } p + qy + ryy + sy^3 = 0,$$

ubi p est functio trium dimensionum, q duarum, r unius, et s quantitas constans, per eliminationem ipsius y habebitur aequatio ordinis sexti. Ideo per intersectionem lineae tertii ordinis cum sectione conica aequationes sexto ordine altiores construi nequeunt. Idem ex natura utriusque ordinis patet. Quia enim lineae tertii ordinis a linea recta in tribus secari possunt punctis, eadem a duabus rectis, quae junctim sumtae speciem linearum secundi ordinis constituunt, in sex punctis poterunt interfecari. Similibus ratiociniis generaliter demonstratur, per intersectionem duarum curvarum, quarum una sit ordinis m , altera ordinis n , construi posse omnes aequationes, ordinem mn non excedentes, quia duae ejusmodi curvae in punctis mn se invicem secare possunt.



SECTIO XIII.

DE

SECTIONIBVS ANGVLORVM ET ARCVVM CIRCVLARIVM.

§. 205.

Posito radio circuli $= r$ semper est $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = rr$, si z angulum quemcunque denotet, cujus producti factores sunt $\cos. z + \sin. z r - 1$ atque $\cos. z - \sin. z r - 1$, ita ut sit $(\cos. z + \sin. z r - 1) \times (\cos. z - \sin. z r - 1) = rr$, atque

$$\frac{(\cos. z - \sin. z r - 1)}{r} = 1, \text{ quod productum reale est,}$$

licet factores sint impossibiles. Si loco factoris

$$\frac{(\cos. z - \sin. z r - 1)}{r} \text{ assumatur iste } \frac{\cos. y + \sin. y r - 1}{r};$$

$$\text{invenitur productum } \frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)(\cos. y + \sin. y r - 1)}{rr}$$

$$= \frac{\cos. y \cdot \cos. z - \sin. y \cdot \sin. z}{rr} + \frac{(\cos. y \cdot \sin. z + \sin. y \cdot \cos. z) r - 1}{rr}$$

$$\text{Est vero } \frac{\cos. y \cdot \cos. z - \sin. y \cdot \sin. z}{r} = \cos(y + z), \text{ atque}$$

$$\frac{\cos. y \cdot \sin. z + \sin. y \cdot \cos. z}{r} = \sin(y + z), \text{ quod patet}$$

ex §. 40. si in analogiis ibidem inventis loco 1 scribatur r . Proinde est productum

$$\frac{(\cos. y + \sin. y r - 1)(\cos. z + \sin. z r - 1)}{rr}$$

rr

$$= \frac{\cos. (y+z) + \sin (y+z) r^{-1}}{r}. \text{ Eodem modo inve-}$$

$$\text{nitur } \frac{(\cos. y - \sin. y r^{-1}) (\cos. z - \sin. z r^{-1})}{rr}$$

$$= \frac{\cos. (y+z) - \sin (y+z) r^{-1}}{r}. \text{ Pari modo inve-}$$

$$\text{nitur } \frac{(\cos. x \pm \sin. x r^{-1})}{r} \times \frac{(\cos. y \pm \sin. y r^{-1})}{r} \times$$

$$\frac{\cos. z \pm \sin. z r^{-1}}{r} = \frac{\cos (x+y+z) \pm \sin (x+y+z) r^{-1}}{r}.$$

$$\text{Posito itaque } x=y=z \text{ invenitur } \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^2}{r}$$

$$= \frac{(\cos. 2z \pm \sin. 2z r^{-1})}{r}; \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^3}{r} =$$

$$\frac{\cos 3z \pm \sin 3z r^{-1}}{r}. \text{ Atque ex his deducitur}$$

$$\text{formula generalis } \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^n}{r} =$$

$$\frac{\cos. nz \pm \sin. nz r^{-1}}{r}. \text{ Si enim formula haec vera}$$

$$\text{est pro } \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^n}{r}; \text{ ea simul ve-}$$

$$\text{ra est pro } \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^{n+1}}{r}. \text{ Atque hoc}$$

$$\text{exinde patet, quia } \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^{n+1}}{r}$$

$$= \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})^n}{r} \times \frac{(\cos. z \pm \sin. z r^{-1})}{r}, \text{ quod}$$

$$\text{pro-}$$

productum posito $\frac{(\cos. z \pm \sin. z r - 1)^n}{r^n} =$

$$\frac{\cos. nz \pm (\sin. nz) r - 1}{r} \text{ invenitur } =$$

$$\frac{\cos. (n+1)z \pm (\sin. (n+1)z) r - 1}{r}. \text{ Valet vero haec}$$

formula pro dignitate prima et secunda; hinc pro omnibus, si exponens sit numerus integer, quod hic supponitur.

§. 206.

Ex duabus istis æquationibus

$$\frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)^n}{r^n} = \frac{\cos. nz + \sin. nz r - 1}{r}$$

$$\text{atque } \frac{(\cos. z - \sin. z r - 1)^n}{r^n} = \frac{(\cos. nz - \sin. nz r - 1)}{r}$$

concluditur addendo

$$\frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)^n + (\cos. z - \sin. z r - 1)^n}{r^n} = \frac{2 \cos. nz}{r};$$

et subtrahendo

$$\frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)^n - (\cos. z - \sin. z r - 1)^n}{r^n} = \frac{2 \sin. nz r - 1}{r};$$

ex quibus æquationibus denuo concluditur

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)^n - (\cos. z - \sin. z r - 1)^n}{2r^n - 1r - 1}, \text{ et}$$

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sin. z r - 1)^n + (\cos. z - \sin. z r - 1)^n}{2r^n - 1}.$$

Evolutis igitur binomiis hisce per series, erit

$$\sin. nz = \left(\frac{n}{1} (\cos. z)^{n-1} \sin. z - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)$$

Kk

(cos. z)

$$\begin{aligned}
 & (\cos. z)^n - 3 \sin. z^3 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 & (\cos. z)^n - 5 \sin. z^5 - \text{etc.}) : r^n - 1; \text{ atque } \cos. nz = (\cos. \\
 & z)^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} (\cos. z)^{n-2} (\sin. z)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 & (\cos. z)^{n-4} (\sin. z)^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\
 & (\cos. z)^{n-6} (\sin. z)^6 + \text{etc.}) : r^n - 1. \text{ Sit } s = \sin. z, \text{ at-} \\
 & \text{que } c = \cos. z, \text{ eritque}
 \end{aligned}$$

$$\sin. z = s$$

$$\sin 2z = (2cs : r$$

$$\sin 3z = (3ccs - s^3) : rr$$

$$\sin 4z = (4c^3s - 4cs^3) : r^3$$

$$\sin 5z = (5c^4s - 10ccs^3 + s^5) : r^4$$

$$\sin 6z = (6c^5s - 20c^3s^3 + 6cs^5) : r^5$$

$$\sin 7z = (7c^6s - 35c^4s^3 + 21ccs^5 - s^7) : r^6$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

$$\cos. z = c$$

$$\cos 2z = (cc - ss) : r$$

$$\cos 3z = (c^3 - 3css) : r$$

$$\cos 4z = (c^4 - 6ccss + s^4) : r$$

$$\cos 5z = (c^5 - 10c^3ss + 5cs^4) : r^4$$

$$\cos 6z = (c^6 - 15c^4ss + 15ccs^4 - s^6) : r^5$$

$$\cos 7z = (c^7 - 21c^5ss + 35c^3s^4 - 7cs^6) : r^6$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Si s denotet chordam arcus z , c chordam arcus, qui est ipsius z complementum ad semicirculum, atque r diametrum circuli; prior formula simul est pro chorda arcus multipli, atque posterior pro ejusdem arcus multipli chorda complementi ad semicirculum. Formulae

$$\text{enim } \frac{\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z}{r} = \cos. (y + z) \text{ atque}$$

$$\frac{\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z}{r} = \sin (y + z) \text{ verum etiam}$$

sunt,

sunt, r denotante diametrum *sin* chordam, atque *cos.* chordam complementi ad duos quadrantes. Quia $ss = rr - cc$, et ipsius ss potentiae pariter rationales sunt, substituto hoc valore prodit cosinus arcus multipli per solum cosinum simpli et radium determinatus. Simili quoque modo ex sinuum formula excluditur cosinus substituendo $s = r(rr - cc)$, quo tamen facto prodit formula non libera ab irrationalitate.

§. 207.

Ex iisdem formulis eliciuntur aequationes arcus vel anguli in quocunque partes æquales secti sinum atque cosinum, vel chordam atque chordam complementi definientes. Sit arcus, cujus cosinus est a , bifariam secti exhibendus cosinus; atque eum in finem in formula $\cos. 2x = (cc - ss) : r$ poni debet a loco $2x$, x loco c , erit $a = (xx - ss) : r$, vel $(2xx - rr) : r$, quia $ss = rr - cc$, unde concluditur $xx = \frac{rr + ra}{2}$, atque x

$$= \pm r \frac{rr + ra}{2}.$$

Hæc æquatio duplicem indicat cosinum pro arcus, cujus cosinus est a , dimidio. Eodem modo patet, æquationem pro cosinu arcus in tres partes æquales secti esse tertii gradus; et generaliter, æquationem pro cosinu arcus in n partes æquales secti n dimensionum esse, atque pro arcu in n partes æquales secti inveniri n cosinus. Sic quoque ratio reliquarum æquationum erit comparata, quibus ex data chorda, sinu, etc. arcus propositi quaeritur chorda, sinus, etc. arcus submultipli. Ipsa igitur quæstio de angulo in partes n secando ita debet esse comparata, ut eidem tot responsa satisfaciant, quot partes arcus propositi æquales proponuntur. Quod ut clarius pateat, ad sequentia adtendendum erit.

§. 208.

F.269. In circulo ADBE ductae sit chorda AB, eaque erit chorda arcuum omnium ejus circuli ad puncta A et B terminatorum. Primo enim pertinet ad arcum ADB, qui sit $= a$; deinde, si incipiendo ab A et transeundo per DBEA describatur peripheria integra, atque eidem arcus a addatur, erit AB quoque chorda arcus ADBEADB $= a + P$, si P integram denotet peripheriam. Eodem modo si incipiendo ab A et pergendo versus D describatur peripheria ADBEA, bis ter sicque porro, adjecto singulis vicibus arcu ADB, semper habebitur arcus incipiens in A et terminatus in B. Dicta ergo peripheria $= P$ et arcu AD $= a$, est recta AB communis chorda arcuum $a, a + P, a + 2P, a + 3P, \dots a + mP$, notante m integrum positivum quemvis. Observandum vero est, etsi chorda AB arcubus his omnibus quantitate eadem respondeat, signo tamen, quod positionem ejusdem indicat, eandem non esse. Scilicet, uti cosinus et tangentes arcuum quadrante majorum, semicirculo minorum, iidem sunt quantitate cum cosinibus et tangentibus arcuum quadrante minorum, signis tamen oppositis gaudent; ita chorda arcus a peripheria minoris positiva assumpta arcuum $a + P, a + 3P, \dots a + (2k + 1)P$ chordae negativæ sunt, sed arcuum $a + 2P, a + 4P, a + 6P - - - a + 2kP$ positivæ, si k sit integer positivus. Concipiatur enim AB circa A tanquam centrum revolvi, puncto B peripheriam BEAD transeunte, manifestum est, ubi B venit in A, evanescere BA, et deinde cum B pertransit arcum ADB renasci sub conditione opposita. Cum igitur ad arcum AB addendo peripheriam integram, chorda quavis vice *semel* per statum evanescentie transeat, consequens est, ut alternatim positiva et negativa renascatur. Chorda igitur $+ AB$ pertinet ad arcus

$$1.) a, a + 2P, a + 4P \quad . \quad . \quad . \quad a + 2kP$$

et

et chorda AB ad arcus

$$\text{II.) } a + P, a + 3P, a + 5P \quad . \quad . \quad . \quad a + (2k + 1)P$$

Pertinet vero etiam chorda AB ad arcum $BEA = P - a$, $BEADBEA = 2P - a$, et sic porro addendo semper peripheriam integram. Ideo ex præcedentibus simul intelligitur, pertinere chordam $+ AB$ ad arcus

$$\text{III.) } P - a, 3P - a, 5P - a \quad . \quad . \quad . \quad (2k + 1)P - a$$

Sed chordam $- AB$ ad arcus

$$\text{IV.) } 2P - a, 4P - a, 6P - a \quad . \quad . \quad . \quad 2kP - a$$

Quaerere igitur chordarum ope arcum, qui sit $\frac{I}{n}$

arcus chordae datae AB, est quaerere chordas omnes ar-

cuum omnium, quorum quilibet est $\frac{I}{n}$ arcus alicujus

seriebus I et III contenti, si chorda AB sumatur positiva, sed seriebus II et IV contenti, si chorda sit negativa.

§. 209.

Generalis definitio sinus et cosinus hæc est: adduo^{F.270.} extrema arcus alicujus puncta ductae sint rectae ex centro, et ex alterutro extremo B in rectam ad alterum extremum, si opus est productam, demissum perpendicularum BD; erit hæc BD sinus arcus cujusvis easdem conditiones habentis, et pars CD rectae CA inter centrum et finem intercepta cujusvis ejusmodi arcus cosinus. Cum ergo earum, quae ex centro ad arcus extrema ductae sunt, rectarum altera per B non transiens, circum in duobus punctis A et E secare possit; arcus omnes, quibus communis est sinus BD, communem habent terminum B, alter vero illorum terminus est vel A vel E. Crescente arcu AB notum jam est, crescere sinum usque ad quadrantem, deinde rursus decrescere, et in E evanescere, ubi arcus $AB = \frac{1}{2}P$, continuato deinde arcu ultra E sinum renasci negativum, eaque conditione crescere et decrescere denuo si arcus excedat $\frac{3}{4}P$, donec ad arcum $= P$ iterum evanescat. Ita qualibet semiperi-

pheria addita sinus transit per 0 in statum oppositum. Si itaque sit arcus $AB = a$; positivus sinus BD spectat ad hanc arcuum seriem

I.) $a, a + P, a + 2P, \dots, a + kP$
negativus autem ad sequentem

II.) $a + \frac{1}{2}P, a + \frac{3}{2}P, a + \frac{5}{2}P, \dots, a + \frac{2k-1}{2}P.$

Praeterea cum BD sit etiam sinus arcus $BbE = \frac{1}{2}P - a$, sinus positivus BD spectat ad arcus

III.) $\frac{1}{2}P - a, \frac{3}{2}P - a, \dots, \frac{2k-1}{2}P - a$

negativus vero ad arcus

IV.) $P - a, 2P - a, \dots, (k+1)P - a.$

Quaerere itaque sinum, qui spectet ad arcum $\frac{1}{n}$ arcus, cujus sinus est $+ BD$, est quaerere tot sinus diversos, quot pertinent ad arcus I, III, divisos singulos per n .

Cofinus idem positivus CD spectat ad arcus

I.) $a, a + P, a + 2P, a + 3P, \dots, a + mP$
pariter atque ad arcus

II.) $P - a, 2P - a, 3P - a, \dots, mP - a$

Cofinus $- CD$ vero pertinet ad arcus

III.) $\frac{1}{2}P - a, \frac{1}{2}P - a + P, \frac{1}{2}P - a + 2P, \dots, \frac{1}{2}P - a + mP,$
et praeterea ad arcus

IV.) $\frac{1}{2}P + a, \frac{1}{2}P + a + P, \frac{1}{2}P + a + 2P, \dots, \frac{1}{2}P + a + mP$

Quaerere itaque cosinum, qui pertinet ad arcum $\frac{1}{n}$ arcus, cujus cosinus est $+ CD$, est quaerere tot cosinus diversos, quot pertinent ad arcus I., II, divisos singulos per n .

Similia de tangentibus, cotangentibus, secantibus vera sunt, quod cuivis adtendenti facile patet.

§. 210.

Datus sit cosinus $+CD$, sitque arcus, ad quem pertinet hic cosinus, in partes quotcunque aequales secandus, atque secandi erunt omnes arcus isti a , $P - a$, $P + a$, $2P - a$, $2P + a$, $3P - a$, $3P + a$, et ita porro. Sit igitur primo in duas partes secandi; erunt partium eae, quae ab A inchoantur, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}a$, $P - \frac{1}{2}a$, $P + \frac{1}{2}a$, $\frac{3}{2}P - \frac{1}{2}a$, etc. Sed partium harum quinta eodem puncto terminatur, quo prima, sexta eodem quo secunda, idque continuo ita in orbem redit. Si enim arcus inter punctum A et quodcunque punctum peripheriae B vel F interceptus dicatur huius puncti B vel F distantia a puncto A secundum partem datam, quæ hic sumitur ABEF, et ita porro; sique a denotet arcum AB peripheria minorem, P vero denotet ipsam peripheriam; eadem erunt puncta peripheriae, quorum distantiae a puncto A sunt a , $P + a$, $2P + a$, et ita porro, quotiescunque peripheria repetatur. Atque semper prodibit distantia minima vel arcus AB, si a data quacunque distantia peripheria, quam notet P, quoties fieri potest, subtrahatur. Quatuor ergo tantum puncta erunt, quibus arcus quæsiiti terminantur. Præterea duo quaevis puncta, quorum distantiae secundum ABEF in peripheria captae diversæ quidem sunt, sed ita, ut earum una reducatur ad minimam a , altera autem ad $P - a$ itidem minimam; vel una ad minimam $\frac{1}{2}P - a$, altera ad minimam $\frac{1}{2}P + a$, id est, quorum distantiae minimae simul additæ peripheriam complent, eundem habent cosinum. Jam arcuum inventorum $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}a$, $P - \frac{1}{2}a$ extremis atque mediis sibi invicem additis fit $\frac{1}{2}a + P - \frac{1}{2}a = P$, atque $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}a = P$. Ideo si puncta secantia determinare velimus per arcum cosinus; pluribus quam duobus cosinibus ad hanc sectionem absolvendam opus non erit; pro quibus ii poterunt sumi, qui pertinent ad arcus $\frac{1}{2}a$, et $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}a$.

Si arcus a sit trifecandus, erunt arcuum pariter fecandorum partes, quae inchoantur apud A , istae $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}P - \frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}P - \frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}a$, $P - \frac{1}{3}a$, $P + \frac{1}{3}a$, etc, quarum partium postrema eodem puncto terminatur, quo prima. Atque eodem modo, ut ante concludendo invenitur, sex tantum esse puncta diversa, quibus omnes arcus quaesiti terminantur; quæ per tres cosinus dantur, quia arcubus legitime junctis, duo quilibet $\frac{1}{3}a$ et $P - \frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}P - \frac{1}{3}a$ et $\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}a$ et $\frac{2}{3}P - \frac{1}{3}a$ peripheriam complent. Absolvetur itaque hæc sectio per solos cosinus arcuum $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}P + \frac{1}{3}a$. Eodem modo, si in quatuor partes aequales fecandus proponatur arcus, quatuor reperientur cosinus, per quos istae sectiones universaliter dantur. Si in quinque partes fecandus erit arcus a , quinque cosinibus res absolvetur et generatim tot cosinibus, in quot partes arcus fecandus proponitur. Similia ratiocinia erunt instituenda, si chordae, vel sinus, vel tangentis, etc, ope arcus fecandus sit.

§. 211.

Si ex formulis pro sinibus §.206. inventæ eliminentur potestates pares ipsius s , ponendo $rr - cc$ loco ss , inveniuntur formulæ sequentes

$$\sin z = s$$

$$\sin 2z = 2cs : r$$

$$\sin 3z = (4cc - rr)s : rr$$

$$\sin 4z = (8c^3 - 4rrc)s : r^3$$

$$\sin 5z = (16c^4 - 12r^2c^2 + r^4)s : r^4$$

$$\sin 6z = (32c^5 - 32r^2c^3 + 6r^4c)s : r^5$$

$$\sin 7z = (64c^6 - 80r^2c^4 + 24r^4c^2 - r^6)s : r^6$$

et ita porro.

Quodsi itaque universa circuli peripheria in datum numerum partium æqualium fecanda sit; sequentem in modum erit ratiocinandum.

Sinus integræ circuli peripheriæ est $= 0$. Sed si fecan-

fecandus proponatur arcus, cuius sinus est $= 0$; fecan-
 da erit $\frac{1}{2}P$, P , $\frac{3}{2}P$, $2P$, $\frac{5}{2}P$, et ita porro. Omnium enim
 horum arcuum, qui inchoati apud A vel apud E per idem
 punctum A terminantur, sinus itidem est $= 0$. Quod-
 cunque fuerint partes, in quas arcus isti secandi sunt,
 semper inter easdem reperientur $\frac{1}{2}P$, P , $\frac{3}{2}P$, $2P$, et ita
 porro, quorum sinus $= 0$. Si bisectione imperetur, par-
 tes erunt $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{3}{4}P$, P , $\frac{5}{4}P$, $\frac{3}{2}P$, etc; si trisectione: erunt
 partes $\frac{1}{6}P$, $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{2}{3}P$, $\frac{5}{6}P$, P , et ita porro. Atque
 inter has partes omnes eae reperiuntur, quarum sinus est
 nihilum. Possunt autem hae sectiones in universum ne-
 gligi, quia ducta diametro ultro se manifestant. Reli-
 quae sectiones sic reperiuntur. Pro arcu, cuius sinus est
 0 , biseccando, habemus $2cs : r = 0$, et proinde vel $s =$
 0 , vel $c = 0$, vel utrumque, quia r est datae magnitudi-
 nis. Puncta vero, ad quae $s = 0$, non quaeruntur.
 Est itaque $c = 0$, quod indicat, rectam, quae impera-
 tam sectionem praestet, diametro AB in centro normali-
 ter insistere. Pro trisectione est $(4cc - rr)s : rr = 0$, et
 quia non est $s = 0$ ex hypothesis, erit $4cc - rr = 0$, et
 $4cc = rr$, unde $c = \pm \frac{1}{2}r$. Pro sectione in quatuor
 partes invenitur $8c^3 - 4rrc = 0$, ideo $2c^2 - rr = 0$, $c =$
 $\pm rr^{\frac{1}{2}}$. Pro sectione in quinque partes aequales est

$$16c^4 - 12r^2c^2 + r^4 = 0; \quad c^4 - \frac{3}{4}r^2c^2 = -\frac{r^4}{16}; \quad cc =$$

$$\frac{3}{8}r^2 \pm r \frac{5}{64}r^2, \quad \text{vel } cc = rr \times \frac{3 \pm r^5}{8}, \quad \text{ergo } c =$$

$$\pm rr \frac{3 \pm r^5}{8}. \quad \text{Pro sextisectione est } 32c^5 - 32r^2c^3$$

$$+ 6r^4c = 0; \quad c^4 - r^2c^2 = -\frac{3}{16}r^4; \quad cc = \frac{rr}{2} \pm$$

$$r \frac{1}{16}r^4, \quad \text{vel } cc = \frac{1}{2}rr \pm \frac{1}{4}rr = \frac{2rr \pm rr}{4}; \quad \text{ergo } c = \pm$$

$\frac{1}{2}rr(2 \pm 1)$; id est duo c erunt $\pm \frac{1}{2}r$, et duo c reliqui $= \pm \frac{1}{2}rr$. Si septisectio imperetur, erit $64c^6 - 80rrc^4 + 24r^4c^2 - r^6 = 0$, qua æquatione resoluta sectio quæfita dabitur. Eodem modo pro quavis alia sectione concludendum erit.

§. 212.

Potest itaque circuli peripheria dimidia, in quemlibet numerum partium, qui non excedit senarium, geometricè dividi, quo facto tota peripheria in bis tot partes æquales dividitur. In septem vero partes æquales si dimidia peripheria vel integra dividenda sit, æquatio invenitur, quæ circuli et lineæ rectæ intersectione solvi non potest. Tanto minus divisiones in numerum partium hoc majorem in potestate Geometriæ Elementaris sunt, nisi, arcus continuo bisecando ex aliqua priorum deduci possunt. Sic peripheria in decem partes æquales divisa geometricè dividitur in 20, in 40, et ita porro. Possunt ex hisce latera figurarum regularium circulo dato inscriptorum brevi calculo deduci. Sit AB tertia pars dimidiæ peripheriæ, erit BAF tertia pars peripheriæ integræ, et BF latus trigoni regularis circulo inscribendi. Cum autem sit $BD = r(CBq - CDq)$, erit generatim pro omnibus figuris regularibus $BF = 2r(CBq - CDq)$. Cum igitur ad trisectionem sit $CD = \frac{1}{2}r$, erit $BF = 2r(rr - \frac{1}{4}rr)$. Sic pro quadrilatero regulari invenitur $BF = 2r(rr - \frac{1}{2}rr) = 2rr^{\frac{1}{2}} = rr^{\frac{1}{2}}2$; Pro penta-

gono ob $CDq = rr \frac{3+r^5}{8}$, quia CD hic est cosinum re-

pertorum maximus, est $BF = 2r(rr - rr \times \frac{3+r^5}{8})$
 $= 2r \frac{(rr - rr^{\frac{5}{2}})}{8} = rr \frac{5-r^5}{2}$. Sit AB sexta pars

femiperipheriæ, erit BF latus hexagoni aliunde notum, CD ad hunc casum iterum cosinum repertorum maximus

mus erit, ergo $cc = \frac{3}{4}rr$, atque $BF = 2r(rr - \frac{3}{4}rr) = 2r\frac{1}{4}rr = r$.

§. 213.

Dato latere pentagoni simul habetur latus decago- F. 271.
ni. Potest tamen quoque latus AB decagoni regularis
circulo, cujus radius est $CA = r$, inscribendi quæri se-
quentem in modum. Arcus AB est $\frac{1}{10}P$, si P denotet
peripheriam. Ideo angulus ACB $= 36^\circ$, triangulum
vero ABC est æquicrurum, ideoque angulus ABC $=$
CAB $= 72^\circ$. Producto itaque latere BA versus D fit
angulus DAC $= 108^\circ$. Fiat AD $= AC$, erit ADC $=$
ACD $= 36^\circ$, et proinde DCB $= 72^\circ$. Sunt itaque tri-
angula ABC et BDC similia, ideoque $BD : BC = BC :$
AB. Sit AB $= x$, erit $BD = r + x$, et proinde $r + x :$
 $r = r : x$, vel $r : x = r + x : r$, unde latus decagoni inve-
nitur per constructionem §. 200. explicatam. Ex ana-
logia $r : x = r + x : r$ ista quoque deducitur $r : x = r :$
 $r - x$ (§. 186. *Geom. Elem.*) unde fit $xx = rr - rx$. La-
tus itaque decagoni invenitur secando radium eo modo,
ut quadratum segmenti majoris æquale sit rectangulo
comprehenso sub radio integro et segmento minore,
quam sectionem VETERES dicunt *sectionem media et ex-*
trema ratione.

Hinc deducitur, lateris pentagoni quadratum æqua- F. 272.
le esse quadrato lateris decagoni cum quadrato radii si-
mul sumto. Sit enim radius AE $= r$, latus decagoni
AF $= y$, latus pentagoni AB $= x$, erit AG $= \frac{1}{2}x$, GE $=$
 $r(rr - \frac{1}{4}x^2)$, FG $= r - r(rr - \frac{1}{4}xx)$. Ergo $yy = \frac{1}{4}$
 $xx + rr - 2r(rr - \frac{1}{4}xx) + rr - \frac{1}{4}xx = 2rr - 2r(rr - \frac{1}{4}xx)$;
unde concluditur $2r(rr - \frac{1}{4}xx) = 4rr - yy$;
 $4r^4 - rrrx = 4r^4 - 4rryy + y^4$; $4rryy - y^4 = rrrx$;
atque $xx = \frac{4yy - y^4}{rr}$. Est vero $y = -\frac{1}{2}r + r\frac{1}{4}rr$; ideo

$$yy = \frac{5}{4}rr - r\frac{1}{4}rr; y^4 = \frac{14}{4}r^4 - 3r^3r\frac{1}{4}rr. \text{ Proinde } xx$$

$$= \frac{24}{4} rr - 4r\sqrt{\frac{5}{4}} rr - \left(\frac{14}{4} r^4 - 3r^3\sqrt{\frac{5}{4}} rr \right) : rr =$$

$$\frac{24}{4} rr - 4r\sqrt{\frac{5}{4}} rr - \frac{14}{4} rr + 3r\sqrt{\frac{5}{4}} rr = \frac{10}{4} rr - r\sqrt{\frac{5}{4}} rr$$

$= rr + \frac{5}{4} rr - r\sqrt{\frac{5}{4}} rr = rr + yy.$ Quæsito itaque latere hexagoni ED, erit DC latus pentagoni, si angulus BEC sit rectus.

§. 214.

Quia est $\frac{\text{tang. } z}{r} = \frac{\sin. z}{\cos. z}$, si r denotet ra-

dium circuli, atque z angulum quemcunque; erit tang.

$$nz = \frac{\sin. nz}{\cos. nz} r, \text{ atque } \cos. z = \frac{\sin. z}{\text{tang. } z} r. \quad \text{Excluso}$$

communi terminorum in feribus pro $\sin. nz$ atque $\cos. nz$ divisore $r^n - 1$, ad abbreviandum calculum pro coefficientibus scribantur litteræ A, B, C, D, E, etc, et pro coefficientibus $\sin. nz$ litteræ P, Q, R, S, etc; erit $\text{tang. } nz =$

$$\frac{Pr(\cos. z)^{n-1} \sin. z - Qr(\cos. z)^{n-3} \sin. z^3 + Rr(\cos. z)^{n-5} \sin. z^5 - \text{etc.}}{(\cos. z)^n - A(\cos. z)^{n-2} \sin. z^2 + B(\cos. z)^{n-4} \sin. z^4 - C(\cos. z)^{n-6} \sin. z^6 + \text{etc.}}$$

Substituto in hac formula valore $\cos. z = \frac{\sin. z}{\cos. z} r$, habetur ista formula pro tangente anguli multipli:

$$\begin{aligned} \text{tang. } nz = & \frac{Pr^n \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-1}} - \frac{Qr^{n-1} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-3}} + \frac{Rr^{n-4} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-5}} - \frac{Sr^{n-6} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-7}} + \text{etc.} \\ & \frac{r^n \sin. z^n}{\text{tang. } z^n} - \frac{Ar^{n-2} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-2}} + \frac{Br^{n-4} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-4}} - \frac{Cr^{n-6} \sin. z^n}{\text{tang. } z^{n-6}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Numeratore igitur et denominatore per $\sin. z^n$ diviso, atque per $\text{tang. } z^n$ multiplicato, habetur formula tangentem anguli multipli ex data tangente anguli simpli exhibens ista

tang.

$$\text{tang. } n\alpha =$$

$$\frac{Pr^n \text{tg. } \alpha - Qr^{n-2}(\text{tg. } \alpha)^3 + Rr^{n-4}(\text{tg. } \alpha)^5 - Sr^{n-6}(\text{tg. } \alpha)^7 + \text{etc.}}{r^n - Ar^{n-2}(\text{tang. } \alpha)^2 + Br^{n-4}(\text{tg. } \alpha)^4 - Cr^{n-6}(\text{tg. } \alpha)^6 + \text{etc.}}$$

vel substitutis valoribus P, Q, R, S, etc, A, B, C, etc,

$$\text{tang. } n\alpha = \left(\frac{n}{1} r^n \text{tang. } \alpha - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{n-2} (\text{tg } \alpha)^3 + \right.$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{n-4} (\text{tang. } \alpha)^5 -$$

$$\left. \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{n-6} (\text{tg. } \alpha)^7 + \text{etc.} \right)$$

$$: \left(r^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} r^{n-2} (\text{tg. } \alpha)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^{n-4} \right.$$

$$(\text{tang. } \alpha)^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} r^{n-6}$$

$(\text{tang. } \alpha^6 + \text{etc.})$. Eodem modo habetur formula pro

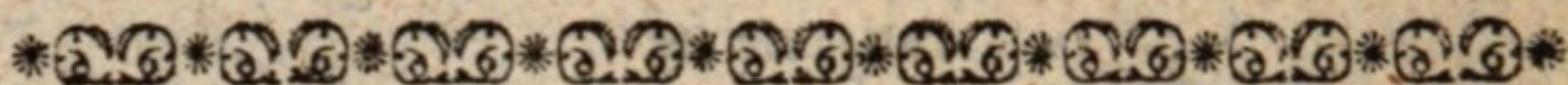
cotangente anguli multipli et formulis $\frac{\cot. \alpha}{r} = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$,

$$\sin. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\cot. \alpha} r, \quad \frac{\cot. n\alpha}{r} = \frac{\cos. n\alpha}{\sin. n\alpha}. \quad \text{Quin et formulae}$$

generales pro secante vel cosecante, vel sinu verso anguli multipli similem in modum invenirentur, si quis earum indigeret.



SECT.



SECTIO XIV.

DE

INVESTIGATIONE RADICVM AE- QVATIONIS IMPOSSIBILIVM.

§. 215.

Quodsi æquatio quædam algebraica omnes radices habeat impossibiles, vel si reales adsint, æquatio per reales simplices ex his radicibus formatas ante divisa fuerit; una methodus radices quoque impossibiles inveniendi sequentibus nititur ratiociniis. Quodsi series quantitatum quarumcunque, quarum termini ex parte reales sunt et ex parte imaginarii, sit $= 0$; omnes termini reales simul sumti sunt $= 0$, atque omnes imaginarii simul sumti pariter sunt $= 0$. Sit enim summa realium $= R$, et summa imaginariorum $= I$; erit ex hypothese $R + I = 0$. Nisi itaque sit $R = 0$ et $I = 0$, foret $R = -I$, reale æquale imaginario, quod esse nequit. Deinde supra §. 98. jam demonstravimus, quod radix impossibilis quæcunque æquationis algebraicæ sequentem habeat formam $a + \beta r - 1$, ubi a et β sunt quantitates reales. Sit itaque proposita æquatio algebraica quæcunque $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots + r = 0$, cujus radices omnes sunt impossibiles; atque loco x substituatur $a + \beta r - 1$, et facta reductione duæ invenientur partes, una realis, altera imaginaria, quarum quævis figillatim sumta nihilo æquatur. Divisa jam parte imaginaria per $r - 1$, quam continebunt omnes ipsius termini, duæ habentur æquationes omnino reales duas incognitas a et β continentes, per eliminationis methodum inveniendas.

§. 216.

§. 216.

Quia radices æquationum impossibiles ita sunt comparatae, ut æquationum, per quas duæ istæ radices impossibiles exhibentur, una ducta in alteram, æquatio quadratica realis rationalis producat; et proinde omnis æquatio, cujus radices omnes impossibiles sunt, constet ex æquationibus quadraticis realibus in se invicem ductis: ipsæ radices impossibiles invenientur, si factores æquationis quadratici hujus formæ $p - qx + rxx = 0$ investigentur, reales quidem, sed ita ut harum æquationum quadraticarum radices sint impossibiles. His alia innititur methodus radices impossibiles æquationis propositæ inveniendi. Ipsa vero hæc methodus simul manifestabit, quomodo si x spectetur ut variabilis, cujuscunque functionis rationalis integræ factores duplices reales inveniri queant, si factores agnoscat simplices impossibiles, atque hæc investigatio opus est maximi momenti, ut in sequentibus docebitur. Quoniam res eodem redit, atque ipsam investigationem reddit generaliore; consideremus formam functionis variabilis x generalem istam $a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc.}$; atque hujus functionis quaeramus factores reales duplices formæ $p - qx + rxx$. Tum enim si $a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc.} = 0$; erit $p - qx + rxx = 0$, unde æquationis radices impossibiles per methodum resolvendi æquationes quadraticas facile eliciuntur.

§. 217.

Trinomium autem $p - qx + rxx$ habebit factores simplices imaginarios, si fuerit $4pr > qq$ seu $\frac{q}{2rpr} < 1$.

Cum igitur sinus et cosinus angulorum intra limites 0 et 1 contineantur, pro radio = 1; formula $p - qx + rxx$

factores habebit impossibiles; si fuerit $\frac{q}{2rpr} = \text{sinui}$

vel

vel cosinui cujusdam anguli, qui non sit angulo recto, vel ejus multiplo aequalis. Ad vitandam vero irrationalitatem assumamus hanc formam $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$, cujus factores simplices impossibiles erunt $qx - p(\cos \phi \pm r - i. \sin \phi)$. Ubi patet, quod in casu $\cos \phi = \pm 1$, ob $\sin \phi = 0$, ambo factores fiant aequales et reales. Proposita igitur functione rationali integra $a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc}$, ejus factores duplices reales, qui exhibent ipsius factores simplices impossibiles, eruentur, si determinantur quanta p et q cum angulo ϕ , ut hoc trinomium $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ fiat factor functionis. Tum enim simul habentur factores simplices impossibiles $qx - p(\cos \phi + r - i. \sin \phi)$ et $qx - p(\cos \phi - r - i. \sin \phi)$. Functio autem

proposita evanescit, si ponatur tam $x = \frac{p}{q} (\cos \phi +$

$r - i. \sin \phi)$ quam $x = \frac{p}{q} (\cos \phi - r - i. \sin \phi)$. Fa-

cta igitur substitutione utraque duplex invenitur æquatio

ex quibus tam fractio $\frac{p}{q}$, quam arcus ϕ definiri possunt.

§. 218.

Istae substitutiones loco x faciendae licet primo intuitu difficiles videantur, tamen per ea, quæ initio *Sect. praec.* sunt explicata, sat expedite absolvi possunt. Quia enim posito radio $= 1$ est $(\cos \phi \pm r - i. \sin \phi)^n = \cos n\phi \pm r - i. \sin n\phi$; sequentes formulæ loco singularum ipsius x potestatum inveniuntur substituendæ:

pro priori factore.

$$x = \frac{p}{q} (\cos \phi + r - 1. \sin \phi)$$

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} (\cos 2\phi + r - 1. \sin 2\phi)$$

$$x^3 = \frac{p^3}{q^3} (\cos 3\phi + r - 1. \sin 3\phi)$$

$$x^4 = \frac{p^4}{q^4} (\cos 4\phi + r - 1. \sin 4\phi) \text{ etc.}$$

pro altero factore

$$x = \frac{p}{q} (\cos \phi - r - 1. \sin \phi)$$

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} (\cos 2\phi - r - 1. \sin 2\phi)$$

$$x^3 = \frac{p^3}{q^3} (\cos 3\phi - r - 1. \sin 3\phi)$$

$$x^4 = \frac{p^4}{q^4} (\cos 4\phi - r - 1. \sin 4\phi) \text{ etc.}$$

In compendium calculi ponatur $\frac{p}{q} = r$, et facta substitutione duæ sequentes inveniuntur æquationes.

$$0 = \left\{ \begin{aligned} & a + \beta r. \cos \phi + \gamma r^2 \cos 2\phi + \delta r^3 \cos 3\phi + \text{etc.} \\ & + \beta r. r - 1. \sin \phi + \gamma r^2 r - 1. \sin 2\phi + \delta r^3 r - 1. \sin 3\phi + \end{aligned} \right\} \text{ (etc.)}$$

$$0 = \left\{ \begin{aligned} & a + \beta r. \cos \phi + \gamma r^2 \cos 2\phi + \delta r^3 \cos 3\phi + \text{etc.} \\ & - \beta r. r - 1. \sin \phi - \gamma r^2 r - 1. \sin 2\phi - \delta r^3 r - 1. \sin 3\phi - \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

Quodsi hæ duæ æquationes sibi invicem addantur, ac deinde una ab altera subtrahatur; posteriori autem casu per $2r - 1$ dividantur; inveniuntur duæ æquationes reales sequentes.

$$0 = a + \beta r \cos \phi + \gamma r^2 \cos 2\phi + \delta r^3 \cos \phi + \text{etc.}$$

$$0 = \beta r \sin \phi + \gamma r^2 \sin 2\phi + \delta r^3 \sin 3\phi + \text{etc.}$$

quæ statim ex forma functionis $a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$ formari possunt, ponendo primum unamquamque ipsius x potestatem $x^n = r^n \cos n\phi$, deinceps vero $x^n = r^n \sin n\phi$. Sic enim ob $\sin 0\phi = 0$ et $\cos 0\phi = 1$, pro x^0 seu 1 in termino constante priori casu ponitur 1, posteriori autem 0. Quaeritis itaque ex his duabus æqua-

tionibus incognitis r et ϕ , ob $r = \frac{p}{q}$, habebitur fa-

ctor trinomialis quæsitus $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$, duos factores simplices impossibiles involvens.

§. 219.

Quodsi æquatio prior per $\sin. m\phi$ et posterior per $\cos m\phi$ multiplicetur, tumque producta vel addantur, vel unum ab altero subtrahatur, istae reperiuntur æquationes :

$$0 = a \sin. m\phi + \beta r. \sin (m+1)\phi + \gamma r^2. \sin (m+2)\phi + \delta r^3 \sin (m+3)\phi + \text{etc.}$$

$$0 = a \sin. m\phi + \beta r. \sin (m-1)\phi + \gamma r^2 \sin (m-2)\phi + \delta r^3 \sin (m-3)\phi - \text{etc.}$$

Sin vero prior æquatio per $\cos. m\phi$, posterior per $\sin. m\phi$ multiplicetur; per additionem et subtractionem inveniuntur æquationes.

$$0 = a. \cos. m\phi + \beta r. \cos (m-1)\phi + \gamma r^2 \cos (m-2)\phi + \delta r^3 \cos (m-3)\phi + \text{etc.}$$

$$0 = a. \cos. m\phi + \beta r. \cos (m+1)\phi + \gamma r^2 \cos (m+2)\phi + \delta r^3 \cos (m+3)\phi + \text{etc.}$$

Hujusmodi itaque duae æquationes quaecunque conjunctae determinabunt incognitas r et ϕ . Quod cum plerumque pluribus modis fieri possit, simul plures factores trinomiali obtinentur, et proinde omnes, quos functio proposita in se complectitur.

§. 220.

§. 220.

Proposita sit functio $a^n + x^n$, cujus factores trinomiales formæ $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ sunt inveniendæ.

Ac posito $r = \frac{p}{q}$, duæ reperiuntur æquationes $0 = a^n + r^n \cos. n\phi$, et $0 = r^n \sin. n\phi$, ex quarum posteriori concluditur $\sin. n\phi = 0$. Proinde erit $n\phi$ arcus vel hujus formæ $(2k+1)\pi$, vel $2k\pi$, denotante k numerum integrum et π semicirculum. Duo isti casus ideo distinguendi sunt, quia eorum cosinus signis differunt. Priori enim casu est $\cos (2k+1)\pi = -1$, posteriori vero $\cos 2k\pi = +1$. Quia vero r debet esse quantitas realis assumi debet prior forma $n\phi = (2k+1)\pi$, quæ dat $\cos. n\phi = -1$, unde concluditur $0 = a^n - r^n$, et ideo

$r = a = \frac{p}{q}$; quare est $p = a$, $q = 1$, et $\phi = \frac{(2k+1)\pi}{n}$. Factor itaque functionis $a^n + x^n$ quaesitus

est $aa - 2ax \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + xx$. Quia igitur pro k

numerum quemcunque integrum ponere possumus, hoc modo plures inveniuntur factores numero tamen definiti. Quando n est numerus impar, posito $2k+1 = n$, erit factor quadratus $aa + 2ax + xx$, sed exinde non sequitur, quadratum $(a+x)^2$ esse factorem functionis $a^n + x^n$, quia in §. 218. unica æquatio resultat, quæ patet, tantum $a+x$ esse divisorem functionis $a^n + x^n$; quæ regula semper est observanda, quoties $\cos \phi$ est vel $+1$, vel -1 .

Sit itaque primo n numerus par, atque

si $n = 2$

formulae $a^2 + x^2$

factor est $a^2 + x^2$

si $n = 4$

formulae $a^4 + x^4$

factores sunt $aa - 2ax \cos \frac{\pi}{4} + xx$

et $aa - 2ax \cos \frac{3}{4}\pi + xx$

si $n = 6$

formulae $a^6 + x^6$

factores sunt sequentes

$aa - 2ax \cos \frac{1}{6}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{3}{6}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{5}{6}\pi + xx$

Si n fuerit, numerus impar,

atque $n = 1$

formulae $a + x$

factor est $a + x$

si $n = 3$

formulae $a^3 + x^3$

factores sunt $a + x$

et $aa - 2ax \cos \frac{1}{3}\pi + xx$

si $n = 5$

formulae $a^5 + x^5$

factores sunt $a + x$

$aa - 2ax \cos \frac{1}{5}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{3}{5}\pi + xx$

Patet ex hisce exemplis, omnes factores obtineri, si loco $2k + 1$ omnes numeri impares, non majores quam exponens n substituantur, iis vero casibus, ubi factor, quadratus prodit, tantum ejus radicem factoribus annumerandam esse.

§. 221.

Si proposita sit functio $a^n - x^n$, ejus factor duplex

erit $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$; si posito $r = \frac{p}{q}$, fue-

rit $0 = a^n - r^n \cos. n\phi$ et $0 = r^n \sin. n\phi$. Proinde

iterum est $\sin. n\phi = 0$, et $n\phi = (2k + 1)\pi$, vel $n\phi = 2k\pi$.

Hoc autem casu valor posterior assumendus est, ut sit

cos.

$\cos.n\Phi = +1$, ex quo concluditur $0 = a^n - x^n$, $r = \frac{p}{q} = a$, $p = a$, $q = 1$, $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$; unde factor tri-

nomius functionis propositae est $aa - 2ax \cos \frac{2k\pi}{n} + xx$,

quae formula, si loco $2k$ omnes numeri pares non maiores, quam n ponantur, omnes dabit factores quæsitos, ubi de factoribus quadratis idem quod ante est tenendum. Primo enim posito $k = 0$ prodit factor $aa - 2ax + xx$, cujus radix $a - x$ assumenda est. Pari modo, si n fuerit numerus par et ponatur $2k = n$, prodit $aa + 2ax + xx$, quare $a + x$ est divisor functionis $a^n - x^n$. Ex his concluditur:

Pro n impari, si $n = 1$ erit formulæ $a - x$
factor $a - x$

si $n = 3$ erunt formulae $a^3 - x^3$

factores $a - x$ et $aa - 2ax \cos \frac{2}{3}\pi + xx$

si $n = 5$ erunt formulæ $a^5 - x^5$
factores $a - x$

$aa - 2ax \cos \frac{2}{5}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{4}{5}\pi + xx$

Pro n pari, si $n = 2$, formulæ $aa - xx$

factores sunt $a - x$, et $a + x$

si $n = 4$, formulae $a^4 - x^4$

factores sunt, $a - x$; $a + x$;

$aa - 2ax \cos \frac{2}{4}\pi + xx$

si $n = 6$, formula $a^6 - x^6$

factores sunt $a - x$; $a + x$;

$aa - 2ax \cos \frac{2}{6}\pi + xx$

$aa - 2ax \cos \frac{4}{6}\pi + xx$.

§. 222.

Habeat nunc functio proposita hanc formam $a + \beta x^n + \gamma x^{2n}$. Atque si haec functio duos habeat factores reales formae $\eta + \theta x^n$, resolutio ex præcedentibus patet. Quodsi vero functio eam habeat formam $a^{2n} -$

$2a^n x^n \cos. \Phi + x^{2n}$, quae in duos factores reales formae $y + \mathfrak{I}x^n$ resolvi nequit, tumque hujus functionis quaeratur factor duplex realis formae $pp - 2pqx \cos \Phi$

$+ qqxx$; posito $r = \frac{p}{q}$ duae sequentes æquationes erunt resolvendæ $0 = a^{2n} - 2a^n r^n \cos. g \cos. n\Phi + r^{2n} \cos 2n\Phi$, et $0 = -2a^n r^n \cos. g \cos. n\Phi + r^{2n} \sin 2n\Phi$; vel quoque ponendo $m = 2n$, loco prioris æquationis ex §. 218. ista $0 = a^{2n} \sin 2n\Phi - 2a^n r^n \cos. g \sin. n\Phi$. Ex qua cum posteriori collata concluditur $r = a$. Tum vero erit $\sin. 2n\Phi = 2 \cos. g. \sin. n\Phi$; sed $\sin 2n\Phi = 2 \sin. n\Phi. \cos. n\Phi$; proinde $\cos. n\Phi = \cos. g$. Perpetuo autem est $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$, unde habetur $n\Phi = 2k\pi \pm g$ et $\Phi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$. Proinde factor generalis duplex

quaesitus est $aa - 2ax \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + xx$, atque omnes

factores prodibunt, si pro $2k$ omnes numeri pares non majores quam n successive substituantur, ut factum est in casibus particularibus, qui sequuntur. Erit enim

formulae $a^2 - 2ax \cos. g + xx$
 unicus factor $aa - 2ax \cos. g + xx$;
 formulae $a^4 - 2a^2 x^2 \cos. g + x^4$
 duo factores sunt

$$aa - 2ax \cos \frac{g}{2} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi \pm g}{2} + xx$$

$$\text{five } aa + 2ax \cos \frac{g}{2} + xx$$

formulae $a^6 - 2a^3 x^3 \cos g + x^6$
 factores tres

$$aa - 2ax \cos \frac{g}{3} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi - g}{3} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi + g}{3} + xx$$

formulae $a^3 - 2a^2x \cos g + x^3$
factores quatuor

$$aa - 2ax \cos \frac{g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi - g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi + g}{4} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{4\pi + g}{4} + xx$$

five $aa + 2ax \cos \frac{g}{4} + xx$

formulae $a^5 - 2a^4x \cos g + x^5$
factores quinque

$$aa - 2ax \cos \frac{g}{5} + xx$$

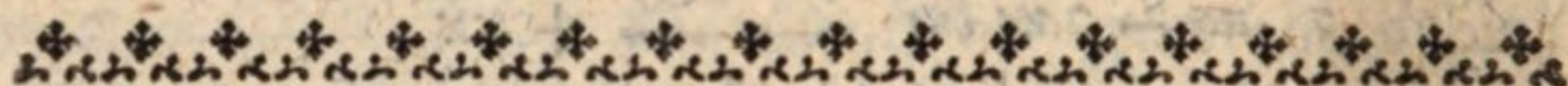
$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi - g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{2\pi + g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{4\pi - g}{5} + xx$$

$$aa - 2ax \cos \frac{4\pi + g}{5} + xx$$

Similem in modum ulterius progredi licet ad functiones hujus formae $a + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n}$, quæ certo habet unum factorem realem hujus formæ $\eta + \theta x^n$, cujus igitur factores reales vel simplices vel duplices exhiberi possunt; alter autem factor formae $i + kx^n + \lambda x^{2n}$, utcunque fuerit comparatus, per §. præc. in factores resolvetur. Ulterius hæc functio $a + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$, quia perpetuo habet duos factores reales hujus formæ $\eta + \theta x^n + \iota x^{2n}$, simili modo resolvitur in factores reales vel simplices vel duplices. Quin eodem modo progredi licet ad formam $a + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n} + \zeta x^{5n}$, atque superiorum ordinem hujus formae functiones.



SECTIO XV.

DE

CALCVLO DIFFERENTIALI FUNCTIONVM VNIVS VARIABILIS ALGEBRAICARVM.

§. 223.

Omnis functio quantitatis variabilis x alium induit valorem, si ipsa x variari atque vel crescere vel decrefcere statuatur, nisi functio speciein tantum quantitatis variabilis mentiatur, revera autem fit quantitas constans, ut x^0 . Sit igitur y , functio quaecunque variabilis x , atque in eadem loco x successive substituantur valores in arithmetica progressionem progredientes, nimirum x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; ac denotet y^1 valorem, quem functio y induit, si in ea loco

loco x scribatur $x + \omega$; simili modo sit y^{II} is ipsius y valor, si loco x scribatur $x + 2\omega$, parique ratione denotent y^{III} ; y^{IV} ; y^{V} ; etc; valores ipsius y , qui emergunt, dum loco x ponuntur $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; etc. ita ut isti diversi valores ipsarum x et y sequenti modo sibi respondeant:

x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; etc.

y ; y^{I} ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^{V} ; etc.

atque prouti series arithmetica x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; etc. in infinitum continuari potest, ita series ex functione y orta, nimirum y ; y^{I} ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; etc. quoque in infinitum progredietur, eritque functio y hujus seriei terminus generalis. Quodsi ejusdem seriei quærantur differentiales omnium ordinum, et differentia primæ sequentibus indicentur signis ut sit $y^{\text{I}} - y = \Delta y$; $y^{\text{II}} - y^{\text{I}} = \Delta y^{\text{I}}$; $y^{\text{III}} - y^{\text{II}} = \Delta y^{\text{II}}$; etc, erit Δy incrementum, quod functio y capit, si in ea loco x ponatur $x + \omega$, denotante ω numerum quemcunque pro lubitu assumptum, vel positivum vel negativum: saltem perpetuo tanquam incrementum considerari solet, licet sæpius revera sit decrementum, quod ex ejus valore negativo cognoscitur. Vocari autem solet hoc incrementum functionis y ejus *differentia*. Quia y^{II} oritur ex y , si loco x scribatur $x + 2\omega$; manifestum est, eandem quantitatem inveniri, si primum pro x ponatur $x + \omega$, tumque denuo $x + \omega$ loco x statuatur. Orietur ideo y^{II} ex y^{I} , si in hoc valore y^{I} loco x scribatur $x + \omega$, proinde erit Δy^{I} incrementum ipsius y^{I} , quod capit posito $x + \omega$ loco x , atque hinc simili modo Δy^{I} vocatur *differentia* ipsius y^{I} . Sic et y^{III} oritur ex y^{II} , si in y^{II} loco x ponitur $x + \Delta x$ et ita porro. Ac proinde Δy^{II} præt differentia ipsius y^{II} , seu ejus incrementum, quod capit, si loco x ponatur $x + \omega$; Δy^{III} erit differentia functionis y^{III} , et ita porro.

§. 224.

Inventa serie differentiarum, si ex ea denuo differentiae capiantur, quamlibet a sequente subtrahendo; orientur differentiae differentiarum, seu *differentiae secundae*, quæ ita designantur, ut sit

$$\begin{aligned}\Delta\Delta y \text{ vel } \Delta^2 y &= \Delta y^I - \Delta y \\ \Delta^2 y^I &= \Delta y^{II} - \Delta y^I \\ \Delta^2 y^{II} &= \Delta y^{III} - \Delta y^{II} \\ \Delta^2 y^{III} &= \Delta y^{IV} - \Delta y^{III}\end{aligned}$$

ficque porro. Erit igitur $\Delta^2 y$, differentia secunda ipsius y ; $\Delta^2 y^I$ differentia secunda functionis y^I etc. Similem autem in modum scribendæ sunt differentiae tertiæ, quartæ et sequentes, uti sequens schema repræsentat.

Variationes variabilis x

x ; $x + \omega$; $x + 2\omega$; $x + 3\omega$; $x + 4\omega$; $x + 5\omega$; etc.

Valores functionis y.

y ; y^I ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; etc.

Differentia prima.

Δy ; Δy^I ; Δy^{II} ; Δy^{III} ; Δy^{IV} ; etc.

Differentiae secundae

$\Delta^2 y$; $\Delta^2 y^I$; $\Delta^2 y^{II}$; $\Delta^2 y^{III}$; etc.

Differentiae tertiæ

$\Delta^3 y$; $\Delta^3 y^I$; $\Delta^3 y^{II}$; etc.

Differentiae quartæ

$\Delta^4 y$; $\Delta^4 y^I$; etc.

In quacunque harum differentiarum serie terminus consequens fit ex proxime antecedente, si in eodem $x + \omega$ loco x ponatur. Quia enim eadem lex valet de serie primitiva y , y^I , y^{II} , y^{III} , y^{IV} , y^V , ea simul valet de differentiali prima Δy , Δy^I , Δy^{II} , Δy^{III} , Δy^{IV} , Δy^V , etc. Nam posito $x + \omega$ loco x in $y^I - y = \Delta y$, oritur $y^{II} - y^I = \Delta y^I$; posito $x + \omega$ loco x in $y^{II} - y^I = \Delta y^I$, oritur $y^{III} - y^{II} = \Delta y^{II}$, ac generaliter posito $x + \omega$ loco x in $y^{N+1} - y^N = \Delta y^N$, oritur

tur $y^N + 11 - y^N + 1 = \Delta y^N + 1$. Quodsi jam series differentialis prima consideretur ut primitiva; patet eandem legem valere pro differentiali secunda, tumque si haec consideretur ut primitiva, concluditur eandem valere pro differentiali tertia; sicque porro concludendo patet, eandem valere pro reliquis omnibus. Est itaque $\Delta^2 y$ prima differentia ipsius Δy ; $\Delta^3 y$ prima differentia ipsius $\Delta^2 y$; et generaliter $\Delta^n + 1 y$ differentia prima ipsius $\Delta^n y$.

§. 225.

Posito $y = x$; erit $y^I = x^I = x + \omega$; $y^{II} = x^{II} = x + 2\omega$, et ita porro. Vnde sumtis differentiis erit $\Delta x = \omega$, $\Delta x^I = \omega$, $\Delta x^{II} = \omega$; etc. quare omnes differentiae primae ipsius x erunt constantes, ac proinde differentiae sequentes omnes evanescent. Cum igitur sit $\Delta x = \omega$, ob analogiam loco litterae ω iste character Δx commode adhibebitur. Ideo quantitatis variabilis x , cujus valores successivi x ; x^I ; x^{II} ; x^{III} ; etc. arithmeticam progressionem constituere assumuntur, differentiae primae Δx , Δx^I , Δx^{II} , etc. omnes erunt constantes, et posteriores $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, $\Delta^4 x$, etc. nihilo aequales. Cæterum characteribus Δx , Δy , $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$ et similibus ita in sequentibus utemur, ut quivis eorum characterum tanquam unica littera consideretur. Erit itaque Δx^n dignitas ipsius Δx exponentis n non vero differentia ipsius x^n ; $\Delta^2 x^n$ erit dignitas ipsius $\Delta^2 x$ exponentis n , non vero differentia secunda ipsius x^n . Quodsi vero inter characterem Δ et litteram x vel y vel aliam, quae variabilem quancunque denotet, interpositum erit punctum, ut $\Delta . x^n$, $\Delta^2 . x^n$, vel $\Delta^n . x^n$; hoc ita explicandum erit, ut intelligatur potestatis x^n differentia vel prima vel secunda, vel altior quaecunque.

§. 226.

Quemcunque numerum denotet x , poterit series $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \text{etc.}$ exprimere numerum

rum quemcunque alium, quomodocunque a numero x pendentem; si coefficientes a, b, c, e , etc, convenienter sumantur. affirmativi vel negativi, integri vel fracti. Cum enim vulgo numerando omnes numeros ex progressionem 1, 10, 100, 1000, 10000, etc, formamus, dicendo, quoties quilibet terminorum hujus progressionis sumendus sit; patet, quamlibet progressionem geometricam, quae subest generali 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 , etc. eidem rei x que utilem esse, praecipue, si valores etiam fracti coefficientium admittantur. Hinc patet, omnem functionem variabilis x serie quadam ejusmodi formae exprimi posse, ubi tamen terminus primus constans deficiet, si y ejusmodi sit ipsius x functio, quae evanescit posito $x = 0$. Proposita jam quacunque functione y ipsius x scripto $x + \Delta x$ loco x , ut y abeat in $y + \Delta y$, atque tum quaesito valore ipsius Δy ; fiet Δy functio ipsius Δx , si facta hac substitutione x et y considerentur ut constantes, et quidem talis, quae posito $\Delta x = 0$ evanescit. Proinde dari poterit Δy per seriem formae $\Delta y = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc}$, ubi erunt p, q, r, s , etc, functiones ipsarum x et y , vel solius x , quia est y ipsius x functio. Inventa hac seriei simul innotescit

ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q\Delta x + r\Delta x^2 + s\Delta x^3 + \text{etc}$, atque ejusdem rationis limes; ratio scilicet, cum qua Δx et Δy evanescunt, quae est $= \frac{p}{1}$ (§. 70.).

§. 227.

Occurrunt problemata Mathematica admodum multa, quorum solutio vel plane non invenitur, nisi ultima ratio variabilium evanescentium cognita sit; vel quorum solutio, concessa prima vel ultima variabilium ratione, multo expeditius invenitur. Praecipue quaeri solent ultimae rationes differentiarum variabilium evanescentium.

nescentium. Atque haec caussa est, cur peculiaria usu recepta sint nomina et signa ad differentias istas evanescentes denotandas, quarum ultima ratio quæritur. Differentias igitur evanescentes, seu, uti loqui solent, infinite parvas (§. 25.) hic cum LEIBNIZIO vocabimus *Differentialia*; atque cum in antecedentibus differentiarum diversi constituti sint ordines, facile intelligitur, quid differentialia prima, secunda, tertia etc. cujuscunque functionis significant. Quaerenda enim sæpe in posterum erit ultima ratio, cum qua differentia functionis secunda vel tertia vel quarta, cum alia differentia alius cujusdam functionis secunda, vel tertia, vel quarta etc. vel alia quacunque variabili comparata, cum ea simul evanescit. Tumque generatim ejusmodi differentia in ipso momento evanescentiæ vocabitur differentiale secundum vel tertium vel quantum etc, prouti est vel secunda vel tertia, vel quarta etc. differentia, quae evanescit. Sed loco characteris Δ , quo ante differentiae sunt indicatae, nunc utemur characterem d ita, ut dy significet differentiale primum ipsius y ; ddy differentiale secundum, d^3y tertium, et sic porro. Mathematici Angli aliis tam nominibus, quam signis utuntur. Differentias enim evanescentes, quas hic differentialia vocamus, potissimum *fluxiones* nominare solent, interdum quoque *incrementa*. Fluxiones denotant punctis, quæ litteris superscribunt, ita ut $\dot{y}$ iis significet fluxionem primam ipsius y ; $\ddot{y}$ fluxionem secundam; $\dddot{y}$ tertiam et sic porro. Probe igitur tenendum est, litteram d hic non quantitatem denotare, sed tantum loco signi adhiberi, ad vocem *differentialis* exprimendam, eodem modo, quo characterem $\sqrt{}$ pro signo radicis uti consuevimus. Hinc dy non significat productum ex quantitate d in quantitatem y , sed ita enunciari debet, ut dicatur differentiale ipsius y . Simili modo si scribatur d^2y , neque numerus binarius exponentem, neque d^2 dignitatem ipsius d significat, sed adhibetur tantum ad nomen differentien-

ferentialis secundi breviter exprimendum. Cum igitur littera d in calculo differentiali non quantitatem, sed signum tantum exhibeat, ad confusionem in calculis vitandam, ubi plures quantitates constantes occurrunt, littera ad earum designationem usurpari nequit. Præterea, qui character d hic in locum ipsius Δ succedit, ea hic repetenda sunt, quæ sub finem §. 225. monuimus.

Adhibitis igitur signis hucusque explitis erit $\frac{dy}{dx} = p$,

seu limes rationis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aequalis rationi $\frac{p}{1}$ §. 226. atque

haec quidem ultima ratio variabilium evanescentium est id, quod in *Calculo Differentiali* quaeritur. Ipsa enim differentialia sunt nihilo æqualia, ac propterea nullo negotio invenirentur. *Differentiare* functionem y variabilis x non aliud est, nisi invenire ultimam rationem, cum qua differentiae functionis y et variabilis x evanescunt.

§. 228.

Licet igitur id, quod per calculum differentialem quaeritur, proprie sit æquatio $\frac{dy}{dx} = p$; tamen ista

æquatio sub hac forma $dy = p dx$ vulgo scribi solet, atque phrasis, *differentiare functionem* y , sic explicari: quaerere differentiale functionis y , tumque ipsa expressio $p dx$ differentiale functiones y dicitur. Tolerari possunt istae voces, si differentiae Δx atque Δy in ipso momento evanescentiae considerentur, quo rationis

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitem $= \frac{p}{1}$ attingunt. Atque eadem ratio per

aequationem $dy = p dx$ æque ac per alteram $\frac{dy}{dx} = p$

exprimi potest, idque praecipue ob eam, quae sequitur, causam. Si tam y quam z ejusmodi sint varibiles, quae pendent a variabili x , ita ut y pariter atque z fit
 ipsius

ipsius x functio; limes rationis differentiarum Δy atque Δz habetur ex aequationibus $dy = p dx$ atque $dz = P dx$ pariter atque ex hisce $\frac{dy}{dx} = p$ et $\frac{dz}{dx} = P$. Est

enim $\frac{dy}{dz} = \frac{p}{P}$, quia Δy et Δz habent formas $\Delta y =$

$p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc.}$ atque $\Delta z = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 + \text{etc.}$; ex quibus utique habetur

$\frac{dy}{dz} = \frac{p}{P}$ (§. 75.). Idem sequitur ex formis $dy =$

$p dx$, et $dz = P dx$, ex quibus sit $\frac{dy}{dz} = \frac{p dx}{P dx} = \frac{p}{P}$.

In posterum itaque modo sub hac forma $\frac{dy}{dx} = p$, mo-

do sub altera $dy = p dx$, ultimas differentiarum evanescentium rationes exhibebimus.

§. 229.

Differentia producti ay variabilis y in quantitatem constantem a est differentia Δy variabilis y in constantem a multiplicata. Est enim $\Delta . ay = a(y + \Delta y) - ay = ay + a\Delta y - ay = a\Delta y$. Si itaque est y functio variabilis x ;

habetur $\Delta . ay = ap\Delta x + aq\Delta x^2 + ar\Delta x^3 + \text{etc.}$, atque

$\frac{d . ay}{dx} = ap$, vel $d . ay = ap dx$. Ideo differentiale pro-

ducti variabilis in quantitatem constantem est differentiale illius variabilis per eandem constantem multiplicatum. Præ-

terea differentia functionis y , quae est summa algebraica plurium variabilium $z + x + u + \text{etc.}$ et constantis

cujusdam a , est summa omnium differentiarum $\Delta z + \Delta x + \Delta u$ earum partium variabilium, ex quibus functio

proposita constat. Erit enim $y^I = a + z + \Delta z + x + \Delta x + u + \Delta u$ etc. atque $y^I - y = \Delta y = \Delta z + \Delta x + \Delta u$

+ etc. Hisce suppositis ex data formula pro differentia

prima functionis y erui potest formula generalis pro differentia secunda, atque deinde pro differentia tertia, quarta, et sequentibus, quin formula generalis pro differentia ordinis n quacunque.

§. 230.

Formula pro Δy generalis est $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 + \text{etc}$, si y est functio variabilis x , atque $\Delta^2 y$ est differentia prima ipsius Δy (§. 224.). Ideo est $\Delta^2 y = \Delta P\Delta x + \Delta Q\Delta x^2 + \Delta R\Delta x^3 + \Delta S\Delta x^4 + \text{etc}$, ob Δx quantitatem constantem. Praeterea ΔP , ΔQ , ΔR , ΔS , etc, quia sunt functiones ipsius x sequentes habent formas :

$$\Delta P = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc.}$$

$$\Delta Q = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 + \text{etc.}$$

$$\Delta R = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc.}$$

etc. etc.

Ex quibus ista concluditur formula

$$\begin{aligned} \Delta^2 y = & p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + r\Delta x^4 + s\Delta x^5 + \text{etc.} \\ & + P\Delta x^3 + Q\Delta x^4 + R\Delta x^5 + \text{etc.} \\ & + p\Delta x^4 + q\Delta x^5 + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Coefficientibus itaque variabilium Δx^3 , Δx^4 , Δx^5 , etc. litteris Z , Y , X , etc, denotatis, erit

$$\Delta^2 y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3 + Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 + \text{etc.}$$

ex qua formula habetur ratio

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = p + Z\Delta x + Y\Delta x^2 + X\Delta x^3 + \text{etc.}$$

hujusque rationis limes $\frac{ddy}{dx^2} = p$. Hæc ultima ratio variabilium Δy et Δx^2 est id, quod quæritur, si functionis y differentio differentiale inveniendum proponitur.

Loco æquationis $\frac{ddy}{dx^2} = p$ hic quoque scribi so-

let $ddy = p dx^2$, atque $p dx^2$ ipsius y differentio-differentiale seu differentiale secundum vocari. Quod quidem hic

hic quoque tolerari potest, tum quia per æquationem
 $ddy = pdx^2$ atque per aliam $\frac{ddy}{dx^2} = p$, ultima ratio

$\frac{ddy}{dx^2}$ aeque commode exprimitur, tum quia limes ratio-
 nis differentiarum secundi ordinis $\Delta\Delta y = p\Delta x^2 + Z\Delta x^3$
 $+ Y\Delta x^4 + X\Delta x^5 + \text{etc}$, et $\Delta\Delta z = \pi\Delta x^2 + \rho\Delta x^3 + \sigma\Delta x^4$
 $+ \tau\Delta x^5 + \text{etc}$, existentibus y et z functionibus ipsius x ,
 est $p : \pi$ (§. 75.). Atque hæc ultima ratio habetur ex
 æquationibus $ddx = pdx^2$, et $ddz = \pi dx^2$, pariter at-
 que ex hisce $\frac{ddy}{dx^2} = p$ atque $\frac{ddz}{dx^2} = \pi$. Cæterum ex ipsa
 methodo, qua formulam pro $\Delta\Delta y$ ex formula pro Δy elicui-
 mus, patet, $ddy = pdx^2$ esse differentiale primum ipsius dy
 $= Pdx$; atque ideo concessis regulis pro inveniendis diffe-
 rentiali ex data functione unius variabilis; differentiale se-
 cundum $ddy = pdx^2$ inveniri ex differentiali primo $dy =$
 Pdx secundum easdem regulas, si dx consideretur, ut
 quantitas constans. Erat enim $\frac{dy}{dx} = P$, sive $dy = Pdx$,
 præterea $\Delta P = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc}$, quare
 est $\frac{dP}{dx} = p$, sive $dP = pdx$. Quia igitur est $ddy = pdx^2$,
 substituto dP loco pdx habetur $ddy = dPdx$, quod est
 differentiale ipsius Pdx habito signo dx pro quantitate
 constante (§. 229.).

§. 231.

Ex præstructis hisce principiis concludere possu-
 mus generalem pro differentiis cujusvis ordinis $\Delta^n y$ fun-
 ctionis y variabilis x formulam. Dico enim, differen-
 tiam ordinis n sequentem habere formam generalem
 $\Delta^n y = p\Delta x^n + q\Delta x^{n+1} + r\Delta x^{n+2} + s\Delta x^{n+3} + \text{etc}$. Quod-
 si enim hæc forma valet pro differentia $\Delta^n y$, eadem quo-
 que valere debet pro differentia $\Delta^{n+1} y$, quia posito

$\Delta^n y = p\Delta x^n + q\Delta x^{n+1} + r\Delta x^{n+2} + s\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$
 erit $\Delta^{n+1} y = \Delta p\Delta x^n + \Delta q\Delta x^{n+1} + \Delta r\Delta x^{n+2} + \Delta s\Delta x^{n+3} + \text{etc.}$
 Sed $\Delta p = \pi\Delta x + \rho\Delta x^2 + \sigma\Delta x^3 + \tau\Delta x^4 + \text{etc.}$, $\Delta q = \Psi\Delta x + \Omega\Delta x^2 + \mathfrak{K}\Delta x^3 + \mathfrak{S}\Delta x^4 + \text{etc.}$, $\Delta r = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + s\Delta x^4 + \text{etc.}$, $\Delta s = \Pi\Delta x + \text{etc.}$ Ideo

$$\Delta^{n+1} y = \begin{aligned} &\pi\Delta x^{n+1} + \rho\Delta x^{n+2} + \sigma\Delta x^{n+3} + \tau\Delta x^{n+4} + \text{etc.} \\ &+ \Psi\Delta x^{n+2} + \Omega\Delta x^{n+3} + \mathfrak{K}\Delta x^{n+4} + \text{etc.} \\ &+ p\Delta x^{n+3} + q\Delta x^{n+4} + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

atque ipsa haec forma pro $\Delta^{n+1} y$ est assumpta. Scriptis itaque Z , Y , X , etc, loco coefficientium ipsarum Δx^{n+2} , Δx^{n+3} , Δx^{n+4} , etc, ut sit $\Delta^{n+1} y = \pi\Delta x^{n+1} + Z\Delta x^{n+2} +$

$Y\Delta x^{n+3} + X\Delta x^{n+4} + \text{etc.}$ habetur ratio $\frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}} = \pi +$

$Z\Delta x + Y\Delta x^2 + X\Delta x^3 + \text{etc.}$ hujusque rationis limes

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \pi. \quad \text{Iple hic limes rationis } \frac{\Delta^{n+1} y}{\Delta x^{n+1}}$$

inveniendus est, quando, ut vulgo dici solet, functionis y differentiale ordinis $n+1$ quaeritur. Exprimatur enim

$$\text{aequatio } \frac{d^{n+1} y}{d^{n+1} x} = \pi \text{ sub hac forma } d^{n+1} y = \pi dx^{n+1}, \text{ at-}$$

que πdx^{n+1} vocatur *differentiale ordinis $n+1$ functionis y* . Tumque generaliter differentiale ordinis $n+1$ fit ex differentiali ordinis n eodem modo, quo $d^2 y$ fit ex dy , sive differentiale $d^{n+1} y$ est differentiale primum ipsius $d^n y$, si dx spectetur ut quantitas constans. Erat enim

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p, \text{ sive } d^n y = p dx^n, \text{ praeterea } \Delta p = \pi\Delta x +$$

$$\rho\Delta x^2 + \sigma\Delta x^3 + \tau\Delta x^4 + \text{etc.}, \text{ ideoque } \frac{dp}{dx} = \pi, \text{ vel } dp$$

$= \pi dx$. Quia igitur est $d^{n+1} y = \pi dx^{n+1}$, substituto dp loco πdx , erit $d^{n+1} y = dp dx^n$, quod est differentiale ipsius $p dx^n$ habito dx pro signo quantitatis constantis (§. 229.).

§. 232.

Generalia hæc ante erant demonstranda, quam ipsum differentiationis negotium poterat suscipi, ad quod ipsum jam adcingere nos possumus. Explicabimus vero in hac sectione tantum regulas pro differentiandis functionibus unius variabilis et quidem algebraicis. Sit itaque primo $y = x^n$ existente n numero integro positivo, ac posito $x + \Delta x$ loco x , habetur $y^1 = (x + \Delta x)^n = x^n +$

$$nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}\Delta x^3 +$$

$$\text{etc. Proinde } y^1 - y = \Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x^2 + \text{etc, atque } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \text{ vel } dy = nx^{n-1}dx.$$

Cujuscunque igitur potestatis variabilis x exponentis integri positivi differentiale habetur, multiplicando eandem per exponentem, dividendo per x, et quod provenit, per dx multiplicando. Crescente jam x secundum progressionem arithmetica, ita ut sit Δx quantitas constans, differentialia omnium ordinum potestatis x^n exponentis integri positivi secundum eandem inveniri possunt regulam. Erit enim

$$d \cdot x^n = nx^{n-1}dx$$

$$dd \cdot x^n = n \cdot n-1 \cdot x^{n-2}d^2x$$

$$d^3 \cdot x^n = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3}d^3x$$

$$d^4 \cdot x^n = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot x^{n-4}d^4x$$

et generaliter

$$d^n \cdot x^n = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-n+1 \cdot x^{n-n}d^nx$$

$$\text{Hinc } \frac{d^n \cdot x^n}{dx^n} \text{ semper evadit quantitas constans =}$$

$n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-n+1$, si fuerit n numerus integer positivus. Ac iste casus vulgo sic exprimitur, dicendo differentiale ordinis n esse constans

§. 233.

Per hæc omnium functionum algebraicarum, quæ sunt rationales et integræ, differentialia possunt inveniri, quia ejusmodi functiones sunt aggregata algebraica partium, quæ sunt producta potestatum variabilis exponentium integrorum et positivorum in constantes multiplicatarum. Si illæ partes sint p, q, r, s , etc, quibus juncta sæpe est constans quaedam a , ita ut sit $y = a + p + q + r + s + \text{etc}$, erit $\Delta y = \Delta p + \Delta q + \Delta r + \Delta s + \text{etc}$. (§. 229.) atque proinde $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x} +$

$$\frac{\Delta q}{\Delta x} + \frac{\Delta r}{\Delta x} + \frac{\Delta s}{\Delta x} + \text{etc.} \quad \text{Hinc ultima ratio}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx} + \frac{dr}{dx} + \frac{ds}{dx} + \text{etc.} \quad \text{Si}$$

itaque ultimæ rationes $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ etc, sint π, ϕ, χ, ψ ,

etc, erit $\frac{dy}{dx} = \pi + \phi + \chi + \psi + \text{etc}$, quæ æquatio

sic quoque scribi potest $dy = (\pi + \phi + \chi + \psi \text{ etc.}) dx$, vel $dy = \pi dx + \phi dx + \chi dx + \psi dx + \text{etc}$. Differentiale itaque ejusmodi functionis est summa differentialium partium functionis y variabilium. Unde

$$d.(a + x) = dx;$$

$$d.(a + bx) = bdx$$

$$d.(a + xx) = 2x dx;$$

$$d.(aa - xx) = -2x dx$$

$$d.(a + bx + cxx) = bdx + 2cxdx$$

$$d.(a + bx + cxx + ex^3) = bdx + 2cxdx + 3ex^2 dx. \text{ etc.}$$

§. 234.

Quodsi y atque z fuerint functiones ipsius x quæcunque; differentiale producti yz constabit ex duobus membris, quæ obtinentur, si uterque factor per differentiale alterius factoris multiplicetur. Sit enim $V = yz$, ac posito $x + \Delta x$ loco x , V abit in V' , y in $y' = y + \Delta y$ atque z in $z' = z + \Delta z$. Proinde $V' = y'z' = (y + \Delta y)(z + \Delta z)$,
=

$$= yz + y\Delta z + z\Delta y + \Delta y\Delta z. \quad \text{Ideo } V^1 - V = \Delta V = y\Delta z + z\Delta y + \Delta y\Delta z, \text{ atque } \frac{\Delta V}{\Delta x} = y \frac{\Delta z}{\Delta x} + z \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y\Delta z}{\Delta x}.$$

Hinc limes hujus rationis evanescente Δx erit $\frac{dV}{dx} =$

$$y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx} + \frac{dydz}{dx} = y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}, \text{ quia } \frac{dydz}{dx}$$

$$= 0 \text{ (§. 75).} \quad \text{Si itaque fuerit } \frac{dz}{dx} = p, \text{ atque } \frac{dy}{dx}$$

$$= q, \text{ erit } \frac{dV}{dx} = yp + zq, \text{ vel } dV = (yp + zq) dx, \text{ vel}$$

$$dV = ypdx + zqdx = ydz + zdy. \quad \text{Est itaque v. g.}$$

$$d.(a+x)(b-x) = -dx(a+x) + dx(b-x) = -adx + bdx - 2xdx.$$

Si productum ex pluribus quam duobus constet factoribus, eadem regula est adhibenda, quia quodlibet ejusmodi productum resolvi potest in duos factores unum simplicem et alterum complexum et quilibet eorum factorum in duos alios donec ad simplices perveniatur. Sic erit $d.pqrs = d.pqr \times s = pqr \times ds + s \times d.pqr$. Præterea $d.pqr = p \times d.qr + qr \times dp$. Cum jam $d.qr$ in potestate sit, operatione repetita semper ad quæsitum differentiale pervenitur.

§. 235.

Existente x quantitate variabili detur series sive finita sive infinita per omnes potentias exponentium integrorum ipsius x, et coefficientes constantes hujus formae $X = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \text{etc.}$; sit autem $X = 0$, manente x variabili: erunt singulae coefficientes $= 0$. Quia enim est x variabilis, ponatur $x = 0$, erit $X = a$, set proinde $a = 0$, per hyp. Ideo $X = bx + cx^2 + ex^3$. . . et dividendo per x fit $0 = b + cx$, ubi posito $x = 0$ fit $b = 0$. Ergo $X = cx^2 + ex^3$. . . et dividendo per x^2 iterum $0 = c + cx$, proinde si $x = 0$, $c = 0$. Quia

haec ratiocinia per omnes seriei terminos continuari possunt, veritas propositi manifesta est. Datis itaque duabus seriebus hujus formae $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$ et $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc.}$, quarum prior posteriori æqualis est; erunt coefficientes singulorum terminorum homogeneorum æquales. Aequalitate enim serierum supposita erit

$$a + b \quad + c \quad + e \quad + f \quad \text{etc.} = 0. \quad \text{Ideo } a - \alpha = 0; b - \beta = 0; c - \gamma = 0; e - \delta = 0; f - \epsilon = 0; \text{etc.} \\ \text{Ergo } a = \alpha; b = \beta; c = \gamma; e = \delta; f = \epsilon; \text{etc.}$$

§. 236.

Si fun ctio quæcunque V variabilis x habet valorem constantem $= A$, erit $\Delta V = 0$. Posito enim $x + \Delta x$ loco x , ut V abeat in $V + \Delta V$; manet $V + \Delta V = A$, (*per hyp.*). Ideo $V + \Delta V - V = \Delta V = A - A = 0$. Ergo in formula $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 + \text{etc.}$, omnes coefficientes $P, Q, R, S, \text{etc.}$ debent esse $= 0$,

si $V = \text{constanti } A$, et proinde quoque $\frac{dV}{dx} = P = 0$.

Hæc regula vulgo sic enuntiatur: differentiale quantitatis constantis esse $= 0$, cujus verus sensus ex his elu-

cescit. Differentianda jam proposita sit functio $y = x^{\frac{n}{m}}$, n et m existentibus numeris integris positivis, et proin-

de $x^{\frac{n}{m}}$ potestate variabilis x exponentis fracti positivi; erit $y^m = x^n$, atque $y^m - x^n = 0$. Proinde

$$\frac{my^{m-1}dy - nx^{n-1}dx}{dx} = \frac{dy}{dx} my^{m-1} - nx^{n-1} = 0. \quad \text{Ideo} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{mx^{\frac{n(m-1)}{m}}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}$$

$\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$, quia $y = x^{\frac{n}{m}}$. Eadem æquatio $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$ sic quoque scribi potest $dy = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$, id est $d. x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$, quæ formula in-

dicat, *regulam pro differentiandis dignitatibus variabilis x exponentis integri positivi §. 232. demonstratam valere quoque pro dignitatibus, quarum exponens est fractus positivus.*

§. 237.

Eadem regula etiam valet pro dignitatibus variabilis x, quarum exponens est numerus negativus sive integer, sive fractus. Sit enim $y = x^{-m}$, atque littera m denotet numerum vel integrum vel fractum positivum. Erit

$y = \frac{1}{x^m}$, $yx^m = 1$, atque $yx^m - 1 = 0$. Quia igitur $yx^m - 1$ habet valorem constantem $= 0$, erit $\frac{myx^{m-1}dx + x^m dy}{dx} = 0$ (§ præc.). Ideo est myx^{m-1}

$+ \frac{dy}{dx} x^m = 0$, $\frac{dy}{dx} x^m = -myx^{m-1} = -mx \cdot m \dagger m-1$

$= -mx^{-1}$ ob $y = x^{-m}$, atque $\frac{dy}{dx} = -mx^{-m-1}$, vel

$dy = -mx^{-m-1}dx$, id est $d. x^{-m} = -mx^{-m-1}dx$.

Hinc simul deducitur regula pro differentianda functione fracta, cujus numerator atque denominator sunt functiones ipsius x. Quaerendum itaque sit differentiale

functionis $\frac{y}{z}$, in qua y et z sunt functiones variabilis

x , erit $\frac{y}{z} = yz^{-1}$. Sed $d. yz^{-1} = yd. z^{-1} + z^{-1}dy$

$$= -yz^{-2}dz + z^{-1}dy = \frac{-ydz}{zz} + \frac{dy}{z} = \frac{-ydz + zdy}{zz}.$$

Unde pro differentiatione fractionis

hæc sequitur regula: *A differentiali numeratoris per denominatorem multiplicato subtrahatur differentiale denominatoris per numeratorem multiplicatum, et residuum dividatur per quadratum denominatoris, erit quotus differentiale quæsitum fractionis propositæ.*

§. 238.

Regulae differentiandi hucusque expositæ tam late patent, ut nulla excogitari possit functio variabilis x algebraica, quæ earum ope non differentiari queat. Ejusmodi enim functionem non aliae ingrediuntur operationes analyticæ præter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, evectionem ad potestates, atque radicum extractiones, qui casus omnes secundum regulas expositas tractari possunt. Quin ipsæ functiones unius variabilis x implicitæ secundum easdem regulas poterunt differentiari. Quæcunque enim sit functio variabilis x implicita algebraica proposita, eadem dabitur per æquationem formæ $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} \dots + S = 0$, ubi $P, Q, R \dots S$ erunt functiones ipsius x , uniformes, ad quam formulam regulæ expositæ nullo negotio adplicantur. Erit enim $(ny^{n-1}dy + (n-1)Py^{n-2}dy + y^{n-1}dP + (n-2)Qy^{n-3}dy + y^{n-2}dQ + (n-3)Ry^{n-4}dy + y^{n-3}dR + \dots + dS) : dx = 0$ (§. 236.). Differentialia vero functionum $P, Q, R \dots S$ tales habent formas, ut sit $dP = pdx$, $dQ = qdx$, $dR = rdx$

$$\dots dS = sdx. \quad \text{Ideo erit } ny^{n-1} \frac{dy}{dx} + (n-1)Py^{n-2} \frac{dy}{dx} + y^{n-1}p + (n-2)Qy^{n-3} \frac{dy}{dx} + y^{n-2}q + (n-3)Ry^{n-4} \frac{dy}{dx} + \dots + sdx = 0$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + y^{n-3}r + \dots + s = 0. \quad \text{Unde conclu-}$$

$$\text{ditur } my^{n-1} \frac{dy}{dx} + (n-1) P y^{n-2} \frac{dy}{dx} + (n-2) Q y^{n-3}$$

$$\frac{dy}{dx} + (n-3) R y^{n-4} \frac{dy}{dx} \dots \text{etc.} = - y^{n-1}p$$

$$- y^{n-2}q - y^{n-3}r \dots - s, \text{ atque proinde } \frac{dy}{dx} = -$$

$$y^{n-1}p + y^{n-2}q + y^{n-3}r \dots + s$$

$$my^{n-1} + (n-1) P y^{n-2} + (n-2) Q y^{n-3} + (n-3) R y^{n-4} + \text{etc.}$$

Quia hic vero pro quovis valore ipsius x functio y habent n valores, etiam scripto $x + \Delta x$ loco x pro Δy inveniri debent n valores, atque ideo totidem diversae rationes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, totidemque diversae limites seu ultimae ra-

tiones $\frac{dy}{dx}$, ita ut ipsa quoque functio $\frac{dy}{dx}$ hoc ca-

su habeat n valores, quorum quilibet separatim invenitur, prouti hic vel ille valor pro y ex æquatione $y^n + P y^{n-1} + Q y^{n-2} + R y^{n-3} + \dots + S = 0$ quæsitus in formula pro $\frac{dy}{dx}$ inventa substituatur.

§. 239.

Data æquatione inter duas variables x et y , ad inveniendam ultimam rationem $\frac{dy}{dx}$ ex eadem opus non

est, ut ante differentiationem actualem omnes ipsius termini in unum æquationis membrum transponantur, sicque æquatio ad formam $V = 0$ redigatur. Ex quotcunque enim terminis functio V constet, ut p, q, r, s , etc. existento $p + q + r + s + \text{etc.} = 0$, quidam eorum terminorum in unum et reliqui in alterum æquatio-

nis membrum facili transponuntur negotio. Si itaque unum æquationis membrum sit P , alterum Q , ut sit P

$= Q$, dico, etiam fore $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$. Est enim $P =$

Q , vel $P - Q = 0$; ideo $\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} = 0$, et proinde.

$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$. Sub quacunque igitur forma proposita sit æquatio inter duas variables x et y , est prioris membri differentiale per dx divisum æquale posterioris membri differentiali per dx diviso, vel quod eodem redit, differentiale prioris membri æquale differentiali posterioris.

Sit $yy = px$, erit $2y \frac{dy}{dx} = p$, atque $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$

$= \pm \frac{p}{2rpx} = \pm \frac{rp}{2rx}$, quia $y = \pm rpx$.

Si sit $ayy = px + pxx$; erit $2ay \frac{dy}{dx} = p + 2px$,

atque $\frac{dy}{dx} = \frac{p + 2px}{2ay} = \pm \frac{p + 2px}{2ar(px + \frac{pxx}{a})}$, quia y

$= \pm r(px + \frac{pxx}{a})$.

Ideo ex $ayy = px - pxx$ fit $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{p - 2px}{2ar(px - \frac{pxx}{a})}$.

§. 240.

Æquationes formae $\frac{dy}{dx} = X$, existente X functione variabilis x , vel duarum variabilium x et y , si valor pro y ex æquatione inter x et y substitutus non sit, vocantur

cantur *Aequationes differentiales*. Ac methodus ex æquatione $\frac{dy}{dx} = X$, quæ exprimit ultimam rationem, cum

qua differentiae variabilium y et x , evanescunt, inveniendi ipsam æquationem inter y et x , ex qua illa differentiendo elicitur, *Calculus integralis* vocatur. Concessis regulis calculi integralis omnis curva algebraica in eodem plano descripta dari potest per æquationem differentialem pariter ac algebraicam inter variabilis x et y , si x abscissam et y applicatam denotet, quia data æquatione inter x et y determinatur limes rationis $\frac{dy}{dx}$, et ideo

vicissim determinato limite rationis $\frac{dy}{dx}$, determinatur

ipsius y a variabili x pendentia. Sic æquatio differentia-

lis $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ æque est pro parabola, ac ista $yy = px$,

quia una earum data simul altera data est. Haec causa est, cur æquatio inter variables x et y pro curva quacunque in plano descripta respectu differentialis suæ *Aequatio integralis* vocetur.

§. 241.

Quod adtinet ad differentialia secunda et reliqua altiora functionum unius variabilis x explicitarum invenienda, pluribus regulis non opus est, quia generaliter $d^{n+1}y$ ex $d^n y$ invenitur eodem modo, quo dy ex ipsa functione y elicitur, eo tantum observato, quod signum dx considerandum sit, tanquam esset quantitas constans (§. 229.). Aequationum differentialium ulteriori differentiationi, quæ functiones implicitas potissimum spectat, peculiarem reservamus tractationem in sequentibus proponendam.

Sit $y = x^n$, atque denotet n numerum integrum vel fractum, positivum vel negativum quemcunque, erit

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n \cdot n-1 \cdot x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot x^{n-4}$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \dots \cdot n-m+1 \cdot x^{n-m}$$

Si uti posuimus, fit $y = x^n$, hæc ultima formula pro $\frac{d^m y}{dx^m}$ generalis est. Si enim valet pro $\frac{d^m y}{dx^m}$, valet quo-

que pro $\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}$. Differentiata enim formula $\frac{d^m y}{dx^m}$

$$\text{fit } \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \dots \cdot n-m+1 \cdot$$

$n-m \cdot x^{n-m-1}$, quæ formula quoque secundum legem assumptam formatur. Eadem vero lex valet pro differentiali primo et secundo, hinc pro tertio, quarto et sequentibus omnibus.

§. 242.

Si data sit series valorum y ; y^I ; y^{II} ; y^{III} ; y^{IV} ; y^V ; etc; quos functio y unius variabilis x induit, si loco x successive ponantur $x + \Delta x$; $x + 2\Delta x$; $x + 3\Delta x$; $x + 4\Delta x$, etc; manifestum est, quod

valoribus ipsius, respondeant valores

x	$\Delta y = y$
$x + \Delta x$	$\Delta y^I = y + \Delta y$
$x + 2\Delta x$	$\Delta y^{II} = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$
$x + 3\Delta x$	$\Delta y^{III} = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$
$x + 4\Delta x$	$\Delta y^{IV} = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$

Ideo

Ideo quivis hujus seriei terminus y^N , qui in ordine est n , primo y non connumerato, et qui oritur scripto $x + n\Delta x$ loco n , erit

$$y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y +$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 y + \dots + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$\Delta^n y$. Quam formulam esse universalem, sequenti ratione demonstro. Dico, si ista formula vera est pro serie n ta, atque valet pro termino r , eadem simul valet pro termino $r+1$. Sit enim seriei n terminus r tus, primo nimirum non connumerato, =

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \Delta^r y, \text{ erit}$$

secundum formulam terminus $r+1$ tus =

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r+1} \Delta^{r+1} y. \text{ Idem vero}$$

invenitur, si loco r ubique in formula pro termino r ponatur $r+1$. Ideo formula vera est pro termino r to, si vera sit serie y^N . Praeterea dico, si formula ista valeat pro serie n ea simul vera est pro serie $n+1$. Est

$$\text{enim (per hyp.) } y^N = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta^2 y +$$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y \dots + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$\Delta^n y$. Oritur vero y^{N+1} ex y^N si ubique loco y substituat^{ur} $y + \Delta y$, et $\Delta y + \Delta^2 y$ loco Δy , $\Delta^2 y + \Delta^3 y$ loco $\Delta^2 y$ et ita porro. Quibus factis

duæ oriuntur series, nimirum

$$I = y$$

$$I = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta^4 y + \text{etc.}$$

$$II = + \Delta y + \frac{n}{1} \Delta^2 y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \Delta^3 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^4 y + \text{etc.};$$

quæ sibi additæ dabunt seriem $(n+1)$ tam, quæ est $= y^{n+1}$.
Est igitur terminus $(r+1)$ us Ser. I + term. r us Ser. II.
 $=$ term. $(r+1)$ to Seriei y^{n+1} . Sed erat terminus

$$(r+1)\text{us seriei I} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r+1} \Delta^{r+1} y$$

ejusdemque seriei terminus

$$r\text{us} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r} \Delta^r y$$

cujus differentia est seriei II. terminus

$$r\text{us} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r} \Delta^{r+1} y.$$

Ergo est terminus $(r+1)$ us seriei y^{n+1}

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \times \frac{1}{1} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \times \frac{n-r}{r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \times \frac{r+1}{r+1} \right) \Delta^{r+1} y$$

$$= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \times \frac{n+1}{r+1} \Delta^{r+1} y$$

$$= \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \cdot r+1} \Delta^{r+1} y.$$

Quod si

Quodsi vero in formula termini $(r+1)$ ti seriei y^N ubique pro n substituatur $n+1$; eadem invenitur formula. Quare si formula inventa pro y^N vera sit, eadem etiam pro y^{N+1} est vera. Sed vera est pro y^I et y^{II} (*per inductionem*). Ergo vera est pro y^{III} , y^{IV} et sequentibus omnibus.

§. 243.

Ponamus jam $n\Delta x = b$, erit $n = \frac{b}{\Delta x}$, atque n talis ipsius Δx functio, quæ evadit $= \infty$, si Δx evanescat. Præterea ob $n\Delta x = b$, erit $n^r \Delta x^r = b^r$, unde $n^r = \frac{b^r}{\Delta x^r}$, atque si r sit numerus integer positivus, $\infty^r = \frac{b^r}{dx^r}$, evanescente Δx . Substituatur in formula inventa $\frac{b}{dx} = \infty$ loco n ; ac simul dx loco Δx , dy loco Δy , d^2y loco Δ^2y ; d^3y loco Δ^3y , etc, ponendum erit. Quo facto habetur $y^N = y + \frac{\infty}{1} dy + \frac{\infty \cdot \infty - 1}{1 \cdot 2} d^2y + \frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3y + \frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \infty - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4y +$ etc. Habent vero ipsius y differentialia sequentes formas $dy = p dx$, $d^2y = q dx^2$, $d^r y = s dx^r$. Ideo terminus hujus seriei generalis indicis r erit

$$\frac{\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \infty - 3 \cdot \infty - \dots - r + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot r} s dx^r$$

Productum ex factoribus $\infty \cdot \infty - 1 \cdot \infty - 2 \cdot \dots \cdot \infty - r + 1$ istam habet formam $\infty^r - f \infty^{r-1} + g \infty^{r-2} - \dots \pm h \infty$, estque $(\infty^r - f \infty^{r-1} + g \infty^{r-2} - \dots \pm h \infty) s dx^r = \infty^r s dx^r$ (§. 78.). Proinde

inde terminus generalis seriei inventae indicis r erit

$$\frac{\infty^r s dx^r}{1.2.3\dots r} = \frac{\infty^r d^r y}{1.2.3\dots r} = \frac{b^r d^r y}{1.2.3\dots r dx^r}, \text{ quia}$$

$$\infty^r = \frac{b^r}{dx^r}. \quad \text{Unde integra series sequentem accipit}$$

$$\text{formam : } y + \frac{b dy}{1. dx} + \frac{b^2 ddy}{1.2. dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{etc. atque hic est valor, quem induit}$$

functio quaecunque variabilis x , si $x+b$ in eadem loco x substituatur.

§. 244.

Formulae hujus singuli termini per continuam ipsius y differentiationem inveniri possunt. Si enim y sit fun-

ctio ipsius x algebraica, erunt $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dd y}{dx^2}$; $\frac{d^3 y}{dx^3}$; etc;

pariter functiones ipsius x algebraicae per differentiationem inveniendae. Si pro b sumatur numerus negativus, reperietur valor, quem functio quaecunque y ipsius x induit, dum ipsa quantitas x diminuitur data quantitate b . Si nimirum loco x ponatur $x-b$, functio y ipsius

x quaecunque accipiet istum valorem $y - \frac{b dy}{1. dx} +$

$$\frac{b^2 d^2 y}{1.2. dx^2} - \frac{b^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1.2.3.4. dx^4} - \text{etc. Quod}$$

si igitur y fuerit functio rationalis integra ipsius x , quoniam tandem ad differentialia constantia pervenitur, valor variatus per expressionem finitam exprimetur. Multiplicem haec formula habet usum. Unus, qui statim se manifestat, in eo consistit, ut ad differentias functionum algebraicarum finitas inveniendas inserviat. Cum enim, dum quantitas variabilis x quantitate finita b augeri assumitur, functio ejus quaecunque y augeatur sua diffe-

differentia prima Δy , existente $b = \Delta x$: differentia ipsius y per continuam differentiationem reperiri poterit.

Erit enim $\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \times \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \times \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4y}{dx^4} + \text{etc.}$ sicque differentia finita Δy exprimitur per seriem, cujus singuli termini secundum potestates ipsius Δx procedunt.

§. 245.

Quemadmodum autem differentia prima est inventa, ita quoque differentiae sequentes similibus expressionibus exhiberi possunt, Induat enim x successive valores $x+b$; $x+2b$; $x+3b$; $x+4b$; etc; atque valores functionis y respondentes erunt

$$y^I = y + \frac{b dy}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 ddy}{1.2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 d^3y}{1.2.3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 d^4y}{1.2.3.4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{II} = y + \frac{2b dy}{1 \cdot dx} + \frac{4b^2 ddy}{1.2 \cdot dx^2} + \frac{8b^3 d^3y}{1.2.3 \cdot dx^3} + \frac{16b^4 d^4y}{1.2.3.4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{III} = y + \frac{3b dy}{1 \cdot dx} + \frac{9b^2 ddy}{1.2 \cdot dx^2} + \frac{27b^3 d^3y}{1.2.3 \cdot dx^3} + \frac{81b^4 d^4y}{1.2.3.4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$y^{IV} = y + \frac{4b dy}{1 \cdot dx} + \frac{16b^2 ddy}{1.2 \cdot dx^2} + \frac{64b^3 d^3y}{1.2.3 \cdot dx^3} + \frac{256b^4 d^4y}{1.2.3.4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

etc.

Nn

Cum

Cum igitur sit

$$\Delta y = y^I - y$$

$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^I + y$$

$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^I - y$$

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^I + y$$

$$\Delta^n y = y^N - \frac{n}{1} y^{N-I} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{N-II} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{N-III} \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^{N-IV} - \text{etc.}$$

istae differentiae per differentialia hoc modo exprimentur :

$$\Delta y = \frac{b dy}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2 \cdot 1) b^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{(2^3 - 2 \cdot 1) b^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{(2^4 - 2 \cdot 1) b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1) b^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{(3^4 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1) b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4 - 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1) b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{(4^5 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^3 - 4 \cdot 1) b^5 d^5 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^5} \\ + \text{etc.}$$

§. 246.

Formulam pro $\Delta^n y$ universalem esse sic patet. Sumo eandem veram esse pro $\Delta^n y$, atque exinde concludo eandem quoque pro $\Delta^{n+1} y$ esse veram. Sit itaque

$$\Delta^n y = y^N - \frac{n}{1} y^{N-I} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{N-II} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{N-III} \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^{N-IV} - \text{etc.}$$

erit terminus hujus seriei generalis indicis r non connumerato

$$\text{to primo} = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r} y^{N-R},$$

quod

quod facile patet. Oritur vero $\Delta^n y + \Delta^{n+1} y$ ex $\Delta^n y$ si ubique loco y^N scribatur y^{N+1} , y^N loco y^{N-1} , y^{N-1} loco y^{N-2} , et sic porro. Quo facto duae orientur series

$$I. \Delta^n y = y^N - \frac{n}{1} y^{N-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{N-2} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{N-3} + \dots$$

$$II. \Delta^n y + \Delta^{n+1} y = y^{N+1} - \frac{n}{1} y^N + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{N-1} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{N-2} + \dots$$

etc. ubi prior series a posteriori subtrahenda dabit seriem, quae est $= \Delta^{n+1} y$. Est igitur terminus $(r+1)$ us seriei II — termin. r to seriei I = termino $(r+1)$ to seriei $\Delta^{n+1} y$. Est vero terminus $(r+1)$ us seriei II =

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r+1} y^{N-R}$$

et terminus r us seriei I =

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \dots \cdot n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r} y^{N-R}$$

Ideo $(r+1)$ us seriei $\Delta^{n+1} y$ erit

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot \dots \cdot n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} y^{N-R}$$

$$= \frac{n+1 \cdot n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \dots \cdot n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot r \cdot r+1} y^{N-R}$$

Quodsi vero in formula termini $(r+1)$ ti seriei $\Delta^n y$ ubique substituatur $r+1$ loco n ; eadem invenitur formula. Proinde si formula inventa pro $\Delta^n y$ vera sit, eadem quoque pro $\Delta^{n+1} y$ est vera. Sed valet pro Δy et $\Delta^2 y$, ergo pro $\Delta^3 y$, pro $\Delta^4 y$ et sequentibus omnibus.

Ideo generaliter est

$$\Delta^n y = \left(n^n - \frac{n}{1} (n-1)^n + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} (n-2)^n - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-3)^n + \text{etc.} \right) b^n d^n y$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \cdot dx^n$$

$$+ \left(n^{n+1} - \frac{n}{1} (n-1)^{n+1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} (n-2)^{n+1} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (n-3)^{n+1} + \text{etc.} \right) b^{n+1} d^{n+1} y$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n+1 \cdot dx^{n+1}}{N n 2}$$

+ etc.

N n 2

§. 247.

§. 247.

Quia functionis y unius variabilis x differentia, quam capit posito $x + \Delta x$ loco x , inventa est $\Delta y =$

$$\frac{\Delta x dy}{1. dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1. 2. dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1. 2. 3. dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1. 2. 3. 4. dx^4} + \text{etc};$$

$$\text{erit ratio } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x ddy}{1. 2. dx^2} + \frac{\Delta x^2 d^3 y}{1. 2. 3. dx^3} +$$

$$\frac{\Delta x^3 d^4 y}{1. 2. 3. 4. dx^4} + \text{etc.} \quad \text{Accidit vero interdum, ut valo-}$$

re quodam determinato pro x substituendo fiat $\frac{dy}{dx} = 0$;

$$\text{tum itaque fit } \Delta y = \frac{\Delta x^2 ddy}{1. 2. dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1. 2. 3. dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1. 2. 3. 4. dx^4}$$

$$+ \text{etc, et proinde ratio } \frac{\Delta y}{\Delta x^2} = \frac{ddy}{1. 2. dx^2} + \frac{\Delta x d^3 y}{1. 2. 3. dx^3}$$

$$+ \frac{\Delta x^2 d^4 y}{1. 2. 3. 4. dx^4} + \text{etc, hujusque rationis ultima } \frac{dy}{dx^2}$$

$$= \frac{ddy}{2 dx^2}. \quad \text{Unde porro concluditur, casu } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ et}$$

$$\frac{d dy}{dx^2} = 0 \text{ fore } \frac{dy}{dx^3} = \frac{d^3 y}{1. 2. 3. dx^3}, \text{ et si præterea } \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$= 0, \text{ esse } \frac{dy}{dx^4} = \frac{d^4 y}{1. 2. 3. 4. dx^4}. \quad \text{Generatim itaque si omnes}$$

$$\text{coefficientes } \frac{dy}{dx}, \frac{d dy}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3} \dots \frac{d^m y}{dx^m} \text{ fuerint}$$

$$= 0, \text{ erit } \frac{dy}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1} y}{1. 2. 3 \dots m+1. dx^{m+1}}. \quad \text{Si itaque}$$

$$\text{fit functio } \frac{d^{m+1} y}{1. 2. 3 \dots m+1. dx^{m+1}} = p, \text{ ut habea-}$$

tur

tur $\frac{dy}{dx^{m+1}} = p$; hæc æquatio sic quoque exprimi potest $dy = p dx^{m+1}$ (§. 229. 230.).

§. 248.

His positis propofita fit fractio quæcunque $y = \frac{P}{Q}$ existentibus P et Q functionibus ipsius x , atque fieri potest, ut valore quodam determinato $= a$ pro x substituto P et Q simul evanescant, quo casu fit $y = \frac{0}{0}$, quem valorem finitum esse posse ex antecedentibus manifestum est. Ipse vero iste valor $= \frac{0}{0}$ est limes ratio-

nis $\frac{P}{Q}$, ad quem ista ratio perpetuo adpropinquat functionibus P et Q simul ad valorem $= 0$ adpropinquantibus, dum variabilis x ad valorem $= a$ accederet. Valor variabilis x ante erat $a + \Delta x$, quam evanescente Δx attingebat valorem $= a$; proinde valores functionum P et Q ante erant $0 + \Delta P$ et $0 + \Delta Q$, quam evanescente Δx et cum ea simul ΔP et ΔQ factæ erant $= 0$. Unde

patet, ipsum functionis $\frac{P}{Q}$, casu $x = a$, valorem esse $\frac{0 + \Delta P}{0 + \Delta Q}$, id est functio y , casu $x = a$ evadit $= \frac{\Delta P}{\Delta Q}$. Omnia manifesta fient ex facili exemplo, quod

sequitur. Si sit $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, casu $x = a$, erit $y =$

$$\frac{aa - aa}{a - a} = \frac{0}{0}. \text{ Sed ante erat } x = a + \Delta x, \text{ quam evanescente } \Delta x \text{ fieret } x = a, \text{ atque ideo ante erat } y =$$

$$\frac{aa - (a + \Delta x)^2}{a - a - \Delta x}, \text{ quam casu } x = a \text{ evaderet } y = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{aa - aa}{a - a} = \frac{0}{0}. \text{ Sed ante erat } x = a + \Delta x, \text{ quam evanescente } \Delta x \text{ fieret } x = a, \text{ atque ideo ante erat } y =$$

$$\frac{aa - (a + \Delta x)^2}{a - a - \Delta x}, \text{ quam casu } x = a \text{ evaderet } y = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{aa - (a + \Delta x)^2}{a - a - \Delta x}, \text{ quam casu } x = a \text{ evaderet } y = \frac{0}{0}.$$

$$\frac{aa - (a + \Delta x)^2}{a - a - \Delta x}, \text{ quam casu } x = a \text{ evaderet } y = \frac{0}{0}.$$

Unde patet, quia pro valore $x = a + \Delta x$ erat $y =$

$$\frac{aa - aa - 2a\Delta x - \Delta x^2}{a - a - \Delta x}, \text{ evanescente } \Delta x \text{ esse } y =$$

$$\frac{aa - aa - 2adx - dx^2}{a - a - dx} = \frac{-2adx - dx^2}{-dx} = 2a =$$

$$\frac{d.(aa - xx)}{dx} : \frac{d.(a - x)}{dx} = \frac{d(aa + xx)}{d.(a - x)}.$$

§. 249.

Quoties itaque fractio hujus formæ $\frac{P}{Q}$ occurrat, cujus numerator et denominator certo casu, ut $x = a$ evanescent; valor fractionis $\frac{P}{Q}$ per sequentem regulam invenitur. *Querantur quantitatuum P et Q differentialia casu $x = a$, eaque loco ipsarum P et Q substituantur, quo facto erit $\frac{dP}{dQ}$ valor fractionis quaesitus.*

Si itaque hoc casu $x = a$ foret $\frac{dP}{dQ} = p$ et $\frac{dQ}{dx} = q$; fiet $\frac{dP}{dQ} = \frac{p}{q}$. Si vero sit $\frac{dP}{dx^m} = R$, atque $\frac{dQ}{dx^n} = S$, vel $dP = Rdx^m$ et $dQ = Sdx^n$, erit fractionis $\frac{P}{Q}$

casu $x = a$ valor $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, qui finitus erit, si $m = n$,

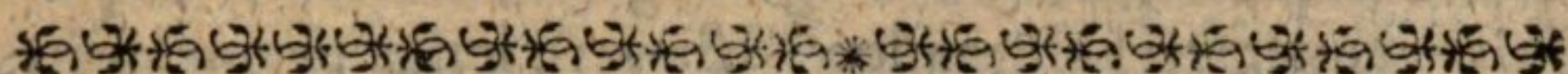
infinite magnus si $m < n$, infinite parvus seu nullus, si $m > n$. Si propositæ fractionis termini P et Q posito $x = a$

evaderent infiniti, quia $\frac{P}{Q} = \frac{1 : Q}{1 : P}$ eadem methodo

casu $x = a$ valor fractionis $\frac{P}{Q}$ casu $x = a$ invenitur,

quia

quia coincidit cum valore fractionis $\frac{1:Q}{1:P}$, cuius numerator et denominator tum casu $x = a$ evanescent. Eodem modo invenitur valor producti 0∞ , qui cum valore $0:\frac{1}{\infty} = \frac{0}{0}$ coincidit.



SECTIO XVI.

DE

VSV CALCULI DIFFERENTIALIS IN DOCTRINA SERIERVM.

§. 250.

Sit $y = x^n$, existente n numero fracto positivo vel negativo, vel etiam integro negativo; atque posito $(x+b)$ loco x ,

fiet $(x+b)^n = y + \frac{b \cdot dy}{1 \cdot dx} + \frac{bb \cdot ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3}$

$+ \frac{b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc.}$ Est vero $y = x^n$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$,

$\frac{ddy}{dx^2} = n \cdot n-1 \cdot x^{n-2}$, et generaliter $\frac{d^r y}{dx^r} = n \cdot n-1 \cdot n$

$- 2 \dots n-r+1 \cdot x^{n-r}$. Est itaque terminus seriei

$(x+b)^n$ generalis indicis r , $\frac{b^r d^r y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r \cdot dx^r} =$

$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} x^{n-r} b^r$; ex quo integra

series istam recipit formam $(a+b)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} b +$

$\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} b^3 + \dots$

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r} x^{n-r} b^r \quad \text{Formula}$$

igitur pro elevando binomio quocunque ad quamlibet potentiam exponentis integri in §. 143. exposita adeo universalis est, ut vera quoque sit pro binomio ad dignitatem quamcunque exponentis integri negativi, ut et fracti vel positivi vel negativi elevando. Ista vero series perpetuo in infinitum excurrit, nisi exponens sit integer positivus.

§. 251.

Perspecta forma dignitatis cujuscunque radicis binomiae, trinomiae etiam radicis dignitas ejusdem gradus formabitur, et quadrinomiae et generatim polynomiae cujuscunque, ut $a+b+c+d+e+\text{etc}$, suntis successive a , $a+b$, $a+b+c$, etc, pro nomine primo et littera has sequente pro altero. Potest vero hic quoque formula generalis indagari pro infinitinomio sequentem in modum. Sit data series $1+ax+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\epsilon x^5+\text{etc}$, cujus potentia gradus m quaeritur. Ponatur $ax+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\epsilon x^5+\text{etc} = y$, sitque ipsa series quaesita $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{etc} = z$; esse igitur debet $(1+y)^m = dz$, atque proinde $m(1+y)^{m-1} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, vel $mz \frac{dy}{dx} = (1+y) \frac{dz}{dx}$.

$$\text{Jam } \frac{dy}{dx} = a + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\epsilon x^4 + \text{etc},$$

$$\frac{dz}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{etc.} \quad \text{Ergo}$$

$$(1+y) \frac{dz}{dx} = A + Aax + A\beta x^2 + A\gamma x^3 + A\delta x^4 + A\epsilon x^5 + \dots$$

$$+ 2B + 2Ba + 2B\beta + 2B\gamma + 2B\delta$$

$$+ 3C + 3Ca + 3C\beta + 3C\gamma$$

$$+ 4D + 4Da + 4D\beta$$

$$+ 5E + 5Ea$$

$$+ 6F \dots \dots$$

mz

$$\begin{aligned}
 mz \frac{dy}{dx} = & ma + 2m\beta x + 3m\gamma x^2 + 4m\delta x^3 + 5m\epsilon x^4 + \dots \\
 & + mAa + 2mA\beta + 3mA\gamma + 4mA\delta \\
 & + mBa + 2mB\beta + 3mB\gamma \\
 & + mCa + 2mC\beta \\
 & + mDa \dots
 \end{aligned}$$

Aequando jam terminos homogeneos invenitur

$$A = ma; B = \frac{(m-1)Aa + 2m\beta}{2};$$

$$C = \frac{(m-2)Ba + (2m-1)A\beta + 3m\gamma}{3};$$

$$D = \frac{(m-3)Ca + (2m-2)B\beta + (3m-1)A\gamma + 4m\delta}{4}$$

$$E = \frac{(m-4)Da + (2m-3)C\beta + (3m-2)B\gamma + (4m-1)A\delta + 5m\epsilon}{5}.$$

§. 252.

Ut formula generalis pro coefficiente potentiae x^n commodè investigari queat; seriei $1+y$ coefficientis quivis dicatur λ addito ejus numero ut sit $\lambda_1; = a, \lambda_2; = \beta$, atque $\lambda_n; = \gamma$, qui pertinet ad x^n , $\lambda_{n-1};$ vero, qui pertinet ad x^{n-1} , ficque porro. Pari modo sit L coefficientis quivis seriei z , addito numero, ut sit $L_1; = A, L_2; = B, L_n; = \gamma$, et $L_{n-1};$ pertineant ad x^n et x^{n-1} . Hoc posito erit

$$1+y = 1 + \lambda_1; x + \lambda_2; x^2 + \dots + \lambda_r; x^r + \dots + \lambda_n; x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1; + 2\lambda_2; x + 3\lambda_3; x^2 + \dots + r\lambda_r; x^{r-1} + \dots + n\lambda_n; x^{n-1}$$

$$z = 1 + L_1; x + L_2; x^2 + \dots + L_r; x^r + \dots + L_n; x^n$$

$$\frac{dz}{dx} = L_1; + 2L_2; x + 3L_3; x^2 + \dots + rL_r; x^{r-1} + \dots + nL_n; x^{n-1}$$

Quodsi jam primo quaeratur coefficientis producti $(1+y)z$

$\frac{dz}{dx}$ ad x^n , sic concludendum est. Terminum seriei $\frac{dz}{dx}$,

in quibus variabilis elevata est ad potentiam n ; $n-1$; $n-2$; . . . $n-r$; . . . 1 ; ducti respective in terminos seriei $1+y$, qui habent variabilem elevatam ad potentiam 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; . . . r . . . n ; præbent facta continentia x^n . Summa igitur coefficientium eorum factorum est coefficientis quæsitus, qui ideo fit

$$1.L1; .\lambda^n + 2.L2; .\lambda^{n-1}; + 3.L3; .\lambda^{n-2}; \dots + (n-r+1).L_{n-r+1}; .\lambda^r \\ \dots + n.Ln; \lambda 1; + (n+1).Ln+1; .1.$$

Deinde quæraturs coefficientis producti $z \frac{dy}{dx}$ ad x^n , qui

eodem modo componitur ex seriei $\frac{dy}{dx}$ coefficienti-

bus, qui pertinent ad potentias n ; $n-1$; . . . $n-r$. . . 0 ductis in eos seriei z , qui pertinent ad 0 ; 1 ; 2 ; . . . r . . . n ; atque proinde invenitur

$$(n+1).\lambda^{n+1}; .1 + n.\lambda^n; .L1 + (n-1).\lambda^{n-2}; .L2 \dots \\ + r.\lambda^r; .Ln-r+1; \dots + 2.\lambda^2; .Ln-1; + \lambda 1; .Ln;$$

Denique singulæ partes coefficientis posterioris multiplicentur per m ; quod prodit ponatur priori coefficienti æquale, unde si eruatur $Ln+1$; fiet

$$(n+1).Ln+1; = (m-n).Ln; .\lambda 1 + (2m-n+1).Ln-1; .\lambda 2 \\ \dots + (m.r-n+r-1).Ln-r+1; .\lambda^r; \\ \dots + (m.n-1).L1; .\lambda^n; + m.(n+1).\lambda^{n+1}.$$

Utrinque itaque per $n+1$ diviso habetur $Ln+1$; per coefficientes datos ab initio seriei $1+y$, et jam inventos præcedentes seriei z .

Hujus ipsius coefficientis generalis *pars generalis* est
$$\frac{(mr-n+r-1).Ln-r+1; .\lambda^r}{m+1},$$
 quæ substituendo successive $1.2.3 \dots n+1$ in locum ipsius r , præbet partes coefficientis primam, secundam . . .

ulque

usque ad ultimam. Nam $\lambda 0$; est $= 1$ si $L1$; $= A$, quia λ præcedit coefficientem A , qui seriei z primus est appellatus, coefficientes vero hanc unitatem præcedentis cum nulli sint, erit $L - 1$; $= 0$, $L - 2$; $= 0$, et sic porro

§. 253.

Detur nunc series $kx^e + ax^{e+d} + \beta x^{e+2d} + \gamma x^{e+3d}$
 $\dots$; ea resolvitur in $kx^e \cdot (1 + \frac{a}{k}x^d + \frac{\beta}{k}x^{2d} + \frac{\gamma}{k}x^{3d} \dots)$
 $= kx^{\frac{e}{d}} \cdot (1 + \frac{a}{k}z + \frac{\beta}{k}z^2 + \frac{\gamma}{k}z^3 \dots)$

si ponatur $x^d = z$, atque proinde $x = z^{\frac{1}{d}}$. Data vero potentia indefinita serie $1 + \frac{a}{k}z + \frac{\beta}{k}z^2 + \frac{\gamma}{k}z^3 \dots$ quam vocavimus $1 + y$; datur eadem potentia ipsius $kx^{\frac{e}{d}} \cdot (1 + y)$. Proinde hæc methodus complectitur series omnes, in quibus exponentes potentiarum variabilis constituunt progressionem arithmeticam. Si seriei $kx^e + kx^{e+d} + \beta x^{e+2d} \dots$ exponentium unus vel plures sint negativi, erunt e , d , ambo, vel alteruter horum numerorum negativi, et hinc determinabitur $x^{\frac{e}{d}}$; sed series $1 + y$ hac negativi conditione non adficietur, ut nec illa universalitati methodi noceat.

Ad casus particulares hæc facile adplicantur. Ita pro quadrato trinomiali, ubi $\gamma = \delta = e \dots = 0$, coefficientens inventus generalis abit in $\frac{(2-n) \cdot Ln; a + (5-n)Ln-1; \beta}{n+1}$.

Qui in locum ipsius n positus successive 0; 1; 2; 3; 4; 5;

$$\text{dat } A = 2a; B = \frac{Aa + 4\beta}{2} = a^2 + 2\beta; C = \frac{0 + 3A\beta}{3} =$$

$$2a\beta; D = \frac{-Ca + 2B\beta}{4} = \beta^2; E = \frac{-2Da + C\beta}{5} = 0$$

$$F =$$

$$F = \frac{-3.E + 0.D}{6} = c. \quad \text{Pro } n > 5 \text{ evanescunt tam}$$

L_n , quam L_{n-1} , unde apparet, quod pro multinomio definito scripto integro positivo loco m , series tandem abruinpatur, coefficientibus evanescentibus.

§. 254.

Differentia cujusvis ordinis $\Delta^n y$ functionis y unius variabilis x datur per seriem hujus formæ $\Delta^n y = P\Delta x^n + Q\Delta x^{n+1} + R\Delta x^{n+2} + S\Delta x^{n+3} + \text{etc}$, estque ultimara-

tio $\frac{d^n y}{dx^n} = P$. Habetur præterea $\Delta^n y^m = P^m (\Delta x)^m$

$$+ \frac{m}{1} P^{m-1} Q (\Delta x)^{m+1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} P^{m-2} Q^2 + \frac{m}{1} P^{m-1}$$

$R (\Delta x)^{m+1} + \text{etc}$, et exinde concluditur ultima ratio

$$\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m. \quad \text{Data igitur ultima ratione } \frac{d^n y}{dx^n},$$

quæ expressio non aliud significat, nisi certam ipsius x functionem, ex functione y per explicatas differentiationis regulas deducendam, simul habetur ejus dignitas quæcunque per consuetas Algebrae operationes. Si

$$\text{enim v. g. fuerit } \frac{dy}{dx} = P, \text{ est } \frac{dy^2}{dx^2} = P^2, \frac{dy^3}{dx^3} = P^3,$$

$$\frac{dy^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} = P^{\frac{1}{2}}, \frac{dy^{-1}}{dx^{-1}} = P^{-1}, \text{ et ita porro.}$$

§. 252.

Data formula generali pro potentia indefinite polynomii vel infinitinomii cujuscunque solvi possunt problemata reversionis serierum. Est enim *reversio serierum* illud negotium, quo data variabili y per seriem infinitam per omnes potentias ipsius x , quarum exponentes constituunt datam progressionem arithmetica; vel quoque datis duabus ejusmodi seriebus, quarum una continet variabilem y et altera variabilem x , per potentias expo-

exponentium in progressionem arithmetica progredien-
 tium; invenitur altera variabilis x per eiusmodi seriem.
 Explicabimus hic ipsam methodum in formula quadam
 generali, præcipuos, qui occurrere possunt, casus spe-
 ciales sub se complectente; ipsa problemata, quæ alias
 per reversionem serierum solvi solent, infra brevioribus
 methodis soluturi. Sit itaque $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} +$
 ex^{t+3} etc. $= ky^t + my^{t+1} + ny^{t+2} + py^{t+3}$ etc. Compendii
 causa positus est denominator $= 1$. Potest pro lubitu as-
 sumi alius denominator, et methodus eadem manet, cu-
 jus regulæ sunt sequentes. Assumitur $x = Ay + By^2$
 $+ Cy^3 + Dy^4 +$ etc, et coefficientes $A, B, C, D,$ etc,
 determinantur ex æquatione data $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} +$
 $ex^{t+3} +$ etc. $- ky^t - my^{t+1} - ny^{t+2} - py^{t+3} -$ etc. $= 0$,
 substituendo valores ipsarum $x^t, x^{t+1}, x^{t+2},$ etc; erit

$$\textcircled{a} = \left\{ \begin{array}{l} ax^t = aA^t y^t + \frac{t}{1} aA^{t-1} B y^{t+1} + \frac{t \cdot t-1}{1 \cdot 2} aA^{t-2} B^2 y^{t+2} \\ \quad + \frac{t}{1} aA^{t-1} C y^{t+2} \text{ etc.} \\ + bx^{t+1} = \dots + bA^{t+1} y^{t+1} \dots + \frac{t+1}{1} bA^{t-2} B y^{t+2} \text{ etc.} \\ + cx^{t+2} = \dots \dots \dots + CA^{t+1} y^{t+2} \text{ etc.} \\ - ky^t - my^{t+1} - \text{etc.} = -ky^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Quia hic singuli coefficientes sunt $= 0$ (§. 235.) inveni-

$$\text{tur } A = \sqrt[t]{\frac{k}{a}}; \quad B = \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}};$$

$$\textcircled{c} = \frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1} bA^{t-2} - \frac{t \cdot t-1}{1 \cdot 2} aA^{t-2} B^2}{taA^{t-1}};$$

etc.

Si fuerit $y = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ etc. et
 queritur x per seriem $Ay + By^2 + Cy^3 +$ etc; erit
 $t = 1,$

$t = 1, k = 1, m = 0 = n = p$, etc. Atque si $y = ax + cx^3 + fx^5 + \text{etc}$, simul est $b = 0 = e$ etc.

§. 256.

Demonstravimus §. 243, quod functio y variabilis x loco x posito $x \pm b$, sequentem recipiat valorem

$$y \pm \frac{b dy}{1 \cdot dx} + \frac{b^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} \pm \frac{b^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{b^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} \pm \frac{b^5 d^5 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^5} + \text{etc.}$$

Hæc vero expressio locum habere debet, siue pro b quantitas quæcunque constans assumatur, siue etiam variabilis, ab ipsa x pendens. Inventis enim per differentiationem valoribus functionum

$$\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \text{etc}, \text{ in factoribus } b, b^2, b^3, \text{etc}, \text{ variabilitas non spectatur, et ideo perinde est, siue } b \text{ denotet quantitatem constantem, siue variabilem ab } x \text{ pendentem.}$$

Sit itaque $b = x$, atque si in functione y loco x scribatur $x - x$, vel quod idem est, si ponatur $x = 0$, valor functionis erit

$$y - \frac{x dy}{1 \cdot dx} + \frac{x^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}$$

Ex his itaque concludi potest, si y ejusmodi fuerit variabilis x functio, ut ipsa evanescat, posito $x = 0$, fore

$$y - \frac{x dy}{1 \cdot dx} + \frac{x^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.} = 0.$$

Quodsi y autem sit talis variabilis x functio, quæ posito $x = 0$ recipit valorem datum $= A$; erit

$$y - \frac{x dy}{1 \cdot dx} + \frac{x^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{x^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc} = A.$$

Si loco x ponatur nx , hoc est

$x +$

$x + (n-1)x$, functio y istum habet valorem $y + \frac{(n-1)xdy}{1.d x}$
 $+ \frac{(n-2)^2 x^2 d^2 y}{1.2.d x^2} + \frac{(n-1)^3 x^3 d^3 y}{1.2.3.d x^3} + \text{etc.}$ Si deni-
 que in functione y loco x ponatur quaecunque ipsius fun-
 ctio, quæ sit t ; ipsa functio y , ob $t = x + t - x$, in
 formam sequentem $y + \frac{(t-x)dy}{1.d x} + \frac{(t-x)^2 d^2 y}{1.2.d x} +$
 $\frac{(t-x)^3 d^3 y}{1.2.3.d x^3} + \text{etc.}$ transmutabitur.



SECTIO XVII.

DE

MAXIMIS ET MINIMIS FUNCTIONVM VNIVS VARIABILIS.

§. 257.

Quando functio quædam y quantitatis variabilis x ita
 est comparata, ut crescente variabili x ejus fun-
 ctio y continuo crescat et decreseat; ipsa hæc functio ad
 valorem quendam ipsius x determinatum habebit valo-
 rem maximum vel minimum, hoc est ejusmodi valorem,
 qui sit major vel minor, quam antecedentes et sequen-
 tes. Habebit vero functio y *valorem maximum absolu-
 tum*, si posita $x = f$ valor ipsius x major sit quam omnes
 antecedentes et consequentes, ita ut posito vel $x > f$,
 vel $x < f$, utcunque semper minor inveniatur ipsius
 x valor eo, qui prodit, si sit $x = f$. Pari ratione fun-
 ctio ipsius y habebit *valorem minimum absolutum*, si po-
 sito $x > f$ vel $x < f$ valor ipsius y respondens semper
 ma-

major sit eo, qui prodit posito $x = f$. Præterea autem quoque functio y maximum valorem recipere dicitur, posito verbi gratia $x = f$, si iste valor major fuerit, quam proximi antecedentes et consequentes, qui oriuntur, si $x = f$, quantitate quadam exigua augeatur vel minuatur; etiamsi aliis valoribus loco x substitutis functio y majores forte valores recipiat. Atque simili modo functio y minimum valorem habere dicitur posito $x = f$, si iste valor minor fuerit, quam proximi antecedentes et consequentes, qui oriuntur, si $x = f$, quantitate quadam exigua augeatur, vel minuatur, licet aliis valoribus loco x substitutis functio y minores forte habeat valores. Hi valores functionis y vocari possunt *maximi vel minimi relativi*, atque de iisdem in sequentibus tantum sermo erit. Ante autem, quam ipsa methodus hæc maxima et minima inveniendi explicetur, notari convenit, hanc investigationem proprie in iis tantum casibus locum habere, quando functio y ipsius x , quae proponitur, est uniformis. Quando enim y est functio ipsius x multiformis, proprie dici nequit, eam posito $x = f$ valorem habere maximum vel minimum. Quia enim posito $x = f$ functio y plures valores simul obtinet, atque præcedentes æque ac sequentes sint numero plures, dijudicatio maximi et minimi aliis innititur principiis postea explicandis, nisi omnes functionis y valores, qui singulis ipsius x valoribus respondent, sint præter unum imaginarii, quo casu hujusmodi functiones ut uniformes considerari possunt. Primo igitur loco functiones uniformes, et quae pro talibus haberi possunt contemplabimur, deinde ad functiones multiformes ea, quae explicanda erunt, applicaturi.

§. 255.

Quodsi igitur sit y functio variabilis x uniformis, quæ pro quolibet valore ipsius x determinato semper unum habet valorem realem, is valor qui efficit, ut y habeat valorem maximum vel minimum, ipsa littera x deno-

denotetur. In casu itaque maximi sive loco x substituatur $x + a$, sive $x - a$, valor ipsius y minor erit, quam si $a = 0$, et major in casu minimi. Posito autem $x + a$ loco x , functio y eam accipit formam

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} + \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

ex qua posito $x - a$ loco x fit

$$y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} - \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

Proinde in casu maximi esse debet

$$y > y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} + \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

$$y > y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2. dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} - \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

In casu vero, quo valor ipsius y fit minimus, erit

$$y < y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2. dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} + \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

$$y < y - \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2. dx^2} - \frac{a^3 d^3 y}{2.3. dx^3} + \frac{a^4 d^4 y}{2.3.4. dx^4} - \frac{a^5 d^5 y}{2.3.4.5. dx^5} + \text{etc.}$$

Quia hæ series sunt convergentes, seu quilibet consequens terminus minor antecedente, posita pro a fractione valde parva; patet, ea quæ hic supponuntur, locum habere non posse, nisi secundus seriei terminus $\frac{ady}{dx}$

fit $= 0$. Positis enim $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc, non esse $= 0$,

sive præterea istæ quantitates positivæ fuerint sive negativæ, in duabus seriebus pro variato ipsius y valore inventis termini secundi, quarti, sexti, septimi, etc, semper

habent contraria signa, proinde nisi sit $\frac{ady}{dx} = 0$, va-

lor ipsius y neque maximus esse potest, neque minimus. Sint enim primo omnes seriei pro $x + a$ termini positivi, et erunt seriei pro $x - a$ termini alternatim negativi et positivi ita, ut summa negativorum excedat summam positivorum. Proinde prima series est $> y$ altera $< y$ et ideo nec maximum locum habet, nec minimum. Deinde sint omnes prioris pro $x + a$ seriei termini negativi, erit hæc series $< y$, altera vero $> y$. Tertio autem quocumquo modo signa prioris seriei variant, tamen si summa negativorum prioris seriei terminorum excedat summam positivorum; summa positivorum alterius seriei excedet summam negativorum et vice versa. Nullo igitur plane modo maximum vel minimum habere po-

test locum, nisi sit $\frac{ady}{dx} = 0$. Quare cum non sit $a =$

0 , debet esse $\frac{dy}{dx} = 0$. Demonstravimus itaque, si

y habet valorem maximum vel minimum, debet esse

$\frac{dy}{dx} = 0$; Non autem vicissim concludere licet; quo-

ties

ties est $\frac{dy}{dx} = 0$, toties valor ipsius y est maximus vel minimus. Fieri enim potest, ut valor ipsius y neque maximus evadat, neque minimus. Interim tamen criteria, ex quibus in casu $\frac{dy}{dx} = 0$ ad valorem pro y maximum vel minimum concludi potest, ipsa earum ferierum natura suppeditat: eaque invenire possumus, si attendamus ad sequentia.

§. 259.

Ex functione y variabilis x data quaeratur valor ipsius $\frac{dy}{dx}$. Ponatur $\frac{dy}{dx} = 0$, atque ex hac æquatione quaerantur radices seu valores ipsius x reales. Sit f unus ex valoribus ipsius x , qui ex æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ inventus est, atque hic valor substituatur in functionibus $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc, atque hac substitutione fiat $\frac{d^2y}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, etc. ipsa vero functio y posito f loco x habeat valorem F . Proinde, si loco x ponatur $f + a$, ista functio abit in $F + \frac{1}{2}a^2p + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r$ etc.

loco x vero posito $f - a$ prodibit $F + \frac{1}{2}a^2p - \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r -$ etc.

atque hinc patet, si p sit quantitas positiva, utrumque valorem esse $> F$ ideoque F esse minimum, si vero sit p quantitas negativa, scripto f loco x , functio y habet valorem maximum. Potest vero quoque esse $p = 0$. Si hoc accadat, spectari debet valor ipsius q , qui si non fuerit $= 0$, valor ipsius y neque maximus erit, neque minimus, quia posito $x = f + a$ fit $F + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r$

+ etc $\triangleright$ F et posito $x = f - a$ prodit $F - \frac{1}{2}a^3q + \frac{1}{24}a^4r - \text{etc.} < F$. Sin etiam fuerit $q = 0$, spectandus erit valor ipsius r , qui si fuerit positivus, casu $x = f$ valor functionis F erit minimus, et si valor ipsius r sit negativus, habebit y valorem maximum. Si etiam $r = 0$, in iudicando ulterius est progrediendum, atque eodem modo, quo ante concludendum. Atque hac ratione de

qualibet radice æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ investigabitur, utrum

pro ea functio y habeat valorem maximum an minimum, an neutrum, sicque omnia maxima et minima, quae functio y recipere potest, invenientur. Quodsi itaque

æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ duas radices habeat æquales, ita ut

factorem habeat quadratum $(x - f)^2$; posito $x = f$ simul

erit $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, non autem $\frac{d^3y}{dx^3}$. Proinde hoc casu

functio y posito $x = f$ neque valorem maximum habet,

neque minimum. Quando autem æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$,

tres radices habeat æquales, et proinde factorem agno-

scit cubicum $(x - f)^3$, posito $x = f$ erit $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$

$= 0$, non vero $\frac{d^4y}{dx^4}$. Functio igitur y posito $x = f$

habebit valorem maximum, si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est quantitas nega-

tiva et minimum, si $\frac{d^4y}{dx^4}$ quantitas positiva esse depre-

henditur. Proinde ex his concludere possumus genera-

liter regulam sequentem. Si æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ facto-

rem

rem habet $(x-f)^n$ existente n numero impari, functio y , si in ea ponitur $x = f$, valorem recipiet maximum vel minimum: si vero n sit numerus par, functio y a substituto f loco x neque maximum recipiet valorem, neque minimum.

§. 260.

Cæterum maximi et minimi valorum positivorum distinguendi sunt in hoc negotio a maximis et minimis valorum negativorum. Quae §. *praec.* explicata sunt, veritati sunt consentanea, si functio y a substituto F habeat valorem positivum $+F$. Explicata itaque de maximis vel minimis valorum positivorum sunt intelligenda. Si fuerit F quantitas negativa, et loco x ponatur $f+a$, functio y abit in

$$-F + \frac{1}{2}a^2p + \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r + \text{etc.}$$

atque $f-a$ loco x posito, prodibit

$$-F + \frac{1}{2}a^2p - \frac{1}{6}a^3q + \frac{1}{24}a^4r - \text{etc.}$$

Unde si p est quantitas positiva, functio y habet valorem negativum maximum; si vero p sit quantitas negativa, y habet valorem negativum minimum a substituto f loco x . Si cum Analystis quibusdam quantitates negativas consideremus, ut nihilo minores, et minores valores negativos ut majores illis, quæ proprie majores dici deberent, ut dicatur verbi gratia $-5 < -3$, quia minores negativi ad positivos valores propius accedunt, quam majores negativi: ut casum hujus §. casu præcedentis distinguamus, opus non est, quod cuius adtendenti facile patet. Solet autem valor negativus eam ob causam *nihilo minor* vocari, quia si valor positivus eidem absolute spectatus æqualis addatur, producitur nihilum; atque valore positivo a nihilo subtracto, valor negativus priori absolute spectatus æqualis invenitur. Qui usus loquendi licet in rigore veritati non sit consentaneus; tolerari tamen hic potest, quia sic omne negotium ad regulas quasdam generales revocatur, ut opus non sit, utrumque casum perpetuo distinguere.

§. 261.

Adplicemus hæc primo ad functiones ipsius x rationales et integras, quarum forma generalis est $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc.} = y$, atque ejus maxima et minima determinantur per radices hujus æquationis $nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$, quæ sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ Si istæ radices omnes fuerint inæquales, unaquæque pro x substituta efficit, ut y habeat valorem maximum vel minimum, et proinde functio y tot habet valores maximos

vel minimos, quot æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ habet radices rea-

les inæquales. Quando autem duæ vel plures radices inter se sunt æquales; generatim si numerus radicum æqualium sit par, nullum pro iis invenietur maximum vel minimum; unus vero valor vel maximus vel minimus pro functione y invenietur, si numerus radicum æqualium sit impar. Quænam vero radices maxima et quæ minima producant, etiam sine subsidio regulæ ante traditæ ita poterit definiri. Disponantur radices æquationis

$\frac{dy}{dx} = 0$ reales secundum ordinem quantitatis, $\alpha, \beta,$

$\gamma, \delta, \text{etc.}$, ita ut α sit radix maxima $\beta < \alpha, \gamma < \beta$, sicque porro, ubi de radicibus negativis id observandum est, quod §. *præc.* est monitum. Atque cum functio y posito $x = \infty$ fiat pariter infinita, neque valores ipsius x intra limites ∞ et α ullum producere possint five maximum five minimum; perspicuum est, valores functionis y , dum loco x successive valores ab ∞ usque ad α substituantur, continuo decrescere debere. Proinde valor $x = \alpha + \omega$ functioni y majorem inducit valorem, quam valor $x = \alpha$. Quia autem posito $x = \alpha$ valor ipsius y fiat vel maximus, vel minimus, necesse est, ut casu $x = \alpha$, hic valor sit minimus. Quando jam variabilis x ulterius diminuitur et v. g. ponitur $x = \alpha$ loco x ; valor fun-

ctionis y iterum crescit, donec sit $x = \beta$, quæ est se-
 cunda æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ radix functioni y valorem
 vel maximum inducens vel minimum, et proinde casu
 $x = \beta$ functio y valorem habet maximum, ita ut valor
 $x = \beta - \omega$ minorem efficiat functionem y , quam $x =$
 β , donec perveniatur ad $x = \gamma$, quæ iterum minimum
 generabit. Aequationis igitur $\frac{dy}{dx} = 0$ radix prima,
 tertia, quinta, etc, valorem ipsius y exhibent minimos;
 secunda vero quarta, sexta, etc, valores maximos.
 Simul intelligitur, in casu duarum radicum æqualium
 maximum et minimum coalescere et proinde neutrum
 locum habere. Quodsi itaque in functione $y = x^n +$
 $Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc.}$ maximus expo-
 nens sit numerus par; æquatio $\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2}$
 $+ (n-2)Bx^{n-3} \text{ etc.} = 0$ erit gradus imparis, quæ pro-
 inde vel unam, vel tres vel quinque et generatim nu-
 mero impares habet radices reales. Quarum si una sit
 realis, ea dabit minimum, si tres sint reales, maxima
 præbet minimum, media maximum, et minima iterum
 minimum. Si quinque radices reales sunt, functio y
 tria habet minima et duo maxima; ficque porro. Quan-
 do exponens n est numerus impar, æquatio $\frac{dy}{dx} = 0$ ad
 gradum parem pertinet, et proinde vel nullam habet ra-
 dicem realem, vel duas, vel quatuor; vel sex, vel gene-
 ratim numerum radicum realium parem. Primo casu
 functio y neque maximum habet, neque minimum: se-
 cundo casu, quo duæ adfunt radices et quidem inæqua-
 les earum major minimum, minor autem maximum in-
 dicabit: quatuor vero radicum prima et tertia minimum,
 secunda et quarta maximum producant, ficque porro, ut

quotcunque radices fuerint reales, maxima et minima se mutuo alternatim insequantur.

§. 262.

Eadem adplicari possunt ad functiones rationales fractas. Sit enim $y = \frac{P}{Q}$, existentibus P et Q fun-

ctionibus ipsius x , erit $\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$; et pro-

inde posito $\frac{dy}{dx} = 0$, radices æquationis $\frac{QdP - PdQ}{dx}$

$= 0$ indicabunt casus maximi vel minimi, de quibus, utrum maximum locum habeat, vel minimum, eodem modo ut ante judicandum est. Præterea etiam dantur functiones irrationales et transcendentes, quæ proprietatem functionum uniformium habent, quorum igitur maxima et minima eodem modo inveniri possunt concessis regulis differentiandi functiones transcendentes postea explicandis. Radices cubicæ et omnium imparium potestatum considerari possunt, ut functiones uniformes, cum nonnisi unicum valorem realem exhibeant. Radices autem quadratæ atque omnium potestatum parium etsi revera, quoties sunt reales, geminum valorem indicant, alterum affirmativum, alterum negativum, tamen unusquisque seorsim spectari potest, atque hoc sensu etiam maxima et minima investigari possunt. Sic si y fuerit functio quæcunque ipsius x , etsi ry geminum habet valorem, tamen uterque seorsim considerari poterit. Habebit enim $+ry$ maximum vel minimum valorem, si y talem habuerit, dummodo fuerit positivus, quia alioquin ry esset imaginarium. Vice versa autem $-ry$ fiet minimum vel maximum iisdem casibus, quibus $+ry$ fit maximum vel minimum. Potestas autem quæcunque $y^m:n$ iisdem casibus fiet maximum vel minimum, siquidem n fuerit numerus impar. Si vero n fuerit par, ii tantum casus

casus valent, quibus y induit valorem positivum hisque casibus ob duplicem valorem gemina prodibunt maxima vel minima.

§. 263.

Quia æquatio differentialis, quæ ex functione y^m nascitur, est $\frac{y^{m-1} dy}{dx} = 0$, cujus radices simul casus,

quibus functio y^n fit maximum vel minimum, indicant; ad hoc indagandum duplex habetur æquatio, altera y^{m-1}

$= 0$, altera $\frac{dy}{dx} = 0$, quarum illa abit in $y = 0$, at-

que tum solum maxima et minima exhibet, si $m-1$ fuerit numerus impar, five m numerus par, ob rationes §. 259. allegatas.

Quare cum n sit numerus impar, si m fuerit numerus par, si numeros pares per $2m$ et impares per $2n+1$ indicemus, functio $y^{(2m:2n+1)}$ evadet maxima vel minima, tribuendis ipsis x valoribus, quos

tam ex æquatione $y = 0$, quam $\frac{dy}{dx} = 0$ adipiscitur.

Sin autem m sit numerus impar, functio $y^{(2m+1):2n}$ tum solum fit maxima vel minima, cum loco x substituitur

valor ex hac æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$. Ac posteriori qui-

dem casu $y^{(2m+1):2n}$ maxima et minima tantum inve-

nientur, si y ab inventis ex æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ valo-

ribus positivos recipiat valores. Sic $x^{\frac{2}{3}}$ fit minimum ponendo $x = 0$, quia hoc casu x^2 fit minimum. Nisi

autem formula $x^{\frac{2}{3}}$ ad formam x^2 fuisset reducta, methodus ante explicata idem non indicaret, quia casu

$x = 0$ omnes termini seriei $y + \frac{\omega dy}{1 \cdot dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2}$

$+ \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \text{etc.}$, fiunt infiniti. Facto enim

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \text{ erit } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}, \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}, \frac{d^3 y}{dx^3} =$$

$$+ \frac{2.4}{27x^{\frac{7}{3}}}; \text{ etc.} \quad \text{Hoc ita casu series } y = \frac{\omega dy}{1. dx} = \frac{\omega^2 ddy}{1.2. dx^2}$$

$\frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \text{etc.}$ fit divergens, quam assumimus fieri

convergentem, si statuatur ω quantitas valde parva. His itaque casibus ea reductione, qua usi sumus, opus erit, qua expressio proposita ad aliam formam revocatur, quæ huic incommodo non sit subjecta. Hoc autem tantum paucissimis casibus evenit, qui in formula $y^{2m:(2n+1)}$ continentur, vel ad eam facile reducuntur. Sic si quærantur maxima et minima formulæ $zy^{2m:(2n+1)}$ existente z functione ipsius x , investigabitur hæc forma $y^{2m}z^{2n+1}$, quæ iisdem casibus, quibus ipsa proposita, fit maximum vel minimum.

§. 264.

Si y fuerit functio multiformis ipsius x , ita ut pro unoquoque valore ipsius x ea plures obtineat valores reales; tum variato x , plures illi ipsius y valores ita inter se connectentur, ut plures series valorum successivorum repræsentent. Si enim y tanquam applicatam lineæ curvæ consideremus, x existente abscissa, quot y habuerit valores reales diversos, tot diversi ejusdem curvæ rami eidem abscissæ x respondebunt, et proinde illi ipsius y valores successivi, qui eundem ramum constituunt, cohærere censendi sunt; valores autem ad diversos ramos relati erunt inter se disjuncti. Tot igitur series valorum cohærentium ipsius y habentur, quot diversos valores reales functio y pro quovis ipsius x valore receperit; atque in qualibet seriei valores ipsius y , dum x crescens

scens assumitur, vel crescent, vel decrescent, vel postquam creverint iterum decrescent, vel vice versa. Unde perspicuum est, in unaquaque valorum cohærentium seriei æque dari maxima vel minima, atque in functionibus uniformibus. Pro his vero maximis et minimis determinandis eadem methodus valet, quam pro functionibus uniformibus demonstravimus. Cum enim, si variabilis x incremento α augeatur, functio y

perpetuo hanc recipiat formam $y = \frac{\alpha dy}{1. dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{1.2. dx^2}$

$+ \frac{\alpha^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \text{etc}$; necesse est, ut casu maximi vel

minimi terminus $\frac{\alpha dy}{dx}$, et proinde $\frac{dy}{dx}$ evadat $= 0$. Ra-

dices itaque hujus æquationis $\frac{dy}{dx} = 0$ eos ipsius x va-

lores indicabunt, quibus in singulis valorum functionis y cohærentium seriebus maxima vel minima respondent. Neque vero ambiguum erit, in quam valorum cohærentium serie detur maximum vel minimum. Cum

enim in æquatione $\frac{dy}{dx} = 0$ ambæ infinitæ variabiles x

et y ; valores ipsius x definiri nequeunt, nisi ope æquationis, qua relatio functionis y ad x exprimitur, variabilis y eliminetur. Antequam autem hoc fit, pervenitur ad æquationem, qua valor ipsius y per functionem uniformem ipsius x exprimitur. Ideo inventis valoribus ipsius x cuique respondens valor ipsius y reperietur, qui erit maximus vel minimus in serie valorum successivorum cohærentium, ad quam pertinet. Judicium autem, utrum isti valores sint maximi an minimi, instituetur eodem modo, quem ante explicavimus.

Præter maxima et minima, de quibus huc usque sermo fuit, in functionibus multiformibus alia species maximorum et minimorum est notatu digna, quorum natura ex functionibus biformibus optime explicari potest. Sit y functio quaecunque biformis ipsius x , ita ut pro unoquoque ipsius x valore y habeat binos valores vel reales vel impossibiles, atque ponamus hos valores fieri impossibiles si ponatur $x > f$, reales casu $x < f$, atque æquales $= g$, si $x = f$. Cum ergo casu $x > f$ functio y nullum habeat valorem realem, si eveniat, ut posito $x < f$, ambo ipsius y valores fiant vel majores quam g , vel minores quam g ; priori casu valor $y = g$ erit minimus posteriori maximus, quia illo casu minor est, quam ambo præcedentes, posteriori vero major. Possunt hæc *maxima et minima secundæ speciei* vocari, cum talia non sint ratione valorum autecedentium et consequentium in seriei cohærentium, sed ratione binorum valorum disjunctorum vel antecedentium vel sequentium tantum. Evenit hoc, si proposita fuerit æquatio hujus formæ $y = p \pm (f-x) \sqrt{(f-x)q}$, existentibus p et q functionibus ipsius x per $f-x$ non divisibilibus; obtineatque q valorem positivum, si ponatur $x = f$ vel aliquanto majus minusve. Fiat $p = q$ posito $x = f$, ac manifestum est, quod casu $x = f$ ambo ipsius y valores in unum $y = g$ coalescant: posito autem $x > f$ ambo valores fiunt impossibiles. Si igitur ponatur x aliquanto minus quam

f , v. g. $x = f - \omega$, functio p abit in $g - \frac{\omega dp}{dx} +$

$\frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} -$ etc, q vero abit in $q - \frac{\omega dy}{dx} +$

$\frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} -$ etc, unde hoc casu erit $y = g - \frac{\omega dp}{dx} +$

+

$$+ \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \text{etc} \pm \omega r \omega (q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx} -$$

etc.). Quia hic utraque series, in quas p et q abeunt, fiunt convergentes, eodem modo ut §. 259. concludendo, perspicitur, utrumque hunc valorem esse $< g$, si $\frac{dp}{dx}$ sit positiva, sed utrumque valorem $> g$, si $\frac{dp}{dx}$ sit negativa quantitas. Unde valor duplex ipsius $y = g$ illo casu erit *maximus* hoc vero *minimus secundæ speciei*. Idem locum habet in æquationibus hujus formæ $y = p$

$\pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}}$, si $2n+1 > 2m$. Quodsi his casibus invenitur $\frac{dp}{dx} = 0$, iudicium ex sequentibus seriei $g -$

$\frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \text{etc}$, terminis erit desumendum modo ei simili, quo id de maximis et minimis *primæ speciei* §. 259. ostensum fuit.



SECTIO XVIII.

DE

VSV CALCULI DIFFERENTIALIS IN AEQVATIONIBVS RESOLVENDIS.

§. 266.

Denotante y functionem quamcunque ipsius x , si ponatur $y = 0$, in hac forma omnes omnino æquationes finitæ, siue algebraicæ sint, siue transcendentes comprehenduntur. Aequatio, autem $y = 0$ resolvi dici-

dicitur, si is ipsius x valor definiatur, qui in functione y substitutus eam reddit nihilo æqualem. Plerumque plures ejusmodi valores pro x dari, æquationis $y = 0$ radices vocatas, jam cognitum est. Quodsi igitur f , g , h , etc, sint radices æquationis $y = 0$, functio y ita erit comparata, ut si in ea loco x substituatur f , vel g , vel h , etc, fiat $y = 0$. Quoniam igitur functio y evanescit, si in ea loco x ponatur f , seu $x + (f - x)$, existente f radice æquationis $y = 0$, erit $0 = y + \frac{(f-x)dy}{1 \cdot dx}$

$$+ \frac{(f-x)^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc,} \quad (\S. 243.)$$

ex qua æquatione valor radices f ita definitur, ut quidquid pro x fuerit positum, indeque valores quantitatum

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{2 \cdot dx^2}, \text{etc, substituti, semper resultet æ-$$

quatio verum valorem ipsius f exhibens. Sit exempli

$$\text{gratia } y = x^3 - 2xx + 3x - 4; \text{ erit } \frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3;$$

$$\frac{ddy}{2 \cdot dx^2} = 3x - 2, \text{ et } \frac{d^3 y}{6 dx^3} = 1. \text{ Quibus valo-}$$

ribus substitutis habetur $0 = x^3 - 2xx + 3x - 4 + (f-x)(3xx - 4x + 3) + (f-x)^2(3x - 2) + (f-x)^3$, seu multiplicationibus actu institutis $f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0$. Oritur nimirum æquatio ipsi propositæ similis, quæque ideo easdem continet radices.

§. 267.

Licet hoc modo ad novam æquationem non perveniat, ex qua valor ipsius f facilius definiri queat; potest tamen exinde deduci methodus, radicem æquationis realem irrationalem quantumvis adcuratam exhibendi. Si enim pro x assumptus fuerit valor jam proxime ad radicem æquationis accedens ex §. 115. determinandus, ita ut $f - x$ sit quantitas valde parva; termini æ-

quatio-

$$\text{quationis } 0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2 \cdot dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3 y}{6 \cdot dx^3} + \text{etc; valde convergent, et proinde}$$

non multum a veritate aberrabitur, si præter binos terminos initiales reliqui rejiciantur. Erit itaque, si pro x jam valor cuidam æquationis $y = 0$ radici prope æqua-

$$\text{lis fuerit assumtus, quamproxime } 0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx},$$

$$\text{five } f = x - \frac{ydx}{dy}. \text{ Ex qua formula etsi non verus, ta-}$$

men admodum propinquus radicis f valor reperietur, qui deinceps, denuo loco x substitutus, multo propiorrem valorem pro f suppeditabit; sicque continuo vero propinquior ipsius f valor reperietur. Cítiores autem approximationes ex ipsa serie generali deduci possunt sic ratiocinando.

§. 268.

Proposita æquatione $y = 0$, existente y functione quacunque ipsius x , quæstio huc redit, ut valor ipsius x definiatur, qui loco x substitutus functionem y reddet nihilo æqualem. Cum autem y sit functio ipsius x , vicissim erit x functio ipsius y , atque sic quæstio eo redit, ut quærendus sit valor ipsius functionis x , quem induit, si variabilis y evanescit. Sit igitur f ille ipsius x valor, qui erit radix æquationis $y = 0$, ex §. 256.

$$\text{erit } f = x - \frac{ydx}{1 \cdot dy} + \frac{y^2 ddx}{1 \cdot 2 \cdot dy^2} - \frac{y^3 d^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dy^3} + \frac{y^4 d^4 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dy^4} - \text{etc. ubi est } dy \text{ constans. Si igitur}$$

$$\text{ponatur } \frac{dx}{dy} = p; \frac{dp}{dy} = q; \frac{dq}{dy} = r; \frac{dr}{dy} = s, \text{ etc;}$$

erit

erit $f = x - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{etc.}$ Series haec fiet convergens, si pro x statuatur valor, jam proxime ad valorem ejus radices, quae quaeritur, accedens. Hoc enim modo valor ipsius y fiet admodum parvus, atque seriei termini valde decrescent, ita ut paucis terminis sumendis jam satis justus valor pro f inveniatur. Atque hic valor si deinceps loco x substituat, quantitas y multo minor evadet, ac series multo magis converget, ut eo modo radix quaesita errore quantumvis parvo exacta inveniatur.

§. 269.

Si aequatio $y = 0$, habeat quasdam radices aequales, ita ut functio y agnoscat factorem $(x-f)^n$ existente $y = (x-f)^n X$ ubi est X functio variabilis x ; functio

$\frac{dy}{dx}$ habet factorem $(x-f)^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ factorem $(x-f)^{n-2}$,

$\frac{d^3y}{dx^3}$ factorem $(x-f)^{n-3}$, sicque porro. Hinc sequen-

tia fluunt consectoria. Si duae propositae aequationis

radices aequales sunt, erit $\frac{dy}{dx} = 0$; atque tum duae

aequationes $y = 0$, et $\frac{dy}{dx} = 0$ conjunctae per metho-

dum eliminationis praebent valorem ipsius x , cui binae radices sunt aequales. Vnde vicissim concluditur, si am-

bae aequationes $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ communem habent

radicem, ea erit duplex aequationis $y = 0$ propositae

radix. Si igitur proposita sit aequatio algebraica qua-

rumcunque dimensionum $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$, quae duas habeat radices aequales,

erit quoque $nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \text{etc.} = 0$. Prioris nimirum aequationis radix duplex simul erit radix posterioris aequationis

quationis. A priori per n multiplicata si posterior per x multiplicata subtrahatur, oritur $Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \text{etc} = 0$. Priori nunc per a multiplicatae addatur hæc per b multiplicata, eritque $ax^n + (a+b) + Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-1} + (a+3b)Cx^{n-3} + \text{etc} = 0$. Ex qua æquatione cum ipsa proposita conjuncta deducuntur radices æquales, si quas habeat proposita. Quia quantitates a et b pro lubitu assumi possunt, coefficientes a , $a+b$, $a+2b$, etc, progressionem quamcunque arithmetica repræsentant. Quodsi itaque æquatio quæcunque habeat duas radices æquales, illæ inveniuntur, si singuli æquationis propositæ termini multiplicentur per terminos cujusvis progressionis arithmeticæ respective. Nova enim æquatio hoc modo inventa eam radicem, quæ in proposita bis inest, pariter continebit.

§. 270.

Si æquatio $y = 0$ tres habeat radices æquales, non solum erit $\frac{dy}{dx} = 0$, sed et $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, si quidem pro x statuatur ejus radicis valor, quæ in æquatione $y = 0$ ter inest. Hinc porro concluduntur sequentia corollaria. Si æquatio $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc} = 0$ tres contineat radices æquales f, f, f , si ejus termini per terminos progressionis arithmeticæ cujusvis multiplicentur: æquatio resultans binas habebit radices æquales f et f ; et proinde eadem denuo per progressionem arithmetica quamcunque multiplicari poterit, ut prodeat æquatio, eandem radicem f semel complectens. Obtinebuntur itaque tres æquationes communem radicem f habentes, ex quarum combinatione hæc ipsa radix facile elicitur. Si enim ejusmodi progressionem arithmetica eligantur, quarum vel primus vel ultimus fit $= 0$; prodibit æquatio uno gradu inferior, sicque eliminatio eo facilius evadet. Similibus opus est ratiociniis, si æquatio quatuor vel plures contineat radices æquales.

§. 271.

Supra §.94-96. indicata jam sunt criteria quaedam, ex quibus dijudicari potest, utrum æquatio proposita radices habeat impossibiles, an secus. Huic investigationi consideratio maximorum et minimorum valde intervit. Proposita sit æquatio ordinis cujuscunque $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc} = 0$, ejusque radices sint p, q, r, s, t , etc, quas primo omnes reales et inaequales, atque secundum ordinem quantitatis dispositas esse assumamus, ut sit p minima, q ea quæ ratione magnitudinis sequitur, sicque porro (§.257.). Casus quarundam radicum æqualium huc quoque revocatur, ponendo earundem differentiam $= 0$. Quia expressio $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc}$, tum solum fit nihilo æqualis, si loco x aliquis valorum p, q, r, s , etc, substituitur, reliquis vero casibus omnibus non evanescit; ponamus $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc} = z$, erit z functio ipsius x . Hoc facto pro x successive substituantur valores determinati reales incipiendo a minimo $-\infty$ (§.257.); atque perspicuum est, pro x prodituros esse valores vel nihilo majores vel minores, neque prius futuram esse $z = 0$, quam ponatur $x = p$. Augeantur valores ipsius x ultra p , atque valores ipsius z vel positivi, vel negativi fient, donec perveniatur ad valorem $x = q$, quo casu iterum fit $z = 0$. Ideo necesse est, ut valoribus ipsius z ab 0 iterum ad 0 accedentibus interea z recipiat valorem vel maximum vel minimum; maximum, si valores ipsius z , dum x intra limites p et q versabatur, fuerint positivi; minimum, si fuerint negativi. Simili modo, dum x ultra q ad r usque crescit, functio z transit per maximum vel minimum; per maximum, si ante fuerit minimum, et contra, quia maxima et minima se mutuo alternatim excipiunt. Cum itaque inter binas quasvis radices ipsius x existat casus, quo functio z fit maximum vel minimum; numerus maximorum et minimorum functionis z uni-

tate minor erit numero radicum realium, atque maximi et minimi valores ita alternatim se excipient, ut maximi ipsius z valores sint positivi, minimi negativi. Vicissim itaque, si functio z habeat maximum vel saltem positivum valorem casu $x=f$, et minimum vel saltem negativum casu $x=g$, dabitur radix aequationis intra limites f et g contenta, quia functione z e statu positivo in negativum abeunte, necesse est, ut per 0 transeat, dum per ∞ transire non potuit. Ex propositis simul intelligitur, licet aequationis propositae radices non omnes sint reales, tamen semper inter binas quasque dari maximum vel minimum. Conversum itaque generatim concludi non potest, quod inter bina quaevis maxima vel minima radix realis contineatur; licet ista conclusio valeat adjecta conditione, si alter valor ipsius z fuerit affirmativus, alter negativus.

§. 272.

Valores ipsius x , a quibus substitutis functio $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc}$ fit maximum vel minimum, sunt radices aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ nempe $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} - \text{etc} = 0$. Si itaque omnes radices aequationis $z = 0$, quarum numerus est n , reales sunt;

omnes quoque aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ radices reales erunt.

Habet enim functio z tot maxima vel minima, quot numerus $n-1$ continet unitates. Ergo necesse est, ut aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ agnoscat $n-1$ radices reales; unde simul concluditur functionem z plura maxima vel minima, quam $n-1$, habere non posse. Atque exinde regulam concludimus sequentem. Si omnes aequationis

$z = 0$ radices reales sunt; æquationis quoque $\frac{dz}{dx} = 0$ radices omnes reales erunt. Ergo si non omnes æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ radices reales sunt; etiam æquationis $z = 0$ radices non sunt omnes reales. Praeterea, quia inter binas quasvis æquationis $z = 0$ radices reales datur unus casus, quo functio fit maximum vel minimum, sequitur, æquationem $\frac{dz}{dx} = 0$ necessario unam habere radicem realem, si æquatio $z = 0$ duas habet radices reales. Atque generatim, si æquatio $z = 0$ habet m radices reales; æquatio $\frac{dz}{dx} = 0$ ad minimum $m - 1$ radices habet reales. Unde porro concluditur: Si æquatio $\frac{dz}{dx} = 0$ pauciores habet radices reales, quam $m - 1$; etiam æquatio $z = 0$ habebit pauciores quam m radices reales.

§. 273.

Ex numero radicum realium æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ numerus radicum æquationis $z = 0$ realium certo cognosci nequit, nisi sub conditione adjecta, si maxima et minima alternatim sunt positiva et negativa. Sic a, b, c, d, e , etc. sunt radices æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ reales, quarum a est maxima et reliquæ ordine magnitudinis se invicem sequuntur; his valoribus loco x substitutis, functio z obtinebit valores maximos vel minimos alternatim. Functio autem z fiet ∞ , si ponatur $x = 0$; proinde ejus valores continuo decrescere debent, valoribus ipsius x ab ∞ usque ad a decreiscentibus, unde casu $x = a$ fiet

$=a$ fiet z minimum. Si itaque casu $x=a$ habeat z valorem negativum; necesse est, ut ante per o transierit, unde aequatio $z=0$ habet aliquam radicem realem quanto a maiorem. Quodsi autem casu $x=a$ functio z habeat valorem positivum; aequatio $z=0$ nullam radicem quanto a maiorem habere potest. Ponamus

casu		fieri
x	$= a$	$z = A$
x	$= b$	$z = B$
x	$= c$	$z = C$
x	$= d$	$z = D$
x	$= e$	$z = E$
etc.		etc.

ac patet, si A sit positivum, æquationem $z=0$ nullam habere radicem realem quanto a maiorem, sin vero A sit negativum, æquationem $z=0$ unam quoque habere radicem realem ipso a maiorem. Quoniam A fuit minimum, erit B maximum, et quidem si A fuit positivum, etiam B positivum erit, quare inter limites a et b nulla radix æquationis $z=0$ dari potest. Atque si hæc æquatio nullam habeat radicem realem quanto a maiorem, ea quoque nullam habere potest radicem quanto b maiorem. Quanto A vero existente negativo, quo casu unam æquatio $z=0$ habet radicem realem $x > a$, si B sit positivum; dabitur radix realis $x > b$: sin vero B sit negativum, nulla radix realis intra limites a et b continebitur. Cum jam B fuerit maximum erit C minimum, et proinde si B fuerit negativum, erit quoque C negativum (§. 256.) atque hoc casu intra limites b et c nulla contenta est radix realis: casu autem quo B est positivum, intra b et c radix realis cadit pro C negativo, ac nulla existente C positivo.

§. 274.

Hæc ratiocinia facili continuantur negotio. Aequatio nimirum $z=0$ unam habet radicem realem, quæ continetur

intra limites			fi habet				
			signum				signum
∞	et	a	A . . .	—			
a	et	b	A . . .	—	et	B . . .	+
b	et	c	B . . .	+	et	C . . .	—
c	et	d	C . . .	—	et	D . . .	+
d	et	e	D . . .	+	et	E . . .	—
etc.					etc.		

Atque ex hisce vicissim concluditur, æquationem $z = 0$ radicem habere nullam realem contentam

intra limites			fi non habeat				
			signum				signum
∞	et	a	A . . .	—			
a	et	b	A . . .	—	et	B . . .	+
b	et	c	B . . .	+	et	C . . .	—
c	et	d	C . . .	—	et	D . . .	+
d	et	e	D . . .	+	et	E . . .	—
etc.					etc.		

Harum itaque regularum ope ex cognitis æquationis

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ radicibus realibus non solum numerus radi-}$$

cum realium æquationis $z = 0$ colligitur, sed etiam limites innotescunt, intra quos singulæ istæ radices continentur. Evanescente aliquo valorum A, B, C, D, E, etc, eo loco æquatio $z = 0$ duas habet radices æquales. Casu $A = 0$ duæ adfunt radices $= a$, casu $B = 0$ duæ

sunt $= b$, etc. Si numerus radicum æquationis $\frac{dz}{dx}$

$= 0$ est par, neque maximum neque minimum indicatur, unde radices æquales numero pari pro præfenti instituto negligi possunt. Sin vero earum radicum æqualium numerus impar fuerit, omnes præter unam rejici possunt, nisi forte hoc quoque casu functio $z = 0$ evanescat. Hoc enim si contingat, æquatio $z = 0$ quoque habebit radices æquales et quidem numero $n + 1$,

si numerus radicum æqualium æquationis $\frac{dz}{dx} = 0$ sit n .

§. 275.

Ex omnibus hæce conjunctione suntis id concludi potest, si æquatio differentialis $\frac{dz}{dx} = 0$ habet radices impossibiles, æquatio $z = 0$ ad minimum totidem radices habet impossibiles. Aequatio proposita $z = 0$ multiplicetur per potestatem x^m , denotante m numerum integrum positivum; atque hæc nova, quæ producitur, æquatio omnes radices habere debet reales, si propositæ $z = 0$ radices omnes reales sunt. Ergo quoque productæ æquationis differentialis, postquam per x^{m-1} fuit divisa, radices omnes reales erunt, id est casu radicum omnium æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$ realium etiam omnes æquationis $(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \text{etc.} = 0$ radices sunt reales. Similem ob rationem si hæc multiplicetur per x^n et denuo differentietur, æquatio $(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-1)Bx^{n-2} - \text{etc.} = 0$ pariter omnes radices habet reales, atque sic concludendo ulterius progredi licet. Quodsi hujusmodi æquatio radices agnoscat impossibiles, etiam proposita æquatio $z = 0$ pariter atque ad minimum totidem radices habebit impossibiles. Aequationis $z = 0$ radices omnes si reales sint, etiam ejus differentiales omnium ordinum

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

$$n.(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-2)(n-3)$$

$$Bx^{n-4} - (n-3)(n-4)Cx^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

$$n.(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4} + n.(n-2).$$

$$(n-3)(n-4)Bx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

radices suas omnes reales habent, quæ æquationes ad sequentes formas revocantur.

$$x^{n-1} - \frac{n-1}{n} Ax^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{n.n-1} Bx^{n-3} - \frac{n-1.n-2.n-3}{n.n-1.n-2} Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{n-2}{n} Ax^{n-3} + \frac{n-2.n-3}{n.n-1} Bx^{n-4} - \frac{n-2.n-3.n-4}{n.n-1.n-2} Cx^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{n-3}{n} Ax^{n-4} + \frac{n-3.n-4}{n.n-1} Bx^{n-5} - \frac{n-3.n-4.n-5}{n.n-1.n-2} Cx^{n-6} + \text{etc.} = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{n-4}{n} Ax^{n-5} + \frac{n-4.n-5}{n.n-1} Bx^{n-6} - \frac{n-4.n-5.n-6}{n.n-1.n-2} Cx^{n-7} + \text{etc.} = 0$$

Atque hoc modo iudicium ad æquationem dati gradus inferioris, quam est ipsa proposita, reduci potest. Ita si m fuerint numerus quicunque minor, quam n , atque proposita æquatio omnes radices habeat reales; hujus quoque æquationis gradus m

$$x^m - \frac{m}{n} Ax^{m-1} + \frac{m.m-1}{n.n-1} Bx^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{n.n-1.n-2} Cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

radices omnes reales erunt. Posito itaque $m=2$, hujus

$$\text{æquationis } x^2 - \frac{2}{n} Ax + \frac{2.1}{n.n-1} B = 0 \text{ radices esse de-}$$

bent reales, si æquationis $x = 0$ omnes radices reales sunt. Sed ista æquatio quadratica radices reales habe-

re nequit, nisi sit $\frac{AA}{nn} > \frac{2.1}{n.n-1} B$. Ergo si fuerit

$AA < \frac{2n}{n-1} B$, proposita æquatio ad minimum duas radi-

ces habet impossibiles, licet casu $AA > \frac{2n}{n-1} B$ certo

concludi nequeat, omnes æquationis $x = 0$ radices reales esse.

§. 276.

Posito $x = \frac{1}{y}$, aequatio $z = 0$ in sequentem $1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - Ey^5 + \text{etc.} = 0$ transformatur, cujus radices sunt prioris reciprocae, et proinde omnes reales sunt, si radices aequationis $z = 0$ omnes reales sunt. Hoc itaque casu etiam reciprocae differentialis $-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \text{etc.} = 0$ radices omnes possibiles sunt. Restituito itaque valore x pro $\frac{1}{y}$ etiam aequatio $Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 5Dx^{n-5} - \text{etc.} = 0$ radices omnes possibiles adgnoscat. Unde patet casu $n = 3$ necesse esse, ut sit $BB > 3AC$. Differentiatione continuata prodibunt aequationes

$$Ax^{n-2} - \frac{n \cdot n-2}{n-1} Bx^{n-3} + \frac{3 \cdot n-2 \cdot n-3}{n-1 \cdot n-2} Cx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{n \cdot n-3}{n-1} Bx^{n-4} + \frac{3 \cdot n-3 \cdot n-4}{n-1 \cdot n-2} Cx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2 \cdot n-4}{n-1} Bx^{n-5} - \frac{3 \cdot n-4 \cdot n-5}{n-1 \cdot n-2} Cx^{n-6} - \text{etc.} = 0$$

etc.

Generatim itaque, si m sit numerus minor quam n , erit

$$Ax^m - \frac{2m}{n-1} Bx^{m-1} + \frac{3m \cdot m-1}{n-1 \cdot n-2} Cx^{m-2} - \text{etc.} = 0. \text{ Atque}$$

$$\text{casu } m = 2 \text{ fit } Ax^2 - \frac{4}{n-1} Bx + \frac{6}{n-1 \cdot n-2} C = 0, \text{ cujus}$$

$$\text{radices ut sint reales, debet esse } \frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{n-1 \cdot n-2}.$$

Ergo si fuerit $BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, iterum proposita aequatio $z = 0$ ad minimum duas radices habet impossibiles.

les. Idem criterium ad sequentes coefficientes traduci potest. Aequatio differentialis

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5E^4 + \text{etc.} = 0$$

denuo differentiata dat

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \text{etc.} = 0$$

ex qua restituta $\frac{1}{x}$ loco y habetur

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

ex cujus ulteriori differentiatione deducuntur aequationes

$$Bx^{n-3} - \frac{3 \cdot n - 3}{n-2} Cx^{n-4} + \frac{6 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{n-2 \cdot n-3} Dx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

et generaliter

$$Bx^m - \frac{3m}{n-2} Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{n-2 \cdot n-3} Dx^{m-2} - \text{etc.} = 0$$

ex qua si $m=2$ fit

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2} Cx + \frac{6 \cdot 2}{n-1 \cdot n-2} D = 0.$$

Unde si fuerit $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$ iterum concluditur,

æquationem $z = 0$ ad minimum duas habere radices impossibiles. Hisce ratiociniis per omnes coefficientes continuatis invenitur, quod casu omnium radicum realium æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4}$$

$$- Ex^{n-5} + \text{etc.} = 0, \text{ esse debeat } AA > \frac{2n}{1(n-1)} AC;$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC; CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD; DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}$$

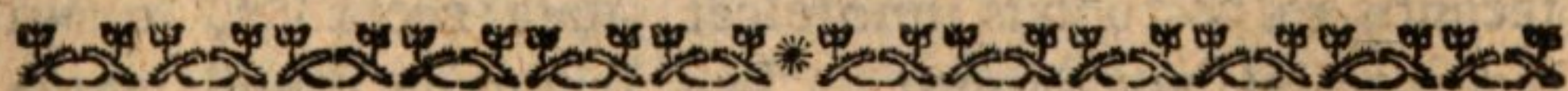
$$CE; EE > \frac{6(n-4)}{4(n-4)} DF; \text{ etc. } \text{Quarum conditionum}$$

si una desit, æquatio ad minimum duas habet radices impossibiles. Atque si ista criteria a se invicem non pendent.

dent, quodlibet eorum duas radices impossibiles a reliquis diversas indicat. Quando autem istae coefficientium conditiones omnes adsunt, concludere non licet, omnes æquationis propositæ radices reales esse. Fieri enim utique potest, ut radices impossibiles adsint. Si criteria radicum impossibilium adsint, eaque a se invicem pendeant, ut duo contigua ista $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$

$$\text{et } BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AB, \text{ exinde non necessario quatuor}$$

radices impossibiles diverse concludi possunt, quia utrumque criterium fortasse easdem binas indicat. Quodsi vero ista criteria non sint contigua, et proinde a se invicem non pendeant, ut $AA < \frac{2n}{1(n-1)} B$ et $CC < \frac{4(n-2)}{3(n-n)} BE$, existente $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$; quatuor radices impossibiles indicantur.



SECTIO XIX.

DE METHODO TANGENTIVM DIRECTA.

§. 277.

Ex data æquatione pro curva algebraica quacunque elicitur æquatio differentialis formae $\frac{dy}{dx}$

$= \frac{P}{Q}$ secundum ea, quae exposita sunt §. 242. Atque

que

que ex ipsa hac æquatione differentiali multæ deduci possunt curvæ proprietates, quæ ex æquatione integrali vel plane non, vel saltem pluribus invenirentur ambagibus. Proposita sit curva AM algebraica quaecunque ad axem Ap relata, cujus æquatio data est inter coordinatas orthogonales x et y . Datum est punctum M in curva, per quod ducenda est recta curvam tangens. Atque hujus problematis solutio via analytica sic investiganda erit.

- r.273.** Tangens quæsitæ sit TMt secans axem curvæ in puncto T . Præterea ex puncto M ad axem ducatur applicata normalis MP et cognita PT , quæ *Subtangens* vocatur, positio tangentis TMt determinata erit. Haec vero subtangens invenitur sequentem in modum. Abscissa $AP = x$ crescat usque ad p , erit $Pp = \Delta x$. Per punctum p ducatur applicata normalis pm , quæ erit $= y + \Delta y$, si $PM = y$. Si itaque per punctum M ducatur MR axi parallela erit $Rm = \Delta y$. Per puncta M et m ducatur recta SMr secans curvam in punctis M et m , et axi occurrens in puncto S , atque positio hujus rectæ secantis respectu axis innotescet, data recta PS , quam *Subsecantem* vocabimus. Jam triangula MmR atque SMP similia sunt, ob angulos apud P et R rectos, et angulos apud M et S æquales. (§. 99. *Geom. Elem.*). Ideo est $Rm : RM = PM : PS$, id est $\Delta y : y = \Delta x : PS$, atque $PS = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Manentibus nunc AP et PM id est x et y constantibus varientur Δx et Δy , ita quidem, ut Δx decrescat; atque cum ea simul decrescet Δy , punctum m ad punctum M adpropinquat, secans SMr revolvitur circa punctum M fixum, punctum S adpropinquat ad punctum T , angulus SMT decrescit. Quando tandem punctum p coincidit cum P , id est, quando fit $\Delta x = 0 = dx$, Δy abit in dy , punctum m coincidit cum puncto M , punctum S cum puncto T , angulus SMT evanescit,

cit, recta SMr habet positionem TMt , atque PS eadem est cum PT ; quare ex aequatione $PS = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$

fit $PT = y \frac{dx}{dy}$. Cum itaque ultima ratio $\frac{dx}{dy}$ innotescat ex aequatione pro curva proposita; solutio problematis generalis inventa est.

§. 278.

Adplicabimus hoc ad sectiones conicas, et cum his conjugamus explicationem reliquarum hujus generis curvarum proprietatum, ab inventionem tangentis pendentium, ob insignem earum curvarum in universa Analyfi usum, completam de tangentibus curvarum theoriam usque ad Geometriam Sublimiorem reservaturi. Sit ita- F.274.

que curva AM ellipsis, cujus axis transversus est AB , F et G foci, centrum C , a quo computentur abscissæ $CP = x$, PM coordinata orthogonalis $= y$, erit æquatio pro curva $aayy = aabb - bbxx$ (§. 159.) ex qua differen-

tiando elicitur $2aay \frac{dy}{dx} = 2bbx$, et $\frac{dy}{dx} = \frac{bbx}{aay}$, vel

$\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bbx}$. Quia jam subtangens $PT = y \frac{dx}{dy}$; erit

pro ellipsi $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{(aa - xx)bb}{bbx} = \frac{aa - xx}{x}$, ob

$aayy = aaaa - bbxx$. Est itaque $CT = CP + PT = x + \frac{aa - xx}{x} = \frac{xx + aa - xx}{x} = \frac{aa}{x}$, id est $CP : CA$

$= CA : CT$. Habemus præterea $FT = CT - CF = \frac{aa}{x} - r(aa - bb) = \frac{aa - xr(aa - bb)}{x}$, atque FM

$= a - \frac{xr(aa - bb)}{a}$ (§. 162.) $= \frac{aa - xr(aa - bb)}{a}$.

Proinde

Proinde $FT : FM = a : x$. Simili modo est $GT = CG$

$$+ CT = \frac{aa}{x} + \sqrt{(aa - bb)} = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$$

$$\text{et } GM = a + \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} \quad (\S. 162.) \quad \underline{\underline{=}}$$

$$\frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}. \quad \text{Ideo } GT : GM = a : x, \quad \text{et}$$

proinde $FT : FM = GT : GM$. At est $FT : FM = \sin FMT : \sin CTM$, et $GT : GM = (\sin GMF \text{ vel } \sin GMt) : \sin CTM$ (§. 9. *Calc. Ext.*), ergo $\sin FMT : \sin CTM = \sin GMt : \sin CTM$, atque $\sin FMT = \sin GMt$, ex quo patet, angulos FMT et GMt aequales esse. *Ambae itaque rectae ex focus ad punctum ellipsis quodcunque ductae aequali ad tangentem curvae in illo puncto inclinatae sunt angulo.*

§. 279.

Ex formula $CT = \frac{aa}{x}$ porro concluditur AT

$$= CT - AC = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x} = \frac{a}{x} (a - x),$$

$$BT = CT + CB = \frac{aa}{x} + a = \frac{aa + ax}{x} = \frac{a}{x} (a +$$

$$x). \quad \text{Unde deducitur analogia } \frac{a}{x} (a + x) : \frac{a}{x} (a - x)$$

$= a + x : a - x$, id est $BT : AT = BP : AP$. Recta igitur BT in punctis A et P sic divisa est, ut sit tota, BT ad unam partium extremarum AT , ut altera pars extrema BP ad mediam AP , quæ *sectio harmonica* vocari solet. Quodsi jam ex vertice A ad axem erigatur perpendicularis AV occurrens tangenti in V ; eadem ratio $a + x : a - x$ æqualis deprehenditur rationi $bb : AV^2$.

$$\text{Nam anguli } CTM \text{ tangens est } = \frac{PM}{PT} = \frac{ybbx}{aayy} = \frac{bbx}{aay},$$

atque

atque in triangulo AVT est $AV = AT \propto \text{tang. CTM}$

$$(\S. 42.) = \frac{a(a-x)}{x} \propto \frac{bbx}{ayy} = \frac{a(a-x)bbx}{xaay} =$$

$$\frac{aabbx - axbbx}{xaay} = \frac{abb - bbx}{ay} = \frac{bb(a-x)}{b\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{b(a-x)}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

$$\text{Ideo } AV^2 = \frac{bb(a-x)(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{bb(a-x)}{a+x}, \text{ id est}$$

$$a+x : a-x = bb : AV^2; \text{ est itaque } AV = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

§. 280.

Rectae CS et CZ ex centro ellipsis C ita ad tangentem TM ductae, ut sint rectis FM et GM ex focis ad punctum contactus M ductis parallelae sibi invicem et semiaxi transverso AC aequales sunt. Quia enim $CT : CA = a : x$,

atque $GT : GM = a : x$ (§. 278.) erit $GT : GM = CT : CA$. Si itaque CS sit ipsi GM parallela, erit $GT : GM = CT : CS$, proinde $CT : CS = CT : CA$, et $CS = CA = a$. Si deinde CZ ipsi FM fuerit parallela;

erit $CT : CA = a : x$, $FT : TM = a : x$ (§. 278.), ergo $FT : FM = CT : CA$, praeterea $FT : FM = CT : CZ$, ideo $CT : CZ = CT : CA$, atque $CZ = CA = CS$.

Quodsi jam ex focis F et G ducantur rectae FS et GZ, ad puncta S atque Z in tangente per rectas CS atque CZ determinata; erunt haec rectae FS et GZ ad tangentem normales.

Ex formula enim pro subtangente PT habetur formula

$$\text{pro tangente TM, quia } TM^2 = PT^2 + PM^2 = \frac{y^4 a^4}{b^4 x^4}$$

$$+ yy = \frac{y^4 a^4 + b^4 x^2 y^2}{b^4 xx} = \frac{y^2 (a^4 y^2 + b^4 x^2)}{b^4 xx}, \text{ et}$$

$$\text{proinde } TM = \frac{y\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}}{bbx} = \frac{y}{bbx} \sqrt{b^4 x^2 + a^4}$$

$$a^2 y^2) = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4 xx + aa(aabb - bbxx))} = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4$$

$x^2 +$

$$x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2) = \frac{y}{bbx} b r (bbxx + a^4 - aaxx) =$$

$$\frac{y}{bx} r (a^4 - (xx(aa - bb))). \text{ At est } FT = \frac{aa - x r (aa - bb)}{x},$$

$$\text{et } GT = \frac{aa + x r (aa - bb)}{x}, \text{ proinde } FT \times GT =$$

$$\frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}, \text{ unde } TM = \frac{y}{b} r \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx} =$$

$$\frac{y}{b} r FT \times GT. \text{ Jam } FG : TC = TM : TS, \text{ ergo}$$

$$TS = \frac{TM \times TC}{FG} = \frac{y}{b} r (FT \times GT) \frac{TC}{FG} = \frac{y}{b}$$

$$\times \frac{TC}{FG} \times r FT \cdot GT = \frac{y \cdot TC}{b} r \frac{FT \cdot GT}{GT^2} =$$

$$\frac{y \cdot TC}{b} r \frac{FT}{GT} = \frac{y \cdot CT}{b} \times \frac{r FT}{r GT} \times \frac{r FT}{r FT} =$$

$$\frac{y \cdot CT \cdot FT}{b \cdot r (GT \cdot FT)} = \frac{yy \cdot CT \cdot FT}{bb} : \frac{yy r (GT \cdot FT)}{b} =$$

$$\frac{yy \cdot CT \cdot FT}{bb \cdot TM}. \text{ Deinde est } PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{yy}{bb} \times \frac{aa}{x}$$

$$= \frac{CT \cdot yy}{bb}. \text{ Hoc itaque valore } PT \text{ in priori formula}$$

$$\text{substituto, erit } TS = \frac{PT \times FT}{TM}. \text{ Ideo } TM : PT =$$

FT : TS. In triangulis TMP et TFS vero præter hæc latera proportionalia angulus interceptus T idem est, proinde $\triangle TMP \sim \triangle TFS$ et angulus TSF = TPM = recto. (q. e. 1) Deinde MS : CG = CS : GM; et FC : MZ = FM : CZ, ex quibus proportionibus sequitur fore MS : CS = CG : MG et CZ : MZ = FM : EC. Sed CS = CZ et CG = FC, ideo MS : MZ = FM : MG.

Prae-

Præterea in triangulis FMS et GMZ præter hæc latera proportionalia angulus interceptus FMS = GMZ (§. 278.). Ideo $\triangle FMS \sim \triangle GMZ$, atque angulus GZM = FSM = recto. (q. e. 2.)

§. 281.

Quodsi ergo ex alterutro foco F ad tangentem ducatur perpendicularum FS, atque ad punctum S ex centro C recta CS; hæc CS erit semiaxi minori æqualis. Quia

jam $TM : y = FT : FS$, fiet $FS = \frac{y \cdot FT}{TM} = y \cdot FT :$

$$\frac{y \cdot FT \cdot GT}{b} = \frac{by \cdot FT}{y \cdot FT \cdot GT} = \frac{b \cdot FT}{r \cdot FT \cdot GT}. \text{ Pro-}$$

$$\text{inde } FS^2 = \frac{bb \cdot FT^2}{FT \cdot GT} = \frac{bb \cdot FT}{GT}, \text{ atque } FS =$$

$$b \cdot \frac{FT}{GT}. \text{ Est itaque } GT : FT = GM : FM (\S. 278)$$

= $CD^2 : FS^2$. Demisso quoque ex altero foco G ad tangentem perpendicularo GZ, erit semiaxis conjugata CD = b inter duo hæc perpendiculara ex focis in tangentem media proportionalis. Nam $TM : y = TG : GZ$ proinde

$$GZ = \frac{y \cdot GF}{TM} = y \cdot GT : \frac{y \cdot FT \cdot GT}{b} =$$

$$\frac{by \cdot GT}{y \cdot FT \cdot GT} = \frac{b \cdot GT}{r \cdot FT \cdot GT}; GZ^2 = \frac{bb \cdot GT^2}{FT \cdot GT} =$$

$$\frac{bb \cdot GT}{FT}; GZ = b \cdot \frac{GT}{FT}. \text{ Ergo } FT : GT =$$

$CD^2 : GZ^2$ five $GT : FT = GZ^2 : CD^2$, quæ proportio cum superiori $GT : FT = CD^2 : FS^2$ collata dat $GZ^2 : CD^2 = CD^2 : FS^2$, et proinde $GZ : CD = CD : FS$. Demisso denique ex centro C tertio perpendicularo CQ in tangentem, erit $FT : FS = CT : CQ$, et pro-

$$\text{inde } CQ = \frac{FS \cdot CT}{FT} = \frac{CT}{FT} \times \frac{b \cdot FT}{r \cdot FT \cdot GT}. \text{ Er-}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ergo } CQ^2 = \frac{bb \cdot FT^2 \cdot CT^2}{FT^2 \cdot FT \cdot GT} = \frac{bb \cdot CT^2}{FT \cdot GT}, \text{ atque } CQ \\
& = \frac{b \cdot CT}{r(FT \cdot GT)}. \text{ Per focum } F \text{ ducatur } FX \text{ tangen-} \\
& \text{ti parallela occurrens perpendiculo } CQ \text{ in puncto } X; \\
& \text{erit } CX = CQ - FS = \frac{b \cdot CT - b \cdot FT}{r \cdot FT \cdot GT} = \frac{b(CT - FT)}{r \cdot FT \cdot GT} \\
& = \frac{b \cdot CF}{r \cdot FT \cdot GT}. \text{ Ideo } CQ - CX = \frac{b \cdot CT - b \cdot CF}{r \cdot FT \cdot GT} \\
& = \frac{b(CT - CF)}{r \cdot FT \cdot GT} = \frac{b \cdot FT}{r \cdot FT \cdot GT}, \text{ et } CQ + CX = \\
& \frac{b \cdot CT + b \cdot CF}{r \cdot FT \cdot GT} = \frac{b \cdot GT}{r \cdot FT \cdot GT}. \text{ Proinde } CQ^2 - \\
& CX^2 = bb, \text{ atque } CX = r(CQ^2 - bb). \text{ Dato igitur} \\
& \text{axe minori in perpendiculo } CQ \text{ reperitur punctum } X, \text{ un-} \\
& \text{de normaliseducta per focum } F \text{ transibit.}
\end{aligned}$$

§. 282.

Ducta jam sit in ellipsi semidiameter CM, cujus conjugata reperitur ducta CK tangenti parallela. Ex puncto K ad axem transversum AB cadat perpendicularis KR; erit AP $\times$ PB : AR $\times$ RB = PM² : KR², et posito CR = u, inde concluditur aa - xx : aa - uu = PM² : KR². Quia jam $\triangle TPM \sim \triangle CRK$, habetur PM² : KR² = PT² : CR², unde concluditur aa - xx : aa - uu = $\frac{(aa - xx)^2}{xx} : uu$; $uu = \frac{(aa - uu)(aa - xx)}{xx}$; $uuxx$ = a⁴ - aaxx + aaui + uuxx; ergo uu = aa - xx, id est CR² = AP $\times$ PB. Praeterea xx = aa - uu, id est CP² = AR $\times$ RB. Porro ex §. 158. sequentem habemus analogiam aa : bb = AR $\times$ RB : KR², unde aa : bb = CP² : KR², atque KR² = $\frac{bbxx}{aa}$. Denique est CM² = CP²

+

$$+ PM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}, \text{ atque } CK^2 = CR^2 + RK^2$$

$$= aa - xx + \frac{bbxx}{aa}; \text{ ergo } CM^2 + CK^2 = bb + aa. \text{ In}$$

*eadem igitur ellipfi summa quadratorum binarum diametro-
rum conjugatarum semper est constans.*

§. 283.

In triangulis PTM et CKR porro est $MT : PM =$
 $CK : KR.$ Sed $MT : PM = \frac{y}{b} \text{ r } FT . GT : y =$

$\frac{ay}{bx} \text{ r } FM . GM : y.$ Est enim $FT \propto GT =$

$$\frac{a^2 - xx(aa - bb)}{xx}, \text{ et } FM . GM = \frac{a^2 - xx(aa - bb)}{aa}.$$

Proinde $FT . GT : FM . GM = aa : xx$, et $FT . GT =$
 $\frac{aa FM . GM}{xx}.$ Est itaque $CK : KR = \frac{ax}{bx} \text{ r } FM . GM$

$: y = \frac{a}{bx} \text{ r } FM . GM : 1.$ Iam $CM^2 = xx + yy$

$$= bb - \frac{bbxx}{aa} + xx = \frac{bbaa - bbxx + aaxx}{aa} = bb +$$

$$\frac{xx(aa - bb)}{aa}. \text{ Ideo } CK^2 = aa + bb - CM^2 = aa +$$

$$bb - bb - \frac{xx(aa - bb)}{aa} = aa - \frac{xx(aa - bb)}{aa} =$$

$FM . GM$, et proinde $CK = \text{r } FM . GM.$ Ex analo-

gia igitur $CK : KR = \frac{ay}{bx} \text{ r } FM . GM : 1$ fit $CK : KR$

$$= \frac{a}{bx} CK : 1, \text{ atque ex eadem deducitur } KR = \frac{bx}{a}.$$

Ex centro in tangentem ducatur perpendiculum CQ, et
Qq 2 pos-

posito angulo $CMT = MCK = s$, erit $CQ = CM \sin. s$.

Est vero $CT : CQ = CK : KR$, id est $\frac{aa}{x} : CM. \sin. s$

$= CK : \frac{bx}{a}$, unde deducitur $ab = CM. CK. \sin. s$.

Ex § 233. habemus $aa + bb = pp + qq$, posito $CM = p$ et $CK = q$. Proinde $aa + 2ab + bb = pp + 2ab + qq = pp + 2pq \sin. s + qq$, atque $a + b = \sqrt{(pp + 2pq \sin. s + qq)}$. Deinde quoque est $aa - 2ab + bb = pp - 2ab + qq = pp - 2pq \sin. s + qq$, ideoque $a - b = \sqrt{(pp - 2pq \sin. s + qq)}$. Ergo est $a = \frac{1}{2}\sqrt{(pp + 2pq \sin. s + qq)} + \frac{1}{2}\sqrt{(pp - 2pq \sin. s + qq)}$, atque $b = \frac{1}{2}\sqrt{(pp + 2pq \sin. s + qq)} - \frac{1}{2}\sqrt{(pp - 2pq \sin. s + qq)}$. Ex quo patet, quomodo ex datis duabus semidiametris conjugatis obliquangulis cum angulo, quem comprehendunt, duae semidiametri principales inveniantur.

§. 284.

Simili ratione ex datis duabus semidiametris principalibus inveniuntur duae semidiametri obliquangulae conjugatae quaecunque dato simul angulo coordinationis s .

Quia enim $pp + qq = aa + bb$ et $2pq = \frac{2ab}{\sin. s}$, erit $pp +$

$2pq + qq = aa + \frac{2ab}{\sin. s} + bb$ atque $pp - 2pq + qq = aa$

$- \frac{2ab}{\sin. s} + bb$. Proinde $p + q = \sqrt{(aa + \frac{2ab}{\sin. s} + bb)}$

et $p - q = \sqrt{(aa - \frac{2ab}{\sin. s} + bb)}$ ex quibus eodem modo

ut ante valores ipsarum p et q concluduntur. Quia jam

est $a - b = \sqrt{(pp - 2pq \sin. s + qq)}$ et $p - q = \sqrt{(aa - \frac{2ab}{\sin. s} + bb)}$ praeterea vero $pp + qq = aa + bb$, et $2pq =$

$\frac{2ab}{\sin. s}$

$\frac{2ab}{\sin. s}$, erit $2pq \sin. s < \frac{2ab}{\sin. s}$, hincque $pp - 2pq \sin. s + qq$

$> aa - \frac{2ab}{\sin. s} + bb$, et $a - b > p - q$. Inter omnes

igitur diametros conjugatas illae, quae sunt orthogona-
les, maxime a se invicem differunt. Præterea, si fieri

possit $\sin. s = \frac{2ab}{aa + bb}$, ut sit $\frac{2ab}{\sin. s} = aa + bb$, fiet $p = q$;

inquiramus itaque in hujus hypotheseos possibilitatem.

Si fuerit $\sin. s = \frac{2ab}{aa + bb}$, et proinde $p = q$, erit pp

$= qq = \frac{aa + bb}{2}$, et $p = q = r \frac{(aa + bb)}{2}$. Præterea

$\sin. s^2 = \frac{4 aabb}{(aa + bb)^2}$, $\sin. s^2 + \cos. s^2 = \frac{4 aabb}{(aa + bb)^2}$

$+ \cos^2 = 1$, atque $\cos. s^2 = 1 - \frac{4 aabb}{(aa + bb)^2} =$

$\frac{(aa + bb)^2 - 4 aabb}{(aa + bb)^2} = \frac{a^4 + 2 aabb + b^4 - 4 aabb}{(aa + bb)^2}$

$= \frac{a^4 - 2 aabb + b^4}{(aa + bb)^2}$. Proinde $\cos. s = \frac{aa - bb}{aa + bb}$,

qui negative sumtus ob angulum MCK obtusum est $=$

$\frac{-aa + bb}{aa + bb}$. Porro est $\sin \frac{1}{2} s = r \frac{1 - \cos. s}{2} =$

$r \left(1 - \frac{-aa + bb}{aa + bb} \right) : 2 = r \frac{aa}{aa + bb}$, atque $\cos \frac{1}{2} s =$

$r \frac{1 + \cos. s}{2} = r \left(1 + \frac{-aa + bb}{aa + bb} \right) : 2 = r \frac{bb}{aa + bb}$

Ergo $\tan \frac{1}{2} s = \frac{\sin \frac{1}{2} s}{\cos \frac{1}{2} s} = \frac{a}{b}$, atque ideo $\frac{1}{2} s$, id

est $\frac{1}{2} \text{MCK} = \text{CEB}$, et $\text{MCK} = 2\text{CEB} = \text{AEB}$. Dan-

tur itaque in ellipsi duæ semidiametri conjugatæ æquales, quarum angulus coordinationis est $= AEB$. Quia porro

$$\text{est } pp = xx + yy = xx + bb - \frac{bb}{aa}xx, \text{ fiet } pp - bb =$$

$$\frac{aaxx - bbxx}{aa}, \text{ et } xx = CP^2 = \frac{aa(pp - bb)}{aa - bb}. \text{ Dein-}$$

de $2pp = aa + bb$, ideo $2pp - 2bb = aa - bb$, atque CP^2

$$= \frac{aa(pp - bb)}{2(pp - bb)} = \frac{aa}{2}; \text{ ergo } CP = \frac{a}{\sqrt{2}}. \text{ Tan-}$$

dem hoc valore loco x substituto invenitur $PM^2 = bb -$

$$\frac{hbba}{2aa} = bb - \frac{bb}{2} = \frac{bb}{2}, \text{ et } PM = \frac{b}{\sqrt{2}}. \text{ Proin-}$$

$$\text{de fit } \text{tang } PCM = \frac{PM}{CP} = \frac{b}{a}, \text{ et } \text{tang } MCD =$$

$$\text{cot. } PCM = \frac{1}{\text{tang. } PCM} = \frac{a}{b}. \text{ Quare posita}$$

sub hypothese est angulus $MCD = AEC = CEB$, atque semidiametri conjugatæ CM, CK , inter se æquales, erunt parallelæ chordis EA et EB .

§. 285.

Proposita jam sit parabola MAN , cujus axis transversus est AC , focus F , semilatus rectum $FH = c$; sitque invenienda recta TM curvam in puncto T tangens. Quodsi ex dato puncto M ad latus transversum ducatur applicata orthogonalis $MP = y$, existente $AP = x$, habetur æquatio pro curva $yy = 2cx$ (§. 157.), cujus differentialis est

$$y \frac{dy}{dx} = c \text{ atque } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{c}. \text{ Proinde subtangens } PT$$

$$= y \frac{dx}{dy} = \frac{yy}{c} = 2x. \text{ Hinc portio subtangentis } AT$$

inter tangentem et verticem intercepta $= x = AP$.

Quia jam recta $FM = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit
quo-

quoque $FM = AT + AF = FM$, et proinde triangulum FMT æquicrurum, et angulus $MFP = 2MTP$. Præterea si ex vertice A erigatur AS ad axem normalis, occurrens tangenti in S , erit $PT : AT = PM : AS$, et proinde $AS = \frac{1}{2}PM$. Si itaque per punctum M ducatur recta MS axi AC parallela, erit angulus $tMS = tMP = FMT$.

§. 286.

Quodsi jam desideretur formula pro ipsa tangente MT ; erit $MT^2 = PM^2 + PT^2 = 4x^2 + 2cx = 4x(x + \frac{1}{2}c)$, et proinde $MT = 2\sqrt{x(x + \frac{1}{2}c)} = 2\sqrt{AP \cdot FM}$. Demisso nunc perpendiculo FS ex foco F in tangentem, erit punctum occurfus S in recta SA ad axem in vertice normali. Est enim $MS = TS = \frac{1}{2}MT = \sqrt{AP \cdot FM} = \sqrt{AT \cdot FT}$, unde $TS^2 = AT \cdot FT$, et $AT : TS = TS : FT$, ex qua analogia perspicitur, esse $\triangle ATS \sim \triangle FTS$, quia angulus T utrique est communis, et proinde ang. $FST = R = SAT$. Ipsum vero perpendiculum FS ex foco in tangentem est media proportionalis inter distantiam foci a vertice AF et rectam FM ex foco ad punctum contactus M ducta. Quia enim $\triangle AFS \sim \triangle FTS$, erit quoque ang. $AFS =$ ang. AST , atque $\triangle AFS \sim \triangle AST$. Pro-

inde $AS : TS = AF : FS$, ergo $FS = \frac{AF \cdot TS}{AS} =$

$$\frac{AF \cdot TS}{\frac{1}{2}PM} = \frac{2AT \cdot TS}{PM}. \text{ Sed } TS = \sqrt{AP \cdot FM}, \text{ ergo } FS = \frac{2AF \cdot \sqrt{AP \cdot FM}}{PM} \text{ et } FS^2 = \frac{4AF^2 \cdot AP \cdot FM}{PM^2} =$$

$AF \cdot FM$, ob $PM^2 = 4AF \cdot AP$. Ideo $AF : FS = FS : FM$. Est itaque $FS = \sqrt{AF \cdot FM}$, unde sequentes deducuntur conclusiones. $AS : MS = AS : TS$, ob $MS = TS$, $AS : TS = AF : FS$, ergo $AS : MS = AF : FS$, $AF : FS = FS : FM$, ergo $AS : MS = FS : FM$. Præterea est $FS : FM = FS : FM$, five $FS : FM = \sqrt{AF \cdot FM} : FM$, ideo $FS^2 : FM^2 = AF \cdot FM : FM^2$, $FS^2 :$

$FM^2 = AF : FM$, $FS : FM = rAF : rFM$, ergo $AS : MS = rAF : rFM$.

§. 287.

Si curvam quamcunque MAN in puncto M tangat recta TM, ea quæ per punctum contactus ducitur recta MR tangenti MT perpendicularis, ipsi *curvæ normalis* sive *perpendicularis* esse dicitur. Atque si ex puncto M ad axem curvæ cadat applicata MP, et normalis axem secet in puncto quodam R; portio axis inter applicatam et normalem intercepta dicitur *Subnormalis*. Si applicata PM ad axem sit normalis, eadem perpetuo inter subtangentem et subnormalem proportionem media est, ita

ut sit $yy = PR \times PT$, atque $PR = \frac{yy}{PT}$. Quare cum

pro coordinatis orthogonalibus sit $PT = y \frac{dx}{dy}$ sub ea-

dem hypothese formula pro subnormali generalis est $PR = y \frac{dy}{dx}$. Data subnormali, quæ secundum formulam

ex æquatione pro curva data differentiando deducitur, determinata est positio normalis RM, et proinde simul positio tangentis MT faciendo angulum RMT rectum.

Pro parabola MAN habetur $\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y}$, hinc $PR = y \frac{dy}{dx} = c = \text{semilateri recto} = \text{constanti}$. Ipsa nor-

malis MR pro parabola est $= 2FS = 2rAF \cdot FM$ ob $TS : SM = FS : MR$.

§. 288.

Quodsi ex quocunque ellipseos puncto M ad centrum curvæ ducatur recta, ea erit diameter omnes ordinatas tangenti in puncto M parallelas bifariam secans. Posito vero semilattere transverso infinito, curva fit parabola

rabola, ideo si ex quocunque parabolæ puncto M duca-
 tur recta MC axi transverso AP parallela, hæc erit dia-
 meter parabolæ obliquangula, omnes ordinatas tangen-
 ti MT parallelas fecans bifariam. Idem etiam per cal-
 culum invenitur sequentem in modum. Ducta sit MC
 ipsi AP parallela, et ordinata mn sit ipsi MT parallela.
 Sit $Mp = t$, et $pm = u$, atque ducatur ex m ad axem
 transversum normalis mr , quæ etiam ipsi MC apud s
 normaliter insidet. Erit $PT = 2x$, $MT = r(4xx =$
 $2cx)$, $MT : PT = mp : ps$, quia angulus $mps = tMs =$

$$MTP. \text{ Proinde } ps = \frac{2xu}{r(4xx + 2cx)}, ps^2 = \frac{4xxuu}{4xx + 2cx}$$

$$= \frac{2xuu}{2x + c}, \text{ atque } ps = u r \frac{2x}{2x + c}. \text{ Porro } 2x : r2cx$$

$$= ps : ms, \text{ et } 4xx : 2cx = ps^2 : ms^2 \text{ five } 4xx : 2cx =$$

$$\frac{2xuu}{2x + c} : ms^2; \text{ ergo } ms^2 = \frac{4cxuu}{2x + c} : 4xx = \frac{4cxuu}{8x^3 + 4cxx}$$

$$= \frac{uuc}{2x + c}, \text{ et } ms = u r \frac{c}{2x + c}. \text{ Est itaque } Ar =$$

$$AP + Mp + ps = x + t + u r \frac{2x}{2x + c}, \text{ et } mr = PM +$$

$$ms = r2cx + u r \frac{c}{2x + c}. \text{ Per naturam vero para-}$$

$$\text{bolæ est } mr^2 = 2c, Ar; \text{ ideo fit } \left(r2cx + u r \frac{c}{2x + c} \right)^2$$

$$= 2cx + 2ct + 2cu r \frac{2x}{2x + c}, \text{ id est } 2cx + 2cu r \frac{2x}{2x + c}$$

$$+ \frac{uuc}{2x + c} = 2cx + 2ct + 2cu r \frac{2x}{2x + c}. \text{ Ergo } \frac{uuc}{2x + c}$$

$= 2ct$, et $uu = (4x + 2c)t$. Unde patet cuilibet abscissæ
 t positivæ duas respondere applicatas reales absolute
 spectatas æquales. Est vero $x + \frac{1}{2}c = FM$, et proin-

de $4x + 2c = 4FM$. Proinde hujus diametri obliquangulæ parameter est $= 4FM$.

§. 289.

Pro hyperbola MAN abscissis a centro in latere transverso computatis habetur æquatio $aayy = bbxx - aabb$

unde concluditur differentiando $aay \frac{dy}{dx} = bbx$, atque

$$\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bbx}. \text{ Proinde est subtangens } PT = \frac{aayy}{bbx} =$$

$$\frac{bbxx - bbaa}{bbx} = \frac{xx - aa}{x} = x - \frac{aa}{a}. \text{ Ideo hic quo-}$$

$$\text{que } CT = CP - PT = \frac{aa}{x}. \text{ Præterea est } MT^2 =$$

$$PT^2 + PM^2 = \frac{y^4 a^4}{b^4 xx} + yy = \frac{y^4 a^4 + b^4 yyxx}{b^4 xx} =$$

$$\frac{yy(b^4 xx + yya^4)}{b^4 xx} \text{ Ergo } MT = \frac{y \sqrt{(b^4 xx + yya^4)}}{bbx}$$

$$= \frac{y \sqrt{(b^4 x^2 + aa, aayy)}}{bbx}. \text{ Est vero } aayy = bbxx - bbaa,$$

$$\text{ideoque est } MT = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4 xx + aa, (bbxx - bbaa))} =$$

$$\frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4 xx + bbaa xx - bba^4)} = \frac{y}{bx} \sqrt{(bbxx - a^4 + aaxx)}$$

$$= \frac{ya}{bx}, \frac{\sqrt{(bbxx + aaxx - a^4)}}{a}.$$

$$\text{Sed } \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa} = \left(\frac{x \sqrt{(aa + bb)}}{a} - a \right)$$

$$\left(\frac{x \sqrt{(aa + bb)}}{a} + a \right) = FM \cdot GM (\S. 162.) \text{ Ergo tan-}$$

$$\text{gens } MT = \frac{ya}{bx} \sqrt{FM \cdot GM}.$$

§. 290.

Ambae rectae ex focis FM et GM ad punctum hyperbolae quodvis M ductae aequaliter inclinantur ad tangentem curvae in illo puncto M, sive angulus FMT erit = GMT.

$$\text{Quia est } FT = r(aa + bb) - \frac{aa}{x} = \frac{xr(aa + bb) - aa}{x}$$

$$\text{et } FM = \frac{xr(aa + bb)}{a} - a = \frac{xr(aa + bb) - aa}{a} \text{ erit}$$

$$FT : FM = a : x. \text{ Deinde ob } GT = r(aa + bb) + \frac{aa}{x}$$

$$= \frac{xr(aa + bb) + aa}{a} \text{ et } GM = \frac{xr(aa + bb)}{a} + a = \frac{xr(aa + bb) + aa}{a},$$

$$\text{erit quoque } GT : GM = a : x$$

$$\text{ideo } FT : FM = GT : GM$$

$$\text{et } FT : GT = FM : GM.$$

$$\text{Ergo } \sin. FMT : \sin. GMT = \sin. FTM : \sin. GTM.$$

$$\text{Sed } \sin. FTM = \sin. GTM$$

$$\text{Ergo et } \sin. FMT = \sin. GMT, \text{ ideoque}$$

$$\text{angulus } FMT = \text{angulo } GMT.$$

§. 291.

Si ex focis F et G ad tangentem MT ducantur perpendiculara FS et Gs erit uti in ellipsi FS × Gs = bb.

Ducto enim ex foco F in tangentem perpendicularo FS, erit

$$TM : PT = FT : TS$$

(quia tr. PMT ∼ tr. FST ob angulos ad S et P rectos

et angulum T utrique communem.) ideo $\frac{ay}{bx} r FM.$

$$GM : \frac{aayy}{bbx} = \frac{xr(aa + bb) - aa}{x} : FS. \text{ Sed } \frac{xr(aa + bb) - aa}{x}$$

=

$$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} \cdot \frac{a}{x}. \text{ Ergo } \frac{ay}{bx} \sqrt{FM} \cdot GM :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} \cdot \frac{a}{x} : TS. \text{ Est vero}$$

$$\frac{x\sqrt{(aa+bb)}-aa}{a} = FM. \text{ Ergo } \frac{ay}{bx} \sqrt{FM} \cdot GM :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{a \cdot FM}{x} : TS \text{ et } TS = \frac{a^3 yy FM}{bbxx} : \frac{ay}{bx} \sqrt{FM}.$$

$$GM = \frac{bx a^3 yy FM}{bbxxay \sqrt{FM} \cdot GM} = \frac{aay \cdot FM}{bx \sqrt{FM} \cdot GM}. \text{ Deinde est}$$

$$PT : PM = TS : FS \text{ ideoque } \frac{aayy}{bbx} : y =$$

$$\frac{aay \cdot FM}{bx \sqrt{FM} \cdot GM} : FS. \text{ et hinc } FS = \frac{aayy \cdot FM}{bx \sqrt{FM} \cdot GM} :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{aayybb x FM}{aayybx \sqrt{FM} \cdot GM} = \frac{b \cdot FM}{\sqrt{FM} \cdot GM}.$$

Pariter si ex altero foco G in tangentem ducatur perpendicularis Gr, erit MT : PT = GT : Ts, id est

$$\frac{ay}{bx} \sqrt{FM} \cdot GM : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{x} : Ts. \text{ Sed}$$

$$\frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{x} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} \cdot \frac{a}{x}. \text{ Ergo}$$

$$\frac{ay}{bx} \sqrt{FM} \cdot GM : \frac{aayy}{bbx} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} \cdot \frac{a}{x} : Ts.$$

$$\text{Jam } \frac{x\sqrt{(aa+bb)}+aa}{a} = GM. \text{ Ergo } \frac{ay}{bx} \sqrt{FM} \cdot GM :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{a \cdot GM}{x} : Ts, \text{ ideoque } Ts = \frac{a^3 yy \cdot GM}{bbxx} :$$

$$\frac{ay \sqrt{FM} \cdot GM}{bx} = \frac{a^3 yybx \cdot GM}{bbxxay \sqrt{FM} \cdot GM} = \frac{aay \cdot GM}{bx \sqrt{FM} \cdot GM}.$$

Deinde

Deinde est $PT : PM = Ts : Gs$, id est $\frac{aayy}{bbx} : y =$

$$\frac{aay \cdot GM}{bxr \cdot FM \cdot GM} : Gs, \text{ ergo } Gs = \frac{aayy \cdot GM}{bxr \cdot FM \cdot GM} :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{aayybbx \cdot GM}{aayybxr \cdot FM \cdot GM} = \frac{b \cdot GM}{r \cdot FM \cdot GM} \quad \text{Ex}$$

$$\text{quibus fit } FS \cdot GS = \frac{b \cdot FM}{r \cdot FM \cdot GM} \cdot \frac{b \cdot GM}{r \cdot FM \cdot GM} =$$

$$\frac{bb \cdot FM \cdot GM}{FM \cdot GM} = bb,$$

Ex demonstratione præcedentis theorematis quo-

$$\text{que habetur } TS \quad Ts = \frac{aay \cdot FM}{bxr \cdot FM \cdot GM} \cdot \frac{aay \cdot GM}{bxr \cdot FM \cdot GM}$$

$$= \frac{a^4yy \cdot FM \cdot GM}{bbxx \cdot FM \cdot GM} = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aayy}{bbx} \cdot \frac{aa}{x} =$$

$PT \cdot CT$. Quæ facta aequalia $TS \cdot Ts = PT \cdot CT$ dant proportionem sequentem; $TS : CT = PT : Ts$.

§. 292.

Ducto tertio perpendicularo CQ ex centro ad tangentem,

$$\text{erit } CQ = \frac{ab}{r \cdot FM \cdot GM}. \text{ Est enim } MT : PT = CT : TQ$$

$$\text{five } \frac{ay}{bx} r \cdot FM \cdot GM : \frac{aayy}{bbx} = \frac{aa}{x} : TQ \text{ et } TQ =$$

$$\frac{a^4yy}{bbxy} : \frac{ayr \cdot FM \cdot GM}{bx} = \frac{a^4yybx}{bbxxayr \cdot FM \cdot FM}$$

$$= \frac{a^3y}{bxr \cdot FM \cdot GM}. \text{ Porro est } PT : PM = TQ : CQ,$$

$$\text{five } \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a^3y}{bxr \cdot FM \cdot GM} : CQ. \text{ Hinc } CQ =$$

$$= \frac{a^2 yy}{bxr \cdot FM \cdot GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{a^3 yybbx}{aayybxr \cdot FM \cdot GM} =$$

$$\frac{ab}{r \cdot FM \cdot GM}$$

§. 293.

Quodsi ex alterutro foco F ad tangentem ducatur perpendicularis FS , et ad punctum S ex centro C recta CS , erit hac CS perpetuo semiaxi majori aequalis. Ducatur ex foco F tangenti parallela FX secans perpendicularum CQ productum in X ,

$$\text{et erit } CT : TQ = CF : FX$$

$$\text{et } CT : TQ = CG : QS$$

$$\text{Ergo } CF : FX = CG : QS$$

$$\text{et } GF : CG = FX : QS$$

Sed $FX = Qs$, quia $CF = CG$. Præterea $FX = QS$.

$$\text{Ergo } QS = Qs. \quad \text{Hinc erit } QS = \frac{TS + Ts}{2} =$$

$$\left(\frac{aay \cdot FM}{bxr \cdot FM \cdot GM} + \frac{aay \cdot GM}{bxr \cdot FM \cdot GM} \right) : 2 =$$

$$\frac{aay \cdot FM + aay \cdot GM}{2bxr \cdot FM \cdot GM} = \frac{aay (FM + GM)}{2bxr \cdot FM \cdot GM}$$

$$\text{Est vero } FM + GM = \frac{2xr(aa + bb)}{a}. \quad \text{Ergo } QS$$

$$= \frac{aay \cdot \frac{2xr(aa + bb)}{a}}{2bxr \cdot FM \cdot GM} = \frac{ay2xr(aa + bb)}{2bxr \cdot FM \cdot GM}$$

$$= \frac{ayr(aa + bb)}{bxr \cdot FM \cdot GM} = Qs. \quad \text{Unde sequitur } CS^2 = CQ^2$$

$$+ QS^2 = \frac{aabb}{FM \cdot GM} + \frac{aayy(aa + bb)}{bb \cdot FM \cdot GM}$$

$$= \frac{aab^4 + a^4yy + aayybb}{bb \cdot FM \cdot GM} = \frac{aab^4 + aayy(aa + bb)}{bb \cdot FM \cdot GM}$$

Sed $aayy = bb(xx - aa)$. Ergo $CS^2 =$

$$\frac{aab^4 + bb(xx - aa)(aa + bb)}{bb \cdot FM \cdot GM} = \frac{aabb + (xx - aa)(aa + bb)}{FM \cdot GM}$$

$$= \frac{aabb + aaxx + bbxx - aabb - a^4}{FM \cdot GM} = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{FM \cdot GM}$$

$$= \frac{(aa + bb)xx - a^4}{FM \cdot GM}. \text{ At est } FM \cdot GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$$

Ergo $FM \cdot GM, aa = aaxx + bbxx - a^4$ ideoque $aa =$

$$\frac{aaxx + bbxx - a^4}{FM \cdot GM}. \text{ Est itaque } CS^2 = aa. \text{ Erit er-}$$

go uti in ellipsi recta $CS = a = AC$.

§. 294.

Quod si ducatur ex foco F tangenti parallela FX, secans perpendicularum ex centro CQ productum in X, erit CX =

$$r(bb + CQ^2). \text{ Quia } CQ = \frac{ab}{r \cdot FM \cdot GM} \text{ et } FS =$$

$$\frac{b \cdot FM}{r \cdot FM \cdot GM} \text{ erit } CQ + FS = \frac{ab + b \cdot FM}{r \cdot FM \cdot GM}. \text{ Sed } FM =$$

$$\frac{xr(aa + bb) - aa}{a}. \text{ Ergo } CQ + FS =$$

$$ab + \frac{ar(aa + bb) - aa}{a} \cdot b = \frac{aab + bxr(aa + bb) - aab}{a} :$$

$$r \cdot FM \cdot FM = \frac{aab + bxr(aa + bb) - aab}{ar \cdot FM \cdot GM} = \frac{bxr(aa + bb)}{or \cdot FM \cdot GM}.$$

Quare $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa + bb)}{aa \cdot FM \cdot GM} - \frac{aabb}{FM \cdot GM}$

$$= \frac{bbxx(aa + bb) - a^4bb}{aa \cdot FM \cdot GM} = \frac{(xx(aa + bb) - a^4)bb}{aa \cdot FM \cdot GM}$$

At

At est $aa.FM.GM = xx(aa + bb) - a^4$ ideo est $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = bb$. Si jam ducatur ex foco F tangenti parallela FX, secans perpendicularum productum in X, erit $FS = QX$ ideoque $CQ + QX = CX = CQ + FS$. Est vero $(CQ + FS)^2 - CQ^2 = bb$ (per dem.) et hinc $(CQ + FS)^2 = bb + CQ^2$ atque $CX = CQ + FS = \sqrt{bb + CQ^2}$.

§. 295.

Si in verticibus A et B ad axem perpendiculares erigantur, donec tangenti occurrant in V et u; erit perpendicularum AV ex vertice A ad perpendicularum FS ex foco respondente F ad tangentem, uti inverſim perpendicularum Gs ex altero foco G, ad tangentem, ad perpendicularum Bu ex vertice oppoſito B. Ductis enim hiſce perpendicularis ex verticibus A et B ad axem, erit PT:

$$PM = AT : AV, \text{ est vero } AT = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} \\ = \frac{a(x - a)}{x} \text{ ideo erit } \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a(x - a)}{x} : AV. \text{ Er-}$$

$$\text{go } AV = \frac{ay(x - a)}{x} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{bbxay(x - a)}{aayyx} = \frac{bb(x - a)}{ay}$$

$$\text{Deinde } PT : PM = BT : Bu; \text{ est vero } BT = a + \frac{aa}{x} =$$

$$\frac{ax + aa}{x} = \frac{a(x + a)}{x} \text{ ideo } \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a(x + a)}{x} : Bu \text{ et}$$

$$Bu = \frac{ay(x + a)}{x} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{bbxay(x + a)}{aayyx} = \frac{bb(x + a)}{ay}$$

$$\text{Ergo } AV.Bu = \frac{bb(x - a)}{ay} \cdot \frac{bb(x + a)}{ay} = \frac{b^4(xx - aa)}{aayy} =$$

$$\frac{bb(xx - aa)bb}{aayy}. \text{ Sed } (xx - aa)bb = aayy \text{ Ergo } AV.Bu$$

$$= bb, \text{ ſed } bb = FS.Gs. \text{ Ergo } AV.Bu = FS.Gs, \text{ et hinc } AV : FS = Gs : Bu.$$

§. 296.

§. 296.

*Præterearectæ GF et Vuita in T sectæ sunt, ut segmen- F. 276.
ta sint in reciproca proportione. Nam PT : TM = AT : TV*

$$\text{i. e. } \frac{aayy}{bbx} : \frac{ay \sqrt{FM \cdot GM}}{bx} = \frac{a(x-a)}{x} : TV \text{ hinc}$$

$$TV = \frac{aay(x-a) \sqrt{FM \cdot GM}}{bxx} : \frac{aayy}{bbx} =$$

$$\frac{aaybbx(x-a) \sqrt{FM \cdot GM}}{aayyxx} = \frac{b(x-a)}{yx} \sqrt{FM \cdot GM}.$$

$$\text{Deinde } PT : TM = BT : Tv \text{ f. } \frac{aayy}{bbx} : \frac{ay \sqrt{FM \cdot GM}}{bx}$$

$$= \frac{a(x+a)}{x} : Tv. \text{ Hinc } Tv = \frac{aay(x+a) \sqrt{FM \cdot GM}}{bxx} :$$

$$\frac{aayy}{bbx} = \frac{aaybbx(x+a) \sqrt{FM \cdot GM}}{aayybx} = \frac{b(x+a)}{yx} \sqrt{FM \cdot GM}.$$

$$\text{GM. Unde } TV \cdot Tv = \frac{bb(xx - aa)}{yyxx} \sqrt{FM \cdot GM}.$$

$$= \frac{bbxx - bbaa}{yyxx} \sqrt{FM \cdot GM} = \frac{aabbxx - bba^4}{yyxxaa} \sqrt{FM \cdot GM}.$$

$$= \frac{aa}{xx} \sqrt{FM \cdot GM} (\text{quia } bbxx - bbaa = yya). \text{ Sed } FM \cdot GM =$$

$$\frac{aaxx + bbxx - a^4}{a^2}. \text{ Ergo } TV \cdot Tv = \frac{aa}{xx}.$$

$$\frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa} = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{xx} = \frac{(aa + bb)xx - a^4}{xx}$$

$$= aa + bb - \frac{a^4}{xx} = (r(aa + bb) - \frac{aa}{x}) (r(aa +$$

$$bb) + \frac{aa}{x}). \text{ Ergo } TV \cdot Tv = FT \cdot GT.$$

Rr

§. 297.

§. 297.

Recta MC in hyperbola est semidiameter secans omnes ordinatas tangenti MT parallelas bifariam, cujus itaque conjugata reperitur ducta CK tangenti MT parallela. Erit quidem hæc diameter imaginaria (§. 188.) ponendo autem $CK^2 = -bb$, et ducta KR ad axem transversum normali, si $CR = u$; habemus $AP \propto PB : CA^2 + CR^2 = PM^2 : KR^2$, id est $-aa + xx : aa + uu = PM^2 : KR^2$. Sep $\triangle PTM \sim \triangle CKR$, ideo $PM^2 : KR^2 = PT^2 : CR^2$, atque $-aa + xx : aa + uu = -\frac{(-aa + xx)^2}{xx}$

: uu , unde concluditur $uu = -aa + xx$ et $uu + aa = xx$. Præterea est $aa : bb = CA^2 + CR^2 (xx) : KR^2 = \frac{bbxx}{aa}$; $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa} CK^2 =$

$CR^2 + KR^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$. Proinde $CM^2 =$

$CK^2 = aa - bb$. Ideo quoque in hyperbola est summa algebraica quadratorum duarum semidiametrorum conjugatarum constantis magnitudinis, ubi tamen notandum est, quadratum semidiametri conjugatæ hic esse negativum.

§. 298.

Quia est $yy = \frac{bb}{aa}xx - bb$, et proinde $\frac{y}{x} = r(\frac{bb}{aa} - \frac{bb}{xx})$; patet, quo major capiatur abscissa $CP = x$,

eo magis rationem $\frac{y}{x}$ accedere ad rationem $\frac{b}{a}$. Po-

sito autem $x = \infty$, quo casu etiam fit $y = \infty$, esse $\frac{y}{x} =$

$\frac{b}{a}$ (§. 78.); id est limes, ad quem ratio $\frac{y}{x}$ variabilibus

x et y

x et y , crescentibus perpetuo adpropinquat, est ratio $\frac{b}{a}$, licet ipsa hæc ratio $\frac{y}{x}$, ponendo pro x quantita-

tem finitam quantumvis magnam, perpetuo sit $< \frac{b}{a}$.

Posito ergo in vertice A ad axem normali $AD = b$, si ducatur recta CD eaque in infinitum utrinque producta intelligatur; curva continuo magis ad eam adpropinquabit. Tum

enim æquatio pro hac recta est $y = \frac{b}{a}x$ seu $\frac{y}{x} =$

$\frac{b}{a}$, et capta abscissa $CP = x$ communi pro ramo hyper-

bolæ AM et recta CI , quia semper est ratio $\frac{b}{a} > \frac{y}{x}$,

perpetuo erit adplicata hyperbolæ PM minor adplicata rectæ Pm , sed earundem differentia Mm eo minor evadit, quo magis abscissa x crescit. Hoc idem valebit de parte Ck ; atque si ad alteram partem sub eodem angulo ducatur recta KCi ; ad eandem rami BK , et As pariter eo magis accedent quo major abscissa — CP capiatur.

§. 299.

Ejusmodi linea recta, ad quam linea quædam curva continuo propius accedit, licet eandem nunquam attingat, *Asymtota* curvæ vocatur.

Lineæ igitur rectæ ICk et KCi sunt binæ asymtota hyperbolæ, atque asymtota hyperbolæ se mutuo in centro C intersecant, ad axem vero inclinantur angulo

$\angle ACD = \angle ACd$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, angulique dupli

$$DCd \text{ tangens} = \frac{2b}{a} : \left(1 - \frac{bb}{aa}\right) = \frac{2b}{a} : \frac{aa - bb}{aa}$$

$$= \frac{2baa}{(aa - bb)a} = \frac{2ba}{aa - bb}.$$

Unde patet, si fuerit $b = a$,

Rr 2

fore

fore angulum, sub quo asymptotæ se interfecant DCd
 $=$ recto, quia ipsius tangens fit $= \frac{2ba}{0} = \infty$, quo casu
hyperbola æquilatera dicitur.

Ex his præterea concludendum est, quod pars hyperbolæ MAN tota intra angulum ICi et altera pars KBk tota intra angulum HCK contineatur, licet asymptotæ ipsæ sint limites, ad quos quatuor hyperbolæ rami continuo propius accedunt, quos nunquam vero adtingunt. Omnis itaque hyperbolæ diameter realis intra angulum ICi cadit. Reliquæ omnes extra hunc angulum cadentes sunt impossibiles, atque asymptotæ sunt limites, diametros reales ab impossibilibus separantes.

§. 300.

Si ex alterutro foco G in utramvis asymptotam perpendiculariculum GH demittatur, erit hocce perpendiculariculum $= b$, portio vero asymptotæ CH inter centrum C , et hocce perpendiculariculum GH intercepta erit $= a$. Cum enim sit $AC = a$, et $AD = b$, erit $CD = Cd = r(AC^2 + AD^2) = r(aa + bb)$. Jam quoque $CG = r(aa + bb) = r(CH^2 + GH^2)$. Cum igitur in triangulis ACd et CHG sit latus $CG = Cd$, angulus $HCG = ACd$, et $H =$ recto $= A$, erit triang. $ACd = CHG$ ideoque et $CH = AC = a$, et $GH = Ad = b$.

§. 301.

Producatur ordinata MPN utrinque, donec asymptotas secet in m et n ; erunt rectangula $Mm . Nm$, $Mm . Mn$, $Nn . Nm$, $Nn . Mn$ quadrato ipsius AD , et omnia quoque inter se equalia. Producta enim ordinata $MPN = 2y$ utrinque, donec asymptotas secet in m et n , erit Pm

$$= Pn = \frac{bx}{a} \quad (\S. 298.) \quad \text{ideoque ob tr. } CPm = \text{tr. } CPn,$$

$$Cm = Cn = r\left(xx + \frac{bbxx}{aa}\right) = r\left(\frac{aaxx + bbxx}{aa}\right)$$

$$= \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a + a = FM +$$

$$AC = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a - a = GM - AC. \quad \text{Tum}$$

$$\text{vero erit } Mm = Nn = \frac{bx}{a} - y = \frac{bx+ay}{a}. \quad \text{Unde}$$

$$\text{fit } Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa}. \quad \text{Sed } aayy =$$

$$bbxx - aabb. \quad \text{Ergo } Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn =$$

$$\frac{bbxx - bbxx + aabb}{aa} = \frac{aabb}{aa} = bb = AD^2. \quad \text{Erit er-}$$

$$\text{go ubique } Mm \cdot Nm = Mm \cdot Mn = Nn \cdot Nm = Nn \cdot Mn = bb = AD^2.$$

§. 302.

Si ex hyperbolæ puncto quovis M ducatur recta Mr ad ejusdem rami in quo punctum M sumitur asymptotam CI alteri asymptotæ Ci parallela, itidemque ex vertice A eidem asymptotæ Ci parallela AE, donec priori asymptotæ in E occurrat; erunt rectangula ex ejusmodi parallelis in portiones asymptotæ inter centrum C et parallelas istas interceptas inter se equalia; sive Mr . Cr = AE . CE. Ducatur ex M asymptotæ Ci parallela Mr, et erit (Nm + Nn) : Cn = Mm :

$$\text{Mr five } \left(\frac{bx+ay}{a} + \frac{bx-ay}{a} \right) : \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} =$$

$$\frac{bx-ay}{a} : \text{Mr id est } \frac{2bx}{a} : \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{bx-ay}{a} :$$

$$\text{Mr. Hinc Mr} = \frac{bxx\sqrt{(aa+bb)} - ayx\sqrt{(aa+bb)}}{aa} :$$

$$\frac{2bx}{a} = \frac{abxx\sqrt{(aa+bb)} - aayx\sqrt{(aa+bb)}}{2aax}$$

$$= \frac{bx\sqrt{(aa+bb)} - ay\sqrt{(aa+bb)}}{2ba} = \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$$

Deinde

Deinde quoque $mn : Cm = mM : mr$ sive $\frac{2bx}{a}$;

$$\frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} = \frac{bx-ay}{a} : mr ; \text{ ideo quoque } mr$$

$$= \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} = Mr ; Cr \text{ vero}$$

$$= Cm - mr = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - \frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$$

$$= \frac{2bx\sqrt{(aa+bb)} - (bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} . \text{ Porro}$$

$$Mm : Mn = mr : Cr, \text{ feu } \frac{bx-ay}{a} : \frac{bx+ay}{a} =$$

$$\frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} : Cr . \text{ Hinc } Cr =$$

$$\frac{(bx+ay)(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2aab} : \frac{bx-ay}{a} =$$

$$\frac{a(bx+ay)(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2aab(bx-ay)} = \frac{(bx+ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$$

$$= Cm - mr . \text{ Hinc concluditur } Mr . Cr =$$

$$\frac{(bx-ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab} \cdot \frac{(bx+ay)\sqrt{(aa+bb)}}{2ab}$$

$$= \frac{(bbxx - aayy)(aa+bb)}{4aabb} = \frac{(aa+bb)}{4} \text{ (ob } aayy$$

$$= bbxx - aabb) . \text{ Ducta jam ex vertice A asymptotæ Ci}$$

parallela AE, erit DA : Dd = DE : DC. Ergo ob DA = $\frac{1}{2}$ Dd, erit DE = $\frac{1}{2}$ DC = EC. Porro DE : EA = DC : Cd. Ergo ob DE = Cd, erit DE = EA = EC = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)}$, ideoque AE . CE = $\frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(aa+bb)} = \frac{1}{4}(aa+bb) = Mr . Cr .$

§. 303.

Quodsi ergo abscissae $CP = x$, in una asymptota a_{F.2} centro sumantur, et adplicatae $PM = y$ alteri asymptotæ parallelæ statuantur, erit $yx = \frac{aa + bb}{4}$, existente $AC = BC = a$, et $AD = Ad = b$. Seu si ponatur $AE = CE = b$, erit $yx = AE \cdot CE = bb$ et $y = \frac{bb}{x}$. Ducta igitur per punctum M recta MF asymptotæ Ci parallela, quæ occurreret alteri asymptotæ CR in puncto quodam F , erit parallelogrammum $CMPF$ *hyperbolæ inscriptum*, quod etiam *potentia hyperbolæ* vocatur, ubique constantis magnitudinis. Nam latera duorum quorumvis horum parallelogrammorum æquales comprehendunt angulos, et præterea in reciproca sunt proportionione. Magnitudo cujusvis absoluta habetur, multiplicando productum laterum per sinum anguli asymptotici. Sic erit $CPMF = CP \cdot PM \cdot \sin RCI$. Agatur jam per punctum curvæ M recta quæcunque $QMNR$, quæ parallela sit ductæ pro lubitu rectæ GH , ac ponatur $CQ = t$ et $QM = u$; erit $GH : CH = u : PQ$, ideoque $PQ = \frac{CH}{GH} u$. Porro $CH : CG = PQ : PM$, ideoque $CH : CG = \frac{CH}{GH} u$. PM et $PM = \frac{CG \cdot CH \cdot u}{CH \cdot GH} = \frac{CG}{GH} u$, unde $y = \frac{CG}{GH} u$ et $x = t - PQ = t - \frac{CH}{GH} u$; quibus valoribus substitutis erit $\frac{CG}{GH} u \cdot (t - \frac{CH}{GH} u) = bb$, sive $\frac{t \cdot CG \cdot u}{GH} - \frac{CG \cdot CH}{GH^2} uu = bb$ et $\frac{CG}{GH} tu - \frac{GH \cdot CH}{GH^2} uu - bb = 0$

$$\text{five } \frac{CG \cdot CH}{GH^2} uu - \frac{CG}{GH} tu + bb = 0$$

$$uu - \left(\frac{CG \cdot tu}{GH} : \frac{CG \cdot CH}{GH^2} \right) + bb : \frac{CG \cdot CG}{GH^2} = 0$$

$$uu - \frac{GH^2 \cdot CG}{GH \cdot CG \cdot CH} tu + \frac{GH^2}{CG \cdot CH} bb = 0$$

$$uu - \frac{GH}{CH} tu + \frac{GH^2}{CG \cdot CH} bb = 0.$$

Habebit ergo adplicata u duplicem valorem, nempe

$$QM \text{ et } QN, \text{ quarum summa erit } = \frac{GH}{CH} t = QR, \text{ et}$$

$$\text{rectangulum } QM \cdot QN \text{ erit } = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} bb.$$

§. 304.

Cum igitur sit $QM + QN = QR$, erit $QM = RN$, et $QN = RM$, quare si puncta M et N conveniant, quo casu recta QR curvam tangit, tum ea in ipso puncto contactus bisecabitur. Scilicet si recta XY tangat hyperbolam, punctum contactus Z in medio rectae XY erit positum. Unde, si ex Z alteri asymptotae parallela ducatur ZV , erit $CV = VY$, hincque ad quodvis hyperbolae punctum Z expedite tangens ducetur. Si enim ex dato puncto Z ducatur ZV alteri asymptotae parallela et capiatur $VY = CV$; recta per Y et curvae punctum Z ducta, hyperbolam in hoc puncto Z tanget. Cum

$$\text{ergo sit } CV \cdot ZV = bb = \frac{aa + bb}{4}, \text{ erit } CX \cdot CY =$$

$$2CV \cdot 2ZV = 4CV \cdot ZV = \frac{4(aa + bb)}{4} = aa + bb = CD$$

$= CD \cdot Cd$. Quocirca, si rectae DX et dY ducerentur, ea inter se forent parallelae (quia $CX : CD = Cd : CY$) Unde facillimus oritur modus quocunque curvae tangentes ducendi.

§. 305.

Quoniam deinde est rectangulum $QM \cdot QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} bb$, patet, ubicunque recta QR ipsi GH parallela ducatur, fore semper rectangulum $QM \cdot QN$ constantis magnitudinis. Erit ergo etiam $QM \cdot QN =$

$$QM \cdot MR = QN \cdot NR = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} bb. \quad \text{Quodsi ergo}$$

concipiatur ducta tangens ipsi QR parallela, quia ea intra asymptotas in puncto contactus bisecabitur, et tangens semissis vocetur $= q$; erit semper $QM \cdot QN = QM \cdot MR = RN \cdot RM = RN \cdot NQ = qq$, quæ est proprietas hyperbolarum intra asymptotas relatarum maxime notatu digna.

§. 306.

Quoniam hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppositis IAi et KBk constat, istae proprietates non solum ad eas rectas intra asymptotas ductas pertinent, quæ eandem curvæ partem in duabus punctis interfecant; sed etiam ad eas, quæ ad partes oppositas pertingunt. Ducatur enim per punctum M recta $Mqrn$ ad partem oppositam, eique ducatur parallela Gh . Sit $Cq = t$, et $qM = u$, erit ob triangula CGh et PMq similia Gh :

$$CG = qM : PM, \text{ ideo } y = \frac{CG}{Gh} u. \quad \text{Porro } qP = x - t,$$

$$\text{et } CG : Ch = y : qP, \text{ proinde } qP = \frac{Ch \cdot CG \cdot u}{Gh \cdot CG} = \frac{Ch}{Gh} u.$$

$$\text{Unde concluditur } x = Cq + qP = t + \frac{Ch}{Gh} u. \quad \text{Cum}$$

$$\text{autem fit } yx = bb, \text{ erit } \frac{CG}{Gh} ut + \frac{CG \cdot Ch}{Gh^2} uu = bb,$$

$$\text{vel } \frac{CG \cdot Ch}{Gh^2} uu + \frac{CG}{Gh} ut - bb = 0, \text{ vel quoque } uu$$

$+ \frac{Gb}{Cb}$ ut $- \frac{Gb^2}{CG \cdot Cb} = 0$. Applicata igitur u dupli-

cem habet valorem qM et $-qn$, atque harum binarum

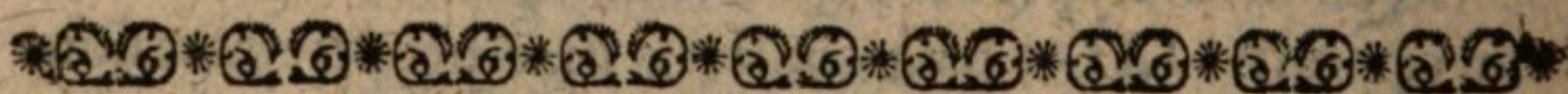
radicum summa $qM - qn$ erit $= - \frac{Gb}{Cb} = -qr$, ideo-

que $qn - qM = qr$; unde concluditur $qM = qn - qr$
 $= rn$, et $qn = qM + qr = rM$. Praeterea est produ-

ctum binarum radicum $- qM \cdot qn = - \frac{Gb^2}{CG \cdot Cb} bb$, seu

$qM \cdot qn = qM \cdot rM = rn \cdot qn = rn \cdot rM = \frac{Gb^2}{CG \cdot Cb} bb$.

Quare hæc rectangula, quotcunque rectæ Mn ipsi Gb parallelæ ducantur, perpetuo ejusdem erunt magnitudinis.



SECTIO XX.

DE

INTEGRATIONE DIFFERENTIALIVM VNIVS VARIABILIS ALGEBRAICARVM IN- COMPLEXARVM ET VSV SERIERVM IN CALCULI INTEGRALI.

§. 307.

Ex data ultima ratione differentiarum evanescentium duarum quantitatum variabilium, quarum una ab altera pendet, invenire æquationem mutua earum variabilium a se invicem dependentiam exprimentem, est *integrare* eam functionem, quæ ultimam differentiarum rationem exprimit. Si ipsæ variabiles litteris x et y sint denotatæ, ultima

ultima ratio differentiarum Δy et Δx eam habet formam

$\frac{dy}{dx} = P$ existente P functione vel unius variabilis x vel

duarum variabilium x et y . Priori casu æquatio diffe-

rentialis $\frac{dy}{dx} = P$ vocari posset *explicita*, posteriori *im-*

plicita. Integratio æquationum differentialium explici-

tarum primo explicanda est: de implicitis, quæ vulgo

simpliciter *æquationes differentiales* vocantur, postea ser-

mo erit. Quodsi vero data sit æquatio differentialis ex-

plicita formæ $\frac{dy}{dx} = P$, existente P functione solius va-

riabilis x ; semper dabitur æquatio quædam formæ $y =$

X , existente X functione unius variabilis x , ex qua per

differentiationem prior æquatio $\frac{dy}{dx} = P$ elicitur, at-

que tum ipsa æquatio $y = X$ ista est, quæ per calculum

integrale quæritur. Quia æquatio $\frac{dy}{dx} = P$ vulgo sic

scribi $dy = Pdx$ ac Pdx ipsius X differentiale vocari so-

let; vicissim quoque functio X , ex qua Pdx per diffe-

rentiationem oritur, ipsius Pdx integrale dicitur. At-

que tum phrasis: *integrare differentiale propositum*, sic

explicatur: dati differentialis integrale invenire. An-

gli, qui differentialia fluxiones nominant, integralia

vocant quantitates fluentes; eorumque loquendi more

datæ fluxionis fluentem invenire idem est, ac dati diffe-

rentialis integrale quaerere.

§. 308.

Uti differentialia caractere d designantur, ita ad

integralia indicanda littera $\int$ recepta est, quæ ergo dif-

ferentialibus præfixa eas notabit quantitates, quarum

sunt differentialia. Sic existente $y = X$, atque $dy =$

Pdx ;

Pdx ; si scribatur $\int dy = \int Pdx$, hoc idem erit ac $y = X$, quia $\int dy = y$ et $\int Pdx = X$. Quemadmodum autem signum differentiationis d solam quantitatem immediate sequentem afficit, nisi puncto interposito ejus vis ad totam expressionem sequentem extendatur; ita $\int$ contrario signum integrationis $\int$ semper totam expressionem, cui præfixum est, complectitur. Ita $\int xdx (aa - xx)^n$ denotat eam functionem, cujus differentiale est $xdx (aa - xx)^n$. Quodsi itaque velimus productum duorum integralium scilicet $\int Pdx$ atque $\int Qdx$ exprimere, id hoc modo $\int Pdx \int Qdx$ perperam fiet, intelligeretur enim integrale quantitatis Pdx/Qdx . Hanc ob causam ista ambiguitas iterum puncto interposito tolli solet, idque productum sic exprimi $\int Pdx \cdot \int Qdx$. Proposita jam formula differentiali $dy = Pdx$, cum P debeat esse functio ipsius x , potest eadem esse vel algebraica, vel transcendens. Sed posterior casus huc nondum spectat. Supponimus in hac tractatione, P esse functionem unius variabilis x algebraicam, atque sub hac hypothese quaerimus ipsius Pdx integrale.

§. 309.

Functio algebraica incomplexa unius variabilis x est productum ex quantitate constante in potestatem quandam variabilis x exponentis cujuscunque vel integri vel fracti, positivi vel negativi. Reliquæ functiones *complexæ* vocantur. Integratio differentialium algebraicarum unius variabilis x incomplexarum nulla prorsus laborat difficultate. Dico enim si sit $dy = ax^n dx$; fore

$$y = \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}. \quad \text{Id est, integrale differentia-$$

lis algebraici unius variabilis incomplexi cujuscunque invenitur dividendo per dx augendo exponentem variabilis unitate, atque quod prodit, per hunc exponentem unitate auctum diviso. Atque hæc est regula fundamentalis totius calculi integralis differentialium unius variabilis algebraicarum. Demonstratio hujus regulæ in promptu est. Habemus

bemus enim per præcedentia $d. \frac{ax^{n+1}}{n+1} = ax^n dx$, pro-

inde $\frac{ax^{n+1}}{n+1} = \int ax^n dx$. Pro n vero substitui potest

numerus quicunque integer vel fractus, positivus vel negativus. Parum igitur difficultatis habet integratio, si differentiale propositum sequentem habeat formam $(ax^e + bx^k + cx^m + fx^n + \text{etc.}) dx$, vel $ax^e dx + bx^k dx + cx^m dx + fx^n dx + \text{etc.}$ Est enim hujusfor-

mulæ integrale $\frac{ax^{e+1}}{e+1} + \frac{bx^{k+1}}{k+1} + \frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{fx^{n+1}}{n+1} + \text{etc.}$ quoscunque numeros denotent litterae

e, k, m, n , etc. positivos vel negativos, integros, vel fractos, Quodsi ejusmodi formula differentialis divisa fuerit per constantem cujuscunque formæ, quæ sit $= g$, v. g. si proponatur formula $\frac{ax^e + bx^k + cx^m + fx^n + \text{etc.}}{g}$

iterum tantum opus est, ut quælibet partium seorsim integretur. Quia enim hæc formula eadem est cum

sequente $\frac{a}{g} x^e + \frac{b}{g} x^k + \frac{c}{g} x^m + \frac{f}{g} x^n + \text{etc.}$ erit

ipsius integrale $= \frac{ax^{e+1}}{g(e+1)} + \frac{bx^{k+1}}{g(k+1)} + \frac{cx^{m+1}}{g(m+1)} + \frac{fx^{n+1}}{g(n+1)} + \text{etc.}$ Demonstratione alia non opus est,

nisi quod facta differentiatione integralis inventi iterum habeatur differentiale propositum.

§. 310.

Quando erit y functio ipsius x , atque hujus functionis differentiale est Pdx , existente P pariter functione ipsius x , etiam functionis $y + C$, denotante C quantitatem

titatem constantem quamcunque, differentiale est Pdx . Proinde si differentiale hujus formae Pdx proponatur, ejus integrale erit $y + C$, quae constans esse potest quaecunque, quin et 0 æquata. Integratione igitur peracta ad integrale inventum addenda est quantitas constans, quae ex conditionibus problematis propositi, quod calculi integralis ope solvimus, determinanda est. Ex natura enim functionum constat, quod determinato valore variabilis x , functio hujus variabilis $y + C$ vel unum vel saltem aliquos obtineat valores constantes. Plerumque ex conditionibus problematis propositi cognosci potest quantitas constans b , cui integrale quæsitum æquale est, quando variabilis x determinatum quendam habet valorem a . Quodsi hoc accadat, in integrali invento $y + C$ pro x substitui debet ista constans a , cui secundum problema propositum respondet valor integralis $y + C = b$, ex qua æquatione constans C determinatur. Sit enim valor, quem functio y induit $= A$, si in eadem loco x scribatur a , erit ex hypothese $A + C = b$, proinde $C = b - A$. Quando vero ex conditionibus problematis non innotescit valor integralis, quem habet, si pro x constans a pariter ex conditionibus problematis eruenda substituatur; constans C manet indeterminata.

Sic invenitur $\int \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}}$. Atque proinde, si fuerit $z = aax + bxx$, ut sit $dz = aadx + 2bxdx$, habetur $\int \frac{1}{2} (aadx + 2bxdx) \times (aax + bxx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (aax + bxx)^{\frac{3}{2}}$. Huic integrali addenda est constans indeterminata C , ita ut integrale completum sit $\frac{1}{3} (aax + bxx)^{\frac{3}{2}} + C$. Ponamus ex conditionibus problematis propositi innotescere, quod integrale induat valorem g , si x habeat valorem f , erit ex his $\frac{1}{3} (aaf + bff)^{\frac{3}{2}} + C = g$, ex qua æquatione concludimus $C = g - \frac{1}{3} (aaf + bff)^{\frac{3}{2}}$, proinde sub hac hypothese est $\int \frac{1}{2} (aadx + 2bxdx) \times (aax + bxx)^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{3}(aax + bxx)^{\frac{3}{2}} + g - \frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}}$. Quando secundum problematis conditiones valori $x = f$, respondet valor integralis $= 0$, fit $\frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}} + C = 0$, proinde est constans addenda $C = -\frac{1}{3}(aaf + bff)^{\frac{3}{2}}$. Quodsi vero secundum problematis conditiones valori $x = 0$ respondeat valor integralis $= g$, erit $C = g$. Si denique valori $x = 0$ respondeat valor integralis $= 0$ erit in hoc casu et sub hac hypothese constans $C = 0$.

§. 311.

Cum formulæ differentiales unius variabilis, quarum integralia hic quærimus, sequentem habeant formam $dy = Pdx$, existente P functione ipsius x algebraica; atque si hæc functio P sit rationalis integra, vel quoque per modum rationalis integræ expressa, integratio nulla laboret difficultate: omne negotium eo redit, ut functionum integrarum irrationalium, pariter ac functionum fractarum, tam rationalium, quam irrationalium integralia inveniendi methodos explicemus universales. Omnis functio rationalis integra unius variabilis z sequentem habere potest formam $a + bz + cz^2 + ez^3 + fz^4 + \text{etc}$, quæ etiam, quando est $z = x^n$ sic exprimi potest $a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} + \text{etc}$. Atque si ea denuo per x^r multiplicetur, forma ipsius generalissima hæc erit $ax^r + bx^{r+n} + cx^{r+2n} + ex^{r+3n} + fx^{r+4n} + \text{etc}$. Denotante igitur p numero fracto quocunque positivo, erit $(ax^r + bx^{r+n} + cx^{r+2n} + ex^{r+3n} + fx^{r+4n} + \text{etc})^p$ vel $ax^m (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n} + \text{etc})^p$ forma functionis integræ irrationalis generalissima, scripto m loco rp et g denotante constantem quancunque. Omnis igitur functio, quæ constat ex factore irrationali in integrum rationalem factorem multiplicato, multiplicatione actu instituta in partes hujus formæ resolvetur. Quando p simul denotare ponitur numerum fractum negativum quemcunque, sub eadem forma quoque com-

pre-

prehenduntur functiones fractæ irrationales, ita ut omnes functiones irrationales fractæ numeratorem habentes integrum in partes hujus formæ resolvi queant. Quin posito p numero integro negativo, omnes quoque functiones fractæ rationales, quarum denominatores sunt potestates exponentis integri cujuscunque, in partes hujus formæ facile resolvuntur. Formulæ igitur differen-

tialis, quæ sequitur $\frac{dy}{dx} = (ax^q + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t + \text{etc.}) (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \text{etc.})^p$, vel $dy = (ax^q + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t + \text{etc.}) dx (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \text{etc.})^p$ integrale per partes habetur, multiplicatione ante actu instituta, dummodo hujus formulæ $g x^m dx (a + bx^n + cx^{2n} + \text{etc.})^p$ integrale in potestate fit.

§. 312.

Variæ ad hujus formulæ integrale inveniendum excogitatae sunt methodi, quarum una eaque maxime generalis ea est, qua functio, quæ est sub vinculo exponentis p , convertitur in seriem secundum §. 250. 253, et series inventa per factorem extra vinculum multiplicatur. Hoc enim facto habebitur series, cujus singuli termini sunt differentialia incomplexa formæ $ax^m dx$; ideo integra series per partes integrabitur secundum præcepta §. 309. Quando p est numerus integer positivus, hæc methodus merito commendanda est, quia tum ipsa series, in quam functio sub vinculo exponentis resolvitur, finita est, atque proinde quoque integrale, quod hac methodo quæritur, serie finita invenietur expressum. Sic si quærendum sit integrale formulæ $dx (a + bx)^2$, erit $(a + bx)^2 = aa + 2abx + bbxx$, et ideo $\int dx (a + bx)^2 =$

$$\int (aadx + 2abxdx + bbxxdx) = aax + abxx + \frac{bb}{3} x^3.$$

Quando autem numerus p est integer negativus vel fractus quicunque, series, in quam functio convertitur, excurrit

in infinitum. Proinde integrale completum hac methodo inveniri nequit, sed tantum per approximationem. Hac itaque methodo utendum non est, si alia via perveniri potest ad seriem, quæsitum integrale terminis finitis exprimentem. Ipsae vero methodi, quibus id præstari potest, hic nondum explicari possunt; sed peculiaris tractatio huic negotio est reservanda.

§. 313.

Rectificare curvam est assignare rationem arcus F. 278. curvæ propositæ ad rectam aliquam pro unitate sumtam. Si data sit curva Mm ad axem Ap et initium abscissarum A relata, cujus natura exprimitur æquatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$; generalis methodus inveniendi longitudinem arcus CM inter duo data puncta C et M intercepti sequentibus nititur ratiociniis. A datis punctis C et M ad axem curvæ cadant adplicatae normales CB et MP , erit arcus CM functio abscissæ $AP = x$, quia magnitudo hujus arcus a magnitudine ipsius x pendet. Sit itaque arcus $CM = u$, existente u functione ipsius x . Crescat AP incremento $Pp = \Delta x$, atque arcus CM crescat incremento $Mm = \Delta u$, tumque simul $PM = y$ incremento $Rm = \Delta y$, quod incrementum habetur ducta MR axi parallela. Erunt vero Δu et Δy functiones ipsius Δx , si x et y nunc maneant constantes. Cognito itaque limite rationis $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, ita ut

fit $\frac{du}{dx} = X$, existente X functione ipsius x , habebitur arcus $u = \int X dx$ per calculum integralem. Sed ultima ratio $\frac{du}{dx}$ invenitur sic ratiocinando. Ducta recta Mm ,

quæ est chorda arcus curvæ Mm , erit recta $Mm = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$ functio ipsius Δx . Decrescente jam Pp sive Δx manentibus $AP = x$ et $PM = y$ constantibus, cum hac

variabili Δx ejus functiones Δu , Δy , $r(\Delta x^2 + \Delta y^2)$, simul decrefcunt; atque variabili Δx evanefcente ejus functiones Δu , Δy , $r(\Delta x^2 + \Delta y^2)$, simul evanefcunt. Ratio vero, quacum variables Δu et chorda $r(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ evanefcunt, eft ratio æqualitatis, ita ut fit $\frac{du}{r(dx^2 + dy^2)}$

$$= 1, \text{ vel } \frac{du}{dx r(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = 1, \text{ et } \frac{du}{dx} = r(1 + \frac{dy^2}{dx^2}). \text{ At-}$$

que haec eft ultima ratio quæfita, quia eft $\frac{dy^2}{dx^2}$ functio variabilis x , ex æquatione pro curva data per calculum differenrialem quærenda. Eft itaque generaliter $du = \int dx r(1 + \frac{dy^2}{dx^2}) + C$, feu uti vulgo fcribi folet $du = \int r(dx^2 + dy^2) + C$.

§. 314.

Æ. 279. Sit curva AMB circulus, cujus diameter eft AB, et diametro AB in centro C perpendicularis fit CD, datur punctum M et quaeritur arcus DM. Quodfi ex puncto M ad diametrum AB cadat perpendicularis MP, fitque $CP = x$, $PM = y$, $CM = a$, erit æquatio pro circulo

$$yy = aa - xx. \text{ Proinde } 2y \frac{dy}{dx} = -2x, \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{x}{r(aa - xx)}, \text{ atque } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{xx}{aa - xx}, 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{xx}{aa - xx} = \frac{aa - xx + xx}{aa - xx} = \frac{aa}{aa - xx}. \text{ Si ita-}$$

$$\text{que DM fit } = u, \text{ erit } \frac{du}{dx} = \frac{a}{r(aa - xx)}, \text{ vel } du =$$

$$\frac{adx}{r(aa - xx)}, \text{ et } u = \int \frac{adx}{r(aa - xx)}. \text{ Absciffa CP}$$

eft

est $= MN = \text{sinui arcus } MD = u$. Proinde formula du

$$= \frac{adx}{r(aa - xx)}$$

exprimit differentiale arcus circularis

cujus sinus x est datus. Praeterea est $PM = r(aa - xx)$

$= \text{cosinui arcus } DM$. Ideo *differentiale arcus, cujus si-*

nus proponitur, aequale est producto ex radio in differentia-

le sinus per cosinum divisum. Arcus, cujus sinus est x , in

posterum sic exprimetur, $A \sin. x$. Atque pari ratione

arcus, cujus cosinus est x , ita potest exprimi $A \cos. x$.

Arcus etiam, cujus tangens, vel cotangens, vel secans,

vel cosecans, vel sinus versus est x , signis analyticis sic

exprimetur, $A \tan. x$, vel $A \cot. x$, vel $A \sec. x$, vel

$A \csc. x$, vel $A \text{sv. } x$, quæ expressiones omnes erunt

functiones ipsius x transcendentes. (§. 68.) Si itaque

fit $u = A \sin. x$, atque radius, quo arcus iste descriptus

est, sit a , erit $du = \frac{adx}{r(aa - xx)}$.

§. 315.

Quodsi jam fit $u = A \cos. x$, erit ejusdem arcus sinus

$= r(aa - xx)$, et proinde $y = A \sin r(aa - xx)$. Sit

$r(aa - xx) = p$, erit $y = A \sin p$, atque $du = \frac{adp}{r(aa - pp)}$.

Praeterea $dp = \frac{-x dx}{r(aa - xx)}$, et $r(aa - pp) = x$; ex

quibus habetur $du = \frac{-adx}{r(aa - xx)}$. Unde regula:

Differentiale arcus, cujus cosinus proponitur aequale est pro-

ducto radii in differentiale cosinus negative sumtum per si-

num divisum.

Si fuerit $u = A \tan. x$, erit sinus illius arcus, cu-

jus tangens proponitur $= \frac{ax}{r(aa + xx)}$, et cosinus $=$

$\frac{aa}{r(aa + xx)}$.

$\frac{aa}{r(aa+xx)}$ proinde $y = A \sin \frac{ax}{r(aa+xx)}$. Sit

$\frac{ax}{r(aa+xx)} = p$, erit $u = A \sin p$, $r(aa-pp) =$

$\frac{aa}{r(aa+xx)}$, et $du = \frac{adp}{r(aa-pp)}$. Præterea est

$dp = \frac{a^3 dx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, et proinde $du = \frac{a^4 dx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$:

$\frac{aa}{r(aa+xx)} = \frac{aadx}{(aa+xx)}$. Ideo differentiale arcus, cujus tangens proponitur, æquale est facto ex quadrato radii in differentiale tangentis per quadratum secantis divisum.

Simili modo, si proponatur arcus, cujus cotangens est datus, ut sit $u = A \cot x$, quia ejusdem arcus tan-

gens est $\frac{aa}{x}$, posito $\frac{aa}{x} = p$, erit $u = A \tan p$, et

$du = \frac{aadp}{aa+pp}$. Sed $dp = \frac{-aadx}{xx}$, quo substituto ha-

betur $du = \frac{-a^4 dx}{aaxx+a^4} = \frac{-aadx}{aa+xx}$, quod est produ-

ctum ex quadrato radii in differentiale cotangentis negative sumtum per quadratum cosecantis divisum.

Porro si proponatur $u = A \sec x$, quia est $u = A$

$\cos \frac{aa}{x}$, fiet $du = \frac{aadx}{xr(xx-aa)}$. Atque si sit $u =$

$A \csc x$; erit $u = A \sin \frac{aa}{x}$, ideoque $du =$

$\frac{-aadx}{xr(xx-aa)}$. Si denique fuerit $u = A \sqrt{x}$, quia est u

$= A \cos(a-x)$ ejusdemque arcus sinus est $r(2ax-xx)$,

fiet $du = \frac{adx}{r(2ax-xx)}$. Quan-

Quamquam igitur arcus u , ejus sinus vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel sinus versus datur, est functio transcendens; tamen

ejus differentiale, seu potius ultima ratio $\frac{du}{dx}$ est functio algebraica. Ac propterea quoque, si capiantur differentialia secunda et altiora, erunt $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$,

$\frac{d^4u}{dx^4}$, etc, functiones algebraicae.

§. 316.

Rectificabitur itaque arcus circuli uniuscujusque formularum differentialium inventarum ope ac eum in finem quamcunque eligere licet. Eligi solet plerumque differentiale arcus per tangentem dati. Sit itaque arcus DM tertia pars quadrantis, ejusque tangens DT = x , quærenda est longitudo arcus DM. Erit DM =

$\int \frac{aadx}{aa+xx}$. Integrale hoc non habetur, nisi serierum

ope. Erit vero $\frac{aadx}{aa+xx} = dx - \frac{xxdx}{aa} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \frac{x^{10}dx}{a^{10}} + \text{etc.}$ Proinde

$\int \frac{aadx}{aa+xx} = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \frac{x^{11}}{11a^{10}} + \text{etc.} = \text{DM.}$ Posito itaque $a=1$, erit MN = $\frac{1}{2}$, CN = $r\frac{3}{4} = \frac{1}{2}r_3$, et CN : NM = CD : DT, id est $\frac{1}{2}r_3 :$

$\frac{1}{2} = 1 : x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}r_3} = \frac{1}{r_3} = r\frac{1}{3}$. Arcus itaque DM

= $r\frac{1}{3} (1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{675} + \frac{1}{1575} - \text{etc})$, cujus sextuplum dabit semiperipheriam = $2r_3 \times (1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} -$

$\frac{1}{675} + \frac{1}{1575} - \text{etc})$, vel $r^{12} \times (1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3 \times 3 \times 5} -$

$$\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 7} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 9} - \text{etc, cui seriei}$$
 superstruitur sequens calculus, in cujus columna A continetur primo $r_{12} = 3.4641$ etc; deinde quotiens oriundus ex illius divisione per 3, nec non ille, qui prodit ex quotientis inventi nova divisione per 3, et sic continuo. In columna B describuntur ex divisione præcedentium per numeros impares juxta loca alterna inventi quotientes, qui absolvunt partem seriei positivam. In columna C vero ponuntur similes quotientes ex reliquis columnae A terminis impares adscriptos divis geniti, et constituunt partem seriei negativam

A	B	C
1 3. 464101615138(	3. 464101615138(= r_{12}	0. 384900179460
3 1. 154700538379	76980035892(	18328579974
5 384900179460(	4751854072(	1295960200
7 123800059820	365527236(	105596757
9 42766686607(	31057870(	9262873
11 14255562202	2793565(	850215
13 4751254067(	260733(	80473
15 1583951356	24974(	7788
17 527983785(	+ 2438(	766
19 175994595	242(	76
21 58664865(	24(	8
23 19554955	2(	1
25 6518318(		
27 2172773		
29 724258(		
31 241419		
33 80473(		
35 26824		
37 8941(		
39 2980		
41 993(		
43 331		
45 110(		
47 37		

$$+ 3.546233172181 \quad 0.404640518591$$

$$- 0.404640518591$$

$$+ 3.141592653590$$

Hoc

Hoc modo ulterius evolvendo r_{12} invenitur, si radius sit 1, fore semiperipheriam, atque si diameter sit 1, fore peripheriam integram 3. 1415 9265 3589 7932 3846 2643 3832 7950 2884 1971 6936 9375 1058 2097 4944 5923 0751 6405 etc.

§. 317.

Data vero hac ratione radii ad semiperipheriam simul datur longitudo arcus cujuscunque z , cujus ratio ad semiperipheriam π datur, seu quod idem est, qui per gradus et minuta exprimitur, quocunque descriptus sit radio $= r$. Habetur enim longitudo arcus, qui ad semiperipheriam habet rationem datam pro radio $= 1$ inferendo $\pi : z$, id est 180° ad numerum graduum et minu-

torum quem z continet, $= 3. 141$ etc : $\frac{z \times 3. 141 \text{ etc}}{\pi}$,

qui numerus sit $= N$; erit præterea $1 : r = N : N \times r =$ longitudini arcus quæsitæ (§ 225. *Geom. Elem.*). Cæterum id notari meretur, quod series inventa arcum DM ex sua tangente exprimens ea gaudeat proprietate, ut quilibet terminus consequens longe minor sit antecedente. Atque hæc causa est, quod priores termini valorem arcus quæsitæ satis præbeant exactum, cum termini neglecti valde sint parvi. Vocantur ejusmodi *series convergentes*: ii vero, quorum termini consequentes excedunt antecedentes, dici solent *series divergentes*. Quia ultimarum summa nunquam veræ proxima inveniri potest, in negotio rectificationum, et huic similibus, quando numerus quæsitus per seriem finitam exhiberi nequit, series divergentes vitandæ sunt. Tum enim eo majoris usus est series, quo magis termini ipsius convergunt. Hoc itaque simul notari meretur in negotio quadraturarum mox explicando.

§. 318.

Angulum raro ingredi calculum algebraicum, supra §. 36. jam monitum fuit. Ejus loco plerumque ra-

tio finus, vel cosinus, vel tangentis, vel cotangentis, vel hujus generis rectae cujusvis ad radium data esse supponitur. Potest vero loco illius rationis quoque ratio arcus inter crura anguli dati radio quocunque descripti ad radium anguli loco adhiberi, quia et hac ratione data datus est angulus. Duo nimirum anguli W et w sunt in ratione composita ex directa arcuum $A : a$, et inversa radiorum $r : R$ (§. 220. Cor. VI. *Geom. Elem.*) ita ut sit $W :$

$$w = \frac{A}{R} : \frac{a}{r}. \quad \text{Data itaque ratione } \frac{A}{R} \text{ datur angu-}$$

lus W , ita ut poni possit $W = \frac{A}{R}$, et $w = \frac{a}{r}$, quæ

aequatio sic explicanda est. Radius $= 1$ inter crura anguli w describatur arcus a , erit $1 : r = a : a$ (§. 225. Cor.

Geom. Elem.) proinde $\frac{a}{r} = a$. Data igitur ratione $\frac{a}{r}$

datur longitudo arcus a inter anguli w crura radio $= 1$ descripti, et proinde ratio hujus arcus ad semiperipheriam, atque simul ratio anguli w ad duos angulos rectos. Numerus itaque graduum anguli w habetur inferendo 3,

$$14 \text{ etc} : a = 180^\circ : \frac{a \cdot 180^\circ}{314 \text{ etc.}} = \text{numero graduum, quem}$$

angulus w continet. Quia igitur $w = \frac{a}{r}$, arcus ex

angulo et radio sic exprimetur $a = wr$, et radius erit

$$r = \frac{a}{w}.$$

§. 319.

Quadrare figuram planam generatim est assignare rationem figuræ planæ propositæ ad quadratum aliquod pro unitate sumtum. *Quadrare lineam quandam curvam* idem est, ac quadrare figuram planam, quæ vel integra illa curva, si in se ipsam redeat, vel arcu illius cur-

væ

vae et lineis rectis positione datis terminatur. Si data F.278. fit curva AM ad axem Ap et initium abscissarum A relata, cujus natura exprimitur aequatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$; generalis methodus, inveniendi quadraturam areae BPMC arcu CM, applicatis PM, BC, et portione BP abscissae AP terminatae, sequentibus nititur ratiociniis.

§. 320.

Area BPMC est functio variabilis $AP = x$, quia ejus magnitudo pendet a valore ipsius x . Sit itaque haec area $= s$ erit s functio ipsius x , quae si x augeatur incremento $Pp = \Delta x$ pariter augetur incremento $PMmp$

$= \Delta s$. Cognito itaque limite rationis $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, five

$\frac{ds}{dx} = X$, ita ut sit X ipsius x functio, habetur area

$s = \int X dx$ per calculum integralem atque functione ip-

fius x expressa. Ultima vero ratio $\frac{ds}{dx}$ invenitur, sic

ratiocinando. Sumtis AP et PM pro constantibus, fiant $Pp = \Delta x$, ipsiusque Δx functio $Rm = \Delta y$ variables, erit area rectanguli $Mp = y \Delta x$ functio variabilis Δx , quae decrefcit decrefciente Δx , atque una cum Δx simul evanescit. Praeterea est area $PMmp$ pariter talis ipsius Δx functio, quae decrefcit decrefciente Δx et evanescit una cum Δx . Hinc decrefciente Δx , areae Mp et $PMmp$ simul decrefcunt. Decrefcentibus vero hoc modo ipsis Mp et $PMmp$ earum differentia MmR simul decrefcit, atque evanefcente Δx simul evanescit. Ideo ratio

$\frac{\Delta s}{y \Delta x}$ ad rationem aequalitatis continuo tendit, ita ut

evanefcente Δx fit ultima ratio $\frac{ds}{y dx} = 1$, et proinde ul-

tima ratio $\frac{ds}{dx} = y$; quæ ea est, quam quaerimus.

Variabilis y ex æquatione pro curva data habetur per x et constantes definita, qua igitur functione loco y substituta, erit $s = \int y dx + C$.

§. 321.

F.280. Ex æquatione inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro parabola AM , cujus vertex est A , latus transversum AS et parameter p , quæ erat $yy = px$ fuit $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. Proinde est area $APMQ = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$
 $= \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} xy$. Con-
 stans nulla adjicitur, quia posito $x = 0$, est $APMQ = 0$. Cum sit rectangulum $APMN = xy$, erit trilineum $AQMN = APMN - APMQ = xy - \frac{2}{3} xy = \frac{1}{3} xy$. Præ-
 terea est segmentum $AQM = APMQ - APM = \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} xy$. Adeo brevi via calculi integralis ope invenitur parabolæ quadratura ab Archimede jam inventa et satis prolixè demonstrata.

§. 322.

F.281. Circuli quadratura jam habetur, inventa ejus re-
 elificatione (§. 216.). Quæ cum tantum sit approxi-
 matoria; ipsa ejus quadratura inde pendens tantum ap-
 proximatoria erit. Neque etiam ope formulæ $\int y dx$ cir-
 culi quadratura invenitur exacta. Idem etiam de reli-
 quis conï sectionibus dicendum est. Sit curva BDA el-
 lipsis, cujus latus transversum est $BA = 2a$, semilatus
 conjugatum $DC = b$, centrum C ; erit æquatio pro cur-
 va inter coordinatas orthogonales $CP = x$, $PM = y$,

$$\text{ista } yy = \frac{bb}{aa} (aa - xx); \text{ hinc } y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)},$$

$$\text{area } CPMD = \int \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa - xx)}, \text{ quod integrale}$$

non

non habetur, nisi $\sqrt{aa - xx}$ convertatur in seriem.

Hoc autem facto fit $\int y dx = \int b dx - \frac{bx^2 dx}{2a^2} - \frac{bx^4 dx}{8a^4}$

$\frac{bx^6 dx}{16a^6} - \frac{5bx^8 dx}{12a^8}$ etc. $= bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} -$

$\frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ etc. Posito nunc $x = a$, series ab

$-\frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$ etc, exprimit aream quartae partis CAD ellipsis integræ, quæ itaque per 4 multiplicata dabit aream ellipsis integræ. Fit hæc multiplicatio, si loco a ubique $2a$ et $2b$ loco b scribatur. Est verò $2a = AB$ et $2b = 2DC$. Ideo ipsa series inventa exprimit aream ellipsis integræ, si a et b integros ellipsis axes denotent.

§. 323.

Posito $b = a$, æquatio $yy = aa - xx$ est pro circulo BNA, et proinde series $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa - \frac{1}{112}aa$ etc, exprimit aream quadrantis circuli, si a sit radius, integri vero circuli aream, si a sit diameter. Est itaque area ellipsis ad aream circuli, cujus radius semilateri ellipsis transverso æqualis est, ut $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab -$ etc, ad $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa -$ etc, id est ut ab ad aa , vel ut b ad a ideoque, ut axis conjugatus ad axem transversum. In eadem quoque ratione est area CPMD ad aream CPNF,

quia est $CPMD = bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4}$ etc, atque

$CPNF = ax - \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^4}$ etc, et proinde etiam

area PMA ad aream PNA. Ellipsis igitur quadratura pendet a circuli quadratura et vicissim. Cæterum sequentia ex his fluunt corollaria.

Ellipsis æqualis est circulo, cujus diameter est media proportionalis inter duos ellipsis axes principales. Si enim δ fuerit circuli diameter, axes ellipsis a et b , præterea $a :$

$\delta =$

$\mathcal{S} = \mathcal{S} : b$, erit $ab = \mathcal{S}\mathcal{S}$. Ideo area circuli $\mathcal{S}\mathcal{S} = \frac{1}{6}\mathcal{S}\mathcal{S} = \frac{1}{4}\frac{1}{6}\mathcal{S}\mathcal{S}$ etc. $= ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{4}\frac{1}{6}ab$ etc.

Ellipses sunt inter se in ratione composita ex rationibus axium transverforum et axium conjugatorum. Si enim axes unius sint a et b , alterius f et g ; erit area prioris $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{4}\frac{1}{6}ab$ etc, et posterioris $fg - \frac{1}{6}fg - \frac{1}{4}\frac{1}{6}fg$ etc, quae series sunt ut $ab : fg$.

Si radius circuli equalis sit semiaxi ellipsis conjugato; circulus est ad ellipsin ut axis minor ad majorem. Hoc permutando coordinatas x et y facili ostenditur negotio.

Si ex puncto quocunque H unius axis ellipseos, qui simul est diameter alicujus circuli ad puncta extrema M et N ordinatae communis PMN ducantur rectae HM , HN ; *area sectoris circuli ANH est ad arcum sectoris elliptici AMH, ut axis, quae est circuli diameter, quae sit a ad alterum axem ellipsis, quae sit b .* Est enim $APN : APM = a : b$, et $PHN : PHM = PN : PM = CF : CD = a : b$, quod ultimam sic patet. Est $PN^2 : CF^2 = AP \times BP : AC \times CB$ et $PM^2 : CD^2 = AP \times BP : AC \times CB$. Proinde $PN^2 : CF^2 = PM^2 : CD^2$, et $PN : CF = PM : CD$ vel $PN : PM = CF : CD$. Est itaque $APN + PHN : APM + PHM$, id est, $ANH : AMH = a : b$.

§. 324.

§.282. Aequatio pro hyperbola AM est $yy = \frac{bb}{aa} (-aa + xx)$,

quando $CA = a$, $CL = b\sqrt{-1}$, $CP = x$, $PM = y$. Permutentur coordinatae, et vocetur $CQ = x$, et $QM =$

y , atque æquatio ita mutabitur $xx = \frac{bb}{aa} (-aa + yy)$,

ex qua fit $xx = -bb + \frac{bbyy}{aa}$, $aaxx = -aabb + bbyy$,

$yy - aa = \frac{aaxx}{bb}$, $yy = +aa + \frac{aaxx}{bb}$, $yy = \frac{aa}{bb}$
($bb +$

$(bb + xx)$. Quodsi igitur jam vocetur $CA = b$, et $CL = a$; erit $yy = \frac{bb}{aa} (aa + xx)$ æquatio pro hyperbola inter coordinatas orthogonales abscissis in axe conjugato a centro computatis, ex qua fit $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa + xx)}$, et $ydx = \frac{b}{a} dx (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$, proinde area $CQMA = \int ydx = \int \frac{b}{a} dx (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$. Est vero $(aa + xx)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ etc, proinde $\frac{b}{a} dx (aa + xx)^{\frac{1}{2}} = bdx + \frac{bx^2 dx}{2a^2} - \frac{bx^4 dx}{8a^4} + \frac{bx^6 dx}{16a^6} - \frac{5bx^8 dx}{128a^8}$ etc, et $\int \frac{b}{a} dx (aa + xx)^{\frac{1}{2}} = CQMA = bx + \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8} +$ etc. Si circa idem centrum C descriptae sint duae hyperbolæ AM et AN , alteram diametrum CA communem habentes, et angulus conjugationis idem sit in utraque hyperbõla, ducatur vero a puncto in CL quovis ordinata QN hyperbolis occurrens in M et N ; si $CL = a$ et $CH = a$, erit $CQMA = \int \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa + xx)}$ et $CQNA = \int \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa + xx)}$, hincque $CQMA : CQNA = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(aa + xx)} : \frac{b}{a} \int dx \sqrt{(aa + xx)} = a : a$. Data igitur area $CQMA$ datur simul $CQNA$, atque si fuerit $CA = CL$, erit $CQMA : CQNA = \int dx \sqrt{(aa +$

$r(aa + xx) : \frac{b}{a} dx r(aa + xx) = 1 : \frac{b}{a} = a : b$, unde quadratura cujusvis hyperbolæ dependet a quadratura hyperbolæ æquilateræ.

§. 325.

F.283. Quodsi pro curva AM data sit æquatio inter coordinatas obliquangulas $AP = x$ et $PM = y$, existente angulo coordinationis $= a$; posito $AM = u$, limes rationis

$\frac{du}{dx}$ sic invenitur. Crescente AP versus p , et ducta

applicata pm , si per M transeat MR axi parallela secans applicatam pm in R; ex m ad MR cadat perpendicularis mQ . Erit igitur chorda $Mm = r(MQ^2 + mQ^2)$. Sed $MQ = MR + RQ$, $MR = \Delta x$, $RQ = \Delta y \cos a$, $mQ = \Delta y \sin a$. Proinde chorda $Mm = r(\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \cos a + \Delta y^2 \cos^2 a + \Delta y^2 \sin^2 a) = r(\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \cos a + \Delta y^2)$ posito radio $= 1$. Jam evanescente Pp evanescit arcus Mm cum chorda sua. Et quia hic quoque arcus et chorda continuo tendunt ad æqualitatem, eorum ratio ul-

tima est æqualitatis, ita ut sit $\frac{du}{r(dx^2 + 2dx dy \cos a + dy^2)}$
 $= 1$, vel $\frac{du}{dx r(1 + 2 \frac{dy}{dx} \cos a + \frac{dy^2}{dx^2})} = 1$, atque

$\frac{du}{dx} = r(1 + 2 \frac{dy}{dx} \cos a + \frac{dy^2}{dx^2})$. Ratio vero ultima

$\frac{ds}{dx}$, si fit $APM = s$, et $PMmp = \Delta s$ sic habetur. Ex

puncto M ad pm cadat perpendicularis MN, quæ erit $= \Delta x \sin a$. Proinde parallelogrammum $PMRp = y \Delta x \sin a$; et quia hic quoque $PMmp$ et $PMRp$ cum ratione æqua-

litatis evanescunt, fit $\frac{ds}{y dx \sin a} = 1$, atque $\frac{ds}{dx} = y \sin a$.

§. 326.

§. 326.

Hæc sunt ratiocinia, quibus innititur rectificatio et F.284.
 quadratura curvarum, si earum singula puncta ad duas re-
 ctas sub angulo quocunque se invicem secantes referan-
 tur. Dantur et alii modi naturam curvæ propositæ ex-
 primendi, et inter alios iste, cujus mentio facta est §.
 191; vi cujus nimirum singula curvæ puncta referuntur
 ad unum aliquod punctum fixum C, atque æquatio da-
 tur inter rectam variabilem $CM = z$, et angulum ACM
 $= p$. Denotet itaque p angulum ACM , atque z rectam
 variabilem CM ; tumque rectificandus sit arcus $AM = u$.
 Eum in finem concludo sequentem in modum. Ar-
 cus AM est functio anguli p , atque angulo ACM in-
 cremente $MCN = \Delta p$ aucto arcus AM augetur incremen-
 to $MN = \Delta u$, et præterea est $CN = z \pm \Delta z$. Ducatur
 chorda MN , atque ex puncto M ad latus CN trianguli
 rectilinei MCN , si opus sit productum, ducatur per-
 pendicularis MQ , erit chorda $MN = r(MQ^2 + QN^2)$.
 Radio CM ex centro C describatur arcus circularis MR
 $= z\Delta p$, erit MQ finis ipsius $z\Delta p$, atque $QN = \Delta z -$
 $sv.z\Delta p$. Decrescente jam angulo MCN decreſcit arcus
 MN et cum eo simul chorda MN præterea quoque MQ
 vel $\sin. z\Delta p$, atque $QN = \Delta z - sv.z\Delta p$. Evanescente
 tandem angulo MCN evaneſcunt arcus MN , chorda
 MN , præterea MQ vel $\sin. z\Delta p$ et QN vel $\Delta z - sv.z\Delta p$.
 Arcus vero Δu et chorda MN evaneſcunt in ratione æ-
 qualitatis pariter atque arcus MR cum ipsius finu MQ .

Est itaque limes rationis $\frac{\Delta u}{r(MQ^2 + QN^2)} = 1$, id est

$$\begin{aligned}
 & \frac{du}{r((\sin. zdp)^2 + (dz - sv.zdp)^2)} \\
 & = \frac{du}{r((\sin. zdp)^2 + (dz - 1 + \cos. zdp)^2)}
 \end{aligned}$$

=

$= 1 = \frac{du}{r((\sin. zdp)^2 + dz^2)}$ quia evanescente $\sin$
 $z\Delta p$ fit $\cos. z\Delta p = 1$. Proinde quoque

$$\frac{du : zdp}{r((\sin. zdp)^2 + dz^2) : zdp} = \frac{du : zdp}{r(1 + \frac{dz^2}{z^2 dp^2})}$$

$$= \frac{du}{zdp r(1 + \frac{dz^2}{z^2 dp^2})} = 1, \text{ ob } \frac{(\sin. zdp)^2}{z^2 dp^2} =$$

1, atque $\frac{du}{zdp} = r(1 + \frac{dz^2}{z^2 dp^2})$. Ideo $AM = u$

$$= \int zdp r(1 + \frac{dz^2}{z^2 dp^2}) = \int r(z^2 dp^2 + dz^2). \text{ Si ita-}$$

que loco zdp scribatur dx , erit $AM = \int r(dx^2 + dz^2)$.

§. 327.

Pro quadranda area MCN ita concludo. Est tri-
 angulum rectilineum $MCN = \frac{1}{2} (z \pm \Delta z) MQ = \frac{1}{2} (z$
 $\pm \Delta z) \sin. z\Delta p$. Evanescente vero angulo MCN areae
 trianguli rectilinei MCN atque curvilinei MCN simul
 evanescent, et quidem cum ratione æqualitatis. Sit
 itaque $ACM = s$, erit area curvilinea $MCN = \Delta s$, atque

$$\frac{\Delta s}{\frac{1}{2} (z \pm \Delta z) \sin. zdp} = 1, \text{ evanescente } dp. \text{ Id est}$$

$$\frac{\frac{1}{2} (z \pm dz) \sin. zdp}{ds} = \frac{ds}{\frac{1}{2} z \sin. zdp + \frac{1}{2} dz \sin. zdp}$$

$$= 1. \text{ Ideo quoque } \frac{\frac{1}{2} z \sin. zdp}{zdp} \pm \frac{\frac{1}{2} dz \sin. zdp}{zdp}$$

$$= \frac{ds : zdp}{\frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} dz} = \frac{ds}{zdp (\frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} dz)} = 1,$$

atque

atque $\frac{ds}{zdp} = \frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} z$, ob $\frac{\sin. zdp}{zdp} = 1$, et $dz = 0$. Proinde est area MCN = $s = \int \frac{1}{2} z. zdp$, vel MCN = $\int \frac{1}{2} zdx$, si loco zdp scribatur dx . Potest itaque unius ejusdemque curvæ rectificatio vel quadratura diversis admodum formulis exprimi, prout hic vel ille modus exprimendi ipsius curvæ naturam æquatione inter duas variables eligatur.

§. 328.

Adplicabimus ea, quæ dicta sunt, ad sectiones conicas.

Formula pro rectificandis sectionibus conicis

PRO CIRCULO supra jam inventæ sunt formulae F.285. rectificationi inservientes ex dato sinu, cosinu, tangente, cotangente, secante, cosecante vel sinu verso. Ad dam his formulis aliam pro rectificando arcu circuli AM ex data ipsius chorda. Sit itaque AB diameter circuli = $2a$, AP = x , PM = y , erit $yy = 2ax - xx$, atque arcus AM = $\int \frac{adx}{r(2ax - xx)}$. Ducta vero chorda AM, quæ fit = z , erit $zz = xx + yy = 2ax$, et proinde $zdz = adx$ et $xx = \frac{z^4}{4aa}$. Quibus valoribus substitutis habetur

$$\begin{aligned} AM &= \int \frac{zdz}{r\left(zz - \frac{z^4}{4aa}\right)} = \int \frac{2axdz}{2ar\left(zz - \frac{z^4}{4aa}\right)} \\ &= \int \frac{2axdz}{r(4aaxz - z^4)} = \int \frac{2adz}{r(4aa - zz)}. \end{aligned}$$

PRO ELLIPSI, cujus axis transversus AB = $2a$, centrum C, abscissa CP = x , PM = y , parameter = p , F.281. habemus $2ayy = paa - pxx$ (§. 159.), $4aydy = -2pdx$, $dy = -\frac{pdx}{2ay}$, $dy^2 = \frac{ppxx}{4aayy} dx^2 = \frac{ppxx}{2a^3 - 2axx} dx^2$.

T t

Ideo

Ideo fit arcus DM $= \int r \left(\frac{p x x}{2a^3 - 2a x x} + dx^2 \right) = \int dx$

$r \int \frac{p x x - 2a x x + 2a^3}{2a^3 - 2a x x}$; ex qua formula posito $p = 2a$

fit DM $= \int \frac{a dx}{r(aa - xx)}$.

P.280. PRO PARABOLA abscissis in axe transverso computatis, cujus parameter est p , habetur aequatio inter coordinatas orthogonales $yy = px$. Proinde $2y dy = p dx$,

$dy = \frac{p dx}{2y} = \frac{p dx}{2r px}$, $dy^2 = \frac{pp dx^2}{4px}$, Hinc arcus AM

$= \int r \left(dx^2 + \frac{pp dx^2}{4px} \right) = \int r \left(\frac{4px + pp}{4px} dx^2 \right) =$

$\int r \left(\frac{p + 4x}{4x} dx^2 \right) = \int r \left(\frac{px + 4xx}{4xx} dx^2 \right) = \int \frac{dx}{2x} r(px +$

$4xx)$; ex qua formula multiplicando numeratorem et denominatorem per $r(px + 4xx)$ et dividendo per x ,

deducitur AM $= \int \frac{(p + 4x) dx}{2r(px + 4xx)}$.

P.282. PRO HYPERBOLA abscissis in axe transverso a centro C computatis, cujus parameter est p , æquatio inter coordinatas orthogonales est $2ayy = pxx - paa$, ideo in-

venitur arcus AM $= \int dx r \frac{p x x + 2a x x - 2a^3}{2a x x - 2a^3}$, ex qua

posito $p = 2a$ fit $\int dx r \frac{2xx - aa}{xx - aa}$, ubi constans integrali

addenda ex eo determinanda est, quod posito $x = a$ fiat AM $= 0$. Si abscissae a centro in axe conjugato $= b$ computentur, cujus parameter est q et æquatio inter coordinatas orthogonales sit $2byy = qxx + qbb$; invenitur

AM

$$AM = \int dx \sqrt{\frac{qxx + 2bxx + 2b^3}{2bxx + 2b^3}}, \text{ atque si } q = 2b; AM = \int dx \sqrt{\frac{2xx + bb}{xx + bb}}$$

§. 329.

Formulae pro quadratura sectionum conicarum.

PRO ELLIPSI supra jam inventa est formula CPMD F. 281.
 $= \int \frac{b}{a} dx \sqrt{(aa - xx)}$, quæ est pro circulo $= \int dx \sqrt{(aa - xx)}$, quando $b = a$. Ex æquatione parametrum axis principalis involvente deducitur CPMD $= \int dx \sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$.

Sit CM = z; erit zz = xx + yy. Deinde sit differentiale arcus radio z descripti = dv, erit area sectoris DCM = $\int \frac{1}{2} z dv$. Sit arcus DM = u, erit du = $\sqrt{dv^2 + dz^2}$ (§. 326.), ideo $du^2 = dv^2 + dz^2$, atque $dv = \sqrt{du^2 - dz^2}$. Jam ex æquatione

pro ellipsi $2ayy = paa - pxx$ deducitur $y = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}}$
 $= \frac{1}{2a} \sqrt{2a^3p - 2apxx}$. Proinde est $z = \sqrt{\frac{2ax^2 - pxx + aap}{2a}}$

$= \frac{1}{2a} \sqrt{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}$, et dz =
 $\frac{2axdx - pxdx}{\sqrt{4aax^2 - 2apx^2 + 2a^3p}}$, Ideo dz² =

$\frac{4aaxx - 4apxx + ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} dx^2$, Præterea est du² =
 $\frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2aax} dx^2$ (§. 328.) = $\frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx} dx^2$.

$$\text{Proinde } dv = \frac{2a^3 p dx}{(4aaxx - 2apxx + 2a^3 p) \sqrt{(2a^3 p - 2apxx)}} \cdot \frac{aapdx}{aapdx}$$

$$\text{Unde concluditur DCM} = \int \frac{1}{2} z dv = \frac{aapdx}{2\sqrt{(2a^3 p - 2apxx)}}.$$

F.285. PRO CIRCULO AMB sit radius CA = a, AP = x, PM = y, erit yy = 2ax - xx, ac posito arcu AM = v,

$$\text{invenimus } dv = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} \quad (\S. 328.). \quad \text{Si jam fuerit}$$

$$\text{sector ACM} = s, \text{ erit } ds = \frac{1}{2} r dv = \frac{aadx}{2\sqrt{(2ax - xx)}}, \text{ at-}$$

$$\text{que sector ACM} = \int \frac{aadx}{(2\sqrt{2ax - xx})}. \quad \text{Abscissis a cen-}$$

$$\text{tro C computatis et posito arcu DM} = v, \text{ erit } dv = \frac{adx}{\sqrt{(aa - xx)}} \quad (\S. 314.) \text{ et proinde sector DCM} = \int \frac{1}{2} a dv$$

$$= \int \frac{aadx}{2\sqrt{(aa - xx)}}. \quad \text{Sit AM} = z \text{ chorda quaecunque cir-}$$

culi, cujus diameter est AB. Sit AS diametro circuli AB perpendicularis, arcus MS = v, præterea arcus

$$\text{AM} = u, \text{ erit } du = \frac{2adz}{\sqrt{(4aa - zz)}}. \quad \text{Sed } dv^2 = du^2 -$$

$$dz^2 = \frac{4aadz^2}{4aa - zz} - dz^2 = \frac{zzdz^2}{4aa - zz}, \text{ atque } dv =$$

$$\frac{zdz}{\sqrt{(4aa - zz)}}. \quad \text{Proinde segmentum AM} = \int \frac{1}{2} z dv =$$

$$\int \frac{zzdz}{2\sqrt{(4aa - zz)}}.$$

F.286. PRO HYPERBOLA, cujus femiaxis transversus CA = a, et femiaxis conjugatus CD = b, posita CP = x

$$\text{et PM} = y, \text{ est area APM} = \int \frac{b}{x} dx \sqrt{(xx - aa)} \text{ cui in-}$$

tegrali

tegrali constans addenda est ex eo determinanda, quod posito $x = a$ sit $APM = 0$. Si $CQ = x$, et $QM = y$,

fit area $ACQM = \int \frac{b}{a} dx (aa + xx)$ (§. 324.). Pro

hyperbola æquilatera est $APM = \int dx \sqrt{xx - aa}$ et $ACQM = \int dx \sqrt{aa + xx}$. Si vero $AP = x$, est $APM = \int dx \sqrt{2ax + xx}$. Area sectoris ACM sic invenitur.

Introducendo parametrum in calculum et ponendo $CP = x$, $PM = y$, est $2ayy = pxx - paa$, et $yy = \frac{pxx - aap}{2a}$. Proinde $CM^2 = zz = xx + \frac{pxx - aap}{2a} =$

$\frac{2axx + pxx - aap}{2a}$, atque $CM = z = \frac{1}{2} a \sqrt{4aaxx +$

$2apxx - 2a^3p$); $dz = \frac{2axdx + pxdx}{\sqrt{4aaxx + 2apxx - 2a^3p}}$;

$dz^2 = \frac{4aaxx + 4apxx + ppxx}{4aaxx + 2apxx - 2a^3p} dx^2$. Si arcus $AM = u$,

erit $du = \frac{2apxx + ppxx - 2a^3p}{2apxx - 2a^3p} dx^2$; ideo posito arcu

$AM = v$, habemus $dv = \frac{\sqrt{du^2 - dz^2}}{2a^3pdx} =$

$\frac{\sqrt{(2apxx + 2a^3p)(4aaxx + 2apxx - 2a^3p)}}{aapdx}$, et proin-

de sector $ACM = \int \frac{1}{2} z dv = \int \frac{aapdx}{2\sqrt{(2apxx - 2a^3p)}}$, atque

si hyperbola fuerit æquilatera, ubi $p = 2a$, habemus

$$ACM = \int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}.$$

Sit semiaxis conjugatus $CD = b$, ejusque parame-
ter $= q$, $CQ = x$, $QM = y$, et erit $yy = \frac{qxx + qbb}{2b}$,

unde $CM = z = \frac{1}{2b} \sqrt{4bbxx + 2bqxx + 2b^3q}$, $dz^2 =$

$$= \frac{4bbxx + 4bqxx + qqxx}{4bbxx + 2bqxx + 2b^3q} dx^2, \quad du^2 = \frac{2bqxx + qqxx + 2b^3q}{2bqxx + 2b^3q} dx^2, \text{ et ideo } dv = \sqrt{(du^2 - dz^2)}$$

$$= \frac{2b^3q}{\sqrt{(2bqxx + 2b^3q)(4bbxx + 2bqxx + 2b^3q)}} \cdot \text{Sector } \frac{bbqdx}{bbqdx}$$

itaque $ACM = \int \frac{1}{2} z dv = \int \frac{bbqdx}{2\sqrt{(2bqxx + 2b^3q)}}$, et in hyperbola aequilatera, ubi $q = 2b = 2a$, fit $ACM = \int \frac{aadx}{2\sqrt{(xx + aa)}}$.



SECTIO XXI.

DE

LOGARITHMIS ET QVANTIS EXPONENTIALIBVS.

§. 330.

F.287. Si in hyperbolæ MGH asymptota CS capiantur rationes aequales quaevis, ut $CA : CB = CD : CE$, et ex punctis A, B, D, E, ducantur AG, BH, DI, EK, alteri asymptotæ CR parallelæ, occurrentes curvæ in punctis G, H, I, K; erunt trapezia AGHB et DIKE equalia. Sit enim $CA = a$, $AG = b$, $AB = x$, $BH = y$; erit $(CA + AB) BH = CA \cdot AG$ (§. 303.) id est $ay + xy = ab$, et proinde

$$y = \frac{ab}{a+x}. \quad \text{Jam area AGHB} = \int y dx \sin \alpha =$$

$$\int \frac{abdx \sin \alpha}{a+x}, \text{ si angulus asymptotarum} = \alpha, \text{ quod integra-}$$

le

le non invenitur, nisi fractio $\frac{ab \sin a}{a+x}$ in seriem con-

vertatur. Quo facto habetur $AGHB = ab \sin a \left(\frac{x}{a} \right.$

$-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}$). Constans nulla adjici-

tur, quia posito $x = 0$ fit $AGHB = 0$. Deinde fit CD

$= f$, $DI = g$, $DE = t$, $EK = u$; eritque $(CD + DE)$

$EK = CD \cdot DI$, vel $fu + tu = fg$, atque $u = \frac{fg}{f+t}$.

Proinde $DIKE = \int \frac{fg dt \sin a}{f+t} = fg \sin a \left(\frac{t}{f} - \frac{t^2}{2f^2} + \right.$

$\frac{t^3}{3f^3} - \frac{t^4}{4f^4} + \text{etc.}$). Sed $fg = ab$ per naturam hyper-

bolae et $\frac{x}{a} = \frac{t}{f}$ ex hypothesi. Ponitur enim CA :

$CB = CD : CE$, ideo est $CB - CA : CA = CE - CD :$

CD , id est $x : a = t : f$. Ergo est $AGHB = DIKE$.

§. 331.

Sit iterum curva AB hyperbola atque CD et CE F.288.

ipsum asymptotæ; praeterea sint AD , BG asymptotæ CE ,

atque AF et BE asymptotæ CD parallelæ: erit $ADCF =$

$BGCE$, et ablato communi CH additoque trilineo AHB ,

fit $ADGB = AFEB$. Sunt vero et triangula ACF et CEB

æqualia, ergo $AFEB + ACF - CEB = AFEB = ADGB$,

id est, sector hyperbolicus ACB æqualis trapezio hy-

perbolico $AFEB$ vel $ADGB$. Proinde si in hyperbolæ F.287.

$IHGM$ asymptoto CS capiantur quatuor abscissæ propor-

tionales $CA : CB = CD : CE$, et per puncta A, B, D, E ,

ducantur rectæ alteri asymptoto CR parallelæ, curvæ oc-

currentes in punctis G, H, I, K , erunt sectores hyper-

bolici, $CGH : CIK$, qui differentiis terminorum harum

æqualium rationum respondent, æquales. Sunt enim

æqualibus trapeziis AGHB et DIKE æquales. Capiantur nunc in hyperbolæ ML asymptoto CS abscissæ CA, CB, CD, CE, CF, etc. in progressionē geometrica; erunt rationes CA : CB; CB : CD; CD : CE; CE : CF; etc, æquales, proinde et omnia trapezia AH, BI, DK, EL, etc, æqualia, ita ut sit AI duplum, AK triplum, AL quadruplum, etc, trapezii AH. Est vero ratio CA : CD duplicata, CA : CE triplicata, CA : CF quadruplicata etc, rationis CA : CB, proinde trapezia AH, AI, AK, AL, etc, sunt inter se, ut logarithmi rationum CA : CB, CA : CD, CA : CE, CA : CF, etc, si ratio CA : CB sumatur pro simplici, nimirum ut numeri 1, 2, 3, 4, etc. Quod si igitur trapezium AH sit = c , erit AI = $2c$, AK = $3c$, AL = $4c$, et ita porro. Commode igitur trapezia AH, AI, AK, AL, etc, vel quoque sectores his trapeziis respectivæ æquales dici possunt *Mensuræ* rationum CA : CB, CA : CD, CA : CE, CA : CF etc, si pro mensura rationis CA : CB, sumatur AH = c . Atque hæc quidem mensuræ majores aut minores erunt pro magnitudine ipsius c , ita ut magnitudo ipsius c determinet magnitudinem omnium reliquarum mensurarum earum rationum, quæ sunt rationis CA : CB multiplicatæ quaecunque. Generaliter vero ipsa c denotare potest quantitatem quamcunque vel aream, vel lineam, vel aliud quodcunque extensum, quæ si consideretur ut unitas, series c , $2c$, $3c$, $4c$, etc, exponit seriem logarithmorum respondentium seriei rationum

$\frac{A}{B}$, $\frac{A^2}{B^2}$, $\frac{A^3}{B^3}$, $\frac{A^4}{B^4}$, etc, si $\frac{A}{B}$ conside-

retur ut simplex, cujus mensura sit c . Denotante igitur c trapezium hyperbolicum pro mensura cujuscunque rationis CA : CB, quæ tanquam simplex spectatur, assumtum, ejus magnitudo pendeat a magnitudine parallelogrammi hyperbolæ inscripti, sive a magnitudine potentia hyperbolæ.

§. 332.

Posita enim $AB=x$, $BH=y$, $CA=a$, et $AG=b$, F..287. est æquatio pro hyperbola $xy + ay = ab$, proinde $y =$

$\frac{ab}{a+x}$, et posito angulo coordinationis $=\alpha$, area trapezii

$$AH = \int \frac{ab \sin \alpha dx}{a+x} = ab \sin \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} \right).$$

Quodsi jam alia hyperbola NPT inter easdem asymtotas CR et CS descripta intelligatur, erunt trapezia AH et AO, quæ eidem rationi $CA : CB$ respondent; inter se ut parallelogramma inscripta, seu ut potentiae hyperbolarum. Manente enim $CA=a$, $AB=x$ posita $BO=u$, $AN=c$, erit $xu + au = ac$, et $u =$

$$\frac{ac}{a+x}, \text{ proinde trapezium } AO = \int \frac{ac \sin \alpha dx}{a+x} = ac \sin \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} \right).$$

Est vero series prior ad posteriorem, ut $ab \sin \alpha : ac \sin \alpha$. Ex quo patet, quod posita ratione $CA : CB$ eadem et hyperbolis diversis inter easdem asymtotas descriptis mensuræ rationis $CA : CB$ sint ut hyperbolarum potentiae. Licet igitur eadem ratio sumatur pro simplici, potest tamen ejus mensura, et ideo mensuræ omnium reliquarum, quæ ex eadem quomodocunque componuntur, rationum, quamcunque habere magnitudinem, pro diversa magnitudine potentiae hyperbolæ, cujus spatia asymtotica vel sectores his æquales pro mensurandis rationibus in ejus asymtota abscissis usurpantur. Determinata vero magnitudine potentiae hyperbolæ simul magnitudo omnium trapeziorum rationes dictas mensurantium est determinata, sic ut quævis hyperbola exhibeat systema logometricum completum, si in ejus asymtota capiatur ratio quævis ut simplex spectata. Cum igitur magnitudo po-

tentiæ hyperbolæ magnitudinem omnium mensurarum rationum hujus systematis determinet, ita ut in diversis hyperbolis ipsæ rationum mensuræ eidem rationi respondentes inter se sint, ut istæ potentiae; hæc ipsa potentia hyperbolæ dicitur *modulus hujus systematis logometrici*. Erunt igitur in diversis hyperbolis intra easdem asymptotas descriptis mensuræ ejusdem rationis ut moduli. Quando rationes sunt inæquales, mensuræ earum modulorum rationem non tenent. Hinc vice versa quoque, si mensuræ diversorum systematum sint ut moduli; ad eandem rationem pertinebunt.

§. 333.

F.289. Cum sit area ABHG = $ab \sin \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} \right)$ = mensuræ rationis CA : CB = $a : a + x$; posito x negativo Ab, habetur area AGhb = $ab \sin \alpha \left(-\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \text{etc.} \right)$ = mensuræ rationis CA : Cb = $a : a - x$. Quando est duorum quorumvis numerorum semisumma = a et semidifferentia = x , erit major = $a + x$ et minor = $a - x$. Tum vero ratio numerorum $a - x : a + x$ erit = $1 : \frac{a + x}{a - x}$. Invenitur vero mensura rationis $a - x : a + x$ subtrahendo mensuram rationis $\frac{a - x}{a}$ a mensura rationis $\frac{a + x}{a}$, quia est $\frac{a + x}{a} : \frac{a - x}{a} = \frac{a + x}{a - x}$. Proinde est mensura rationis $(a - x : a + x)$ = $\left(1 : \frac{a + x}{a - x} \right)$, vel quantitibus a et x per numeros expressis, logarithmus numeri $\frac{a + x}{a - x}$, = ABHG -

$$AGhb = 2ab \sin a \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \text{etc.} \right),$$

quæ series systemati logarithmico cui-
cunque sat expedite condendo infervit, atque ut hæc
series certo cuidam systemati aptetur, opus est, ut de-
terminatus quidam numerus sumatur pro base, cujus
proinde logarithmus sit unitas. Sit igitur basis systema-

tis = e et ponatur $\frac{a+x}{a-x} = e$, ex quo fit $ea - ex =$

$a+x$; $ea - a = ex + x$; $x = \frac{ea - a}{e + 1}$. Fit igitur

$$le = 1 = 2ab \sin a \left(\frac{ea - a}{(e+1)a} + \frac{(ea - a)^3}{3(e+1)^3 a^3} + \frac{(ea - a)^5}{5(e+1)^5 a^5} + \frac{(ea - a)^7}{7(e+1)^7 a^7} + \frac{(ea - a)^9}{9(e+1)^9 a^9} + \text{etc.} \right)$$

ex quo habetur modulus $ab \sin a$, quem in sequentibus
generaliter littera M denotabimus. Erit nimirum M

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{ea - a}{(e+1)a} + \frac{(ea - a)^3}{(e+1)^3 a^3} + \frac{(ea - a)^5}{(e+1)^5 a^5} + \text{etc.} \right)$$

ex quo patet magnitudinem moduli M pendere a magni-
tudine numeri e , qui sumitur pro base, et vice versa ma-
gnitudinem baseos e pendere a magnitudine moduli M ,
ita ut determinato modulo simul magnitudo baseos e de-
terminata sit.

§. 334.

In quovis systemate ratio, 'cujus logarithmus est
systematis illius modulo æqualis, una eademque seu con-
stans est. Nam logarithmi diversorum systematum, mo-
dulis suis æquales, sunt ut illi moduli, proinde ad ean-
dem rationem pertinent. Constans illa ratio dici solet
ratio

ratio modularis eaque ex serie $l(1:1+x) = M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \text{etc.})$ habetur per reversionem §. 252. Logarithmo enim rationis $1:1+x$ simpliciter

per L denotato fit $x = \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L^3}{1.2.3.M^3}$

$\frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} + \text{etc.}$, proinde ratio, cujus logarithmus

est L , erit $1:1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1.2.M^2} + \frac{L^3}{1.2.3.M^3} +$

$\frac{L^4}{1.2.3.4.M^4} + \frac{L^5}{1.2.3.4.5.M^5} + \frac{L^6}{1.2.3.4.5.6.M^6}$

$+ \text{etc.}$, et ideo si modulus $M=L$, erit hæc ratio $1:1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \text{etc.}$, $= 1:2, 718281828$

45904523536028 . Ex his patet, quod posito modulo $= 1$, fiat numeri $2, 71828182845904523536028$ logarithmus $= 1$, et proinde hic numerus erit basis systematis logarithmi cujus modulus est $= 1$. Quia hæc suppositio, qua modulus ponitur $= 1$, est simplicissima, logarithmi systematis, cujus modulus est $= 1$, vocantur *naturales*, reliqui vero *artificiales*. Systema igitur *Brigianum* vulgo in calculis receptum est artificiale: *Nepperianum* vero est naturale. Ex præcedentibus vero patet, quod dato quovis systema logarithmico cum modulo suo, et modulo systematis alterius, inveniatur totum systema alterum; vel quoque dato systemate logarithmico cum modulo suo et logarithmo datae rationis ex altero inveniatur, et modulus, et systema totum alterum. Proinde opus tantum est, ut inquireamus, quomodo logarithmorum naturalium systema potuit inveniri, cum dato hoc systemate simul dentur omnia reliqua.

§. 335.

§. 290.

Cum parallelogrammum inscriptum ubique in hyperbola idem sit magnitudine, poterit adhiberi ad CA abscissam illam, ad quam fit æqualium laterum, et proinde

inde, si hyperbola æquilatera supponatur, sub figura quadrati. Hoc calu facta $CA=1$, simul fit quadratum seu modulus $CF=1$; ipsæ AB , $A\beta$, vel $+x$ et $-x$ ex utraque puncti A parte excurrent, et $AC:AC+AB$, vel $AC:AC-A\beta$, id est $1:1\pm x$ exponent omnes rationes minoris et majoris inæqualitatis, cum logarithmis suis $AFBG$, $AF\beta\gamma$, contrario positu respectu puncti A seu ordinatae AF ordinatis, sic ut logarithmi necessario ex una parte affirmativi positi, evadant negativi ex altera parte, numerorum vero negativorum logarithmi impossibiles. Proinde hyperbola æquilatera, cujus potentia ponitur $=1$, omnium distinctissime exponit systema logarithmicum naturale. Potest tamen et eadem hyperbola systema quodvis artificiale repræsentare pro diversa denominatione parallelogrammi inscripti. Sit igitur CA unitas, et uti supra jam posuimus, duorum quorumvis numerorum semisumma $=a$ et semidifferentia $=x$, ut major sit $a+x$, minor $a-x$, et ratio numerorum $a+x; a-x$ redit ad $\frac{a+x}{a-x}:1=CB:CA$.

Cum igitur CA ponitur unitas, erit CB numerus quivis $\frac{a+x}{a-x}$ et ejus logarithmus naturalis, posito $M=1$, =

$$\frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} + \frac{2x^9}{9a^9} + \text{etc.}$$

Potest in hac serie quoque pro a integra datorum numerorum summa et pro x integra eorundem differentia substitui, licet proprie x sit semidifferentia et a semisumma, et proinde $2x$ differentia et $2a$ summa integra. Est enim fra-

ctio $\frac{x}{a}$ = fractioni $\frac{2x}{2a}$, et proinde quoque reliqua-

rum fractionum $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{x^3}{a^3}$ etc. valor idem manet, li-

cet x differentiam et a summam integram datorum numero-

merorum ponatur denotare. Sit igitur quaerendus logarithmus naturalis rationis $3:2$ seu $\frac{3}{2} : 1$ seu numeri $\frac{3}{2}$, erit $a = 5$, $x = 1$, et logarithmus quaesitus $= \frac{2}{5} +$

$\frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \frac{2}{9 \cdot 5^9} + \text{etc.}$ Dividendo igitur 2, 0000000000 etc, per 5 fiet

[illegible]

Dividantur A, B, C, D, E, etc. per

Divia

Divisores	erunt quoti
1	0, 400000000000000000000000000000
3	533333333333333333333333
5	12800000000000000000000000
7	365714285714285
9	1137777777777777
11	372363636363
13	12603076923
15	436906666
17	15420235
19	551882
21	19973
23	729
25	27
27	1

et quotorum summa

0, 40546510810816438194

erit logarithmus naturalis numeri $\frac{3}{2}$, qui quaerebatur. Simili calculo invenitur logarithmus naturalis numeri $\frac{4}{3}$

$= \frac{2}{7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \frac{2}{9 \cdot 7^9} + \frac{2}{11 \cdot 7^{11}}$
 $+ \text{etc.} = 0, 28768207245178092740, \log \frac{5}{4} = 0, 32314355131420975574, \log \frac{7}{6} = 0, 15415066794268931426.$ Ex his autem obtinentur sequentes logarithmi.

$1\frac{3}{2} + 1\frac{4}{3} = 0,69314718055994530934 = \log. 2.$
 $1\frac{3}{2} + 12 = 1,09861228866810969128 = \log. 3.$
 $2 \log. 2 = 1,38629436111989061868 = \log. 4.$
 $14 + 1\frac{5}{4} = 1,60943791243410057442 = \log. 5.$
 $12 + 13 = 1,79175946922805500062 = \log. 6.$
 $16 + 1\frac{7}{6} = 1,94591013717074431488 = \log. 7.$
 $12 + 14 = 2,07944154167983592802 = \log. 8.$
 $2 \log. 3 = 2,19722457733621938256 = \log. 9.$
 $12 + 15 = 2,30258509299404568376 = \log. 10.$

Ufus

Ufus fractionum $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, etc, in logarithmis integrorum inveniendis ex his satis perspicitur. Series autem logarithmica eo citius convergit, quo minor fuerit differentia terminorum respectu summæ. Ad compendium igitur operæ conducit, si ejusmodi adhibeantur, quarum numeratores et denominatores sint ex majoribus numeris, qui exiguo differunt, ut $\frac{16}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$, etc, $\frac{126}{125}$, $\frac{225}{224}$, $\frac{2401}{2400}$, $\frac{4375}{4374}$, etc. Ex his enim et similibus brevi calculo obtinentur logarithmi numerorum *primorum* id est eorum, qui divisores exactos præter unitatem non agnoscunt, ex quibus reliquorum logarithmi per solam additionem vel subtractionem habentur.

§. 336.

Ex his logarithmis naturalibus inveniuntur artificiales Briggsiani, quolibet per modulum systematis Briggsiani multiplicato. Omnia proinde eo redeunt, ut modulus systematis Briggsiani inveniatur. Sit modulus systematis logarithmorum naturalium M et logarithmus naturalis numeri cujuscunque assumti L , modulus systematis Briggsiani m , et logarithmus vulgaris numeri illius, cujus logarithmus naturalis L , sit l ; erit $= L : l = M : m$. In systemate Briggsiano est 1 logarithmus numeri 10, ejusdem vero numeri logarithmus naturalis est 2,30258509 etc. Proinde fit modulus systematis

$$\text{Briggsiani} = \frac{1}{2,30258509299 \text{ etc.}} = 0,43429448190$$

3251827651128918916605082294397005803666566114454 etc. Prouti igitur inventio logarithmorum

pendet a quadratura hyperbolæ; sic et quadratura sectorum et spatiorum asymptoticorum hyperbolæ, quæ datis quibuslibet rationibus adjacent, habetur per canonem logarithmorum. Detur ratio $CB : CA$, et erit ut modulus canonis ad logarithmum datae rationis, sic parallelogrammum hyperbolicum ad aream quæsitam. Et vicissim invenitur hyperbola, in qua spatium adjacens datae

tae rationi fit magnitudinis datae inferendo: ut logarithmus tabularis ad datam rationem pertinens ad magnitudinem spatii dati, sic modulus canonis ad parallelogrammum hyperbolae quaesitae modulari. Dato autem parallelogrammo modulari datur hyperbola.

§. 337.

Dato igitur numero quocunque geometricè invenitur ipsius logarithmus naturalis sequentem in modum. Ducatur recta CS magnitudinis indefinitae, in eadem capiatur pars CA quaecunque atque hæc sumatur pro unitate. Ex hac unitate componatur CB tanquam numerus, ut fit $CA : CB = 1 : x$. Ex C erigatur CR perpendicularis ipsi CS, atque latere CA compleatur quadratum CF. Per punctum F describatur hyperbola ad CS et CR asymptotas, cujus potentia est $= CF$, per CB ducatur ad CS perpendicularis curvæ occurrens in G, erit AG logarithmus naturalis numeri x , qui quaerebatur. Aequatio pro hac hyperbola, posito $PM = y$, est $xy = 1$ proinde $y = \frac{1}{x}$, ideoque differentiale areae

$AM = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$. Cum fit AM logarithmus naturalis ipsius x , ponatur $AM = lx$, ita ut littera l semper denotet *logarithmum naturalem* illius quantitatis, cui præfigitur: erit $d. lx = \frac{dx}{x}$, unde ad logarithmorum

naturalium differentialia invenienda hanc habemus regulam. *Quantitatis x , cujus logarithmus naturalis proponitur, sumatur differentiale, hocque per ipsam quantitatem x divisum dabit differentiale logarithmi quaesitum.* Ope hujus regulæ, cujuscunque functionis ipsius x logarithmus proponatur, ejus differentiale facile invenitur.

Notandum autem est, $\frac{dx}{x}$ esse differentiale logarithmi

naturalis ipsius x . Si logarithmus numeri x alterius cujuscunque systematis proponeretur, eadem regula esset observanda, praeterea vero differentiale inventum per modulum illius systematis multiplicandum, cujus ratio ea est, quia logarithmi diversorum systematum sunt ut moduli. Sit basis logarithmorum naturalium $= e$, quorum modulus est 1, et basis systematis logarithmorum alterius cujuscunque $= a$, cujus modulus est m , erit, si prior logarithmus per $l^e x$ et posterior per $l^a x$ denotetur, $l^e x : l^a x = 1 : m$, proinde $l^a x = m l^e x$, et hinc $d. l^a x = m \frac{dx}{x}$. Idem quoque deducitur ex natura hyperbolæ, si ejus potentia CF non sit $= 1$, sed CF ponatur $= m$. Tum enim est $xy = m$, $y = \frac{m}{x}$, et $y dx = m \frac{dx}{x}$. Dato igitur logarithmo ipsius x artificiali quocunque et dato modulo illius systematis, ex quo logarithmus proponitur, qui sit $= m$, erit $d. l^a x = m \frac{dx}{x}$. Inde deducitur regula generalis pro inveniendis differentiis logarithmi cujuscunque ipsius x propositi. *Differentiale variabilis x , cujus logarithmus proponitur, dividatur per ipsam hanc variabilem, et quotus multiplicetur per modulum systematis, ad quod logarithmus propositus pertinet.* Extenditur hæc regula simul ad logarithmos naturales, posito eorum modulo $= 1$. Logarithmi numerorum, qui non sunt potestates basis systematis, exhiberi non possunt, nisi concessa quadratura hyperbola. Hæc causa est, cur logarithmi quantitatibus transcendentibus annumerentur. Hoc tamen non obstante differentiale logarithmi variabilis x , et cujuscunque functionis algebraicæ illius variabilis, est functio algebraica per dx multiplicata

cata, ita ut differentiale logarithmicum cum differentialibus functionum algebraicarum unius variabilis eandem habeat formam, nimirum $\equiv Pdx$, existente P functione ipsius x algebraica. Proinde differentialia secunda et sequentium ordinum functionis logarithmicae variabilis x per praecepta Sectionis XV inveniuntur, posito nimirum differentiali dx constante.

§. 338.

Exposita logarithmorum differentiatione, functiones, quae ex algebraicis et logarithmis sunt permixtae, facile differentiabuntur, perinde atque eae, quae ex logarithmis solis componuntur, quod ex sequentibus exemplis fiet perspicuum, in quibus supponamus, logarithmos datos esse naturales. Si fit $y = (lx)^n$, ponatur $lx = p$, atque ob $y = p^n$, erit $dy = np^{n-1}dp$. Est vero $dp = \frac{dx}{x}$, proinde $dy = n (lx)^{n-1} \frac{dx}{x}$. Posito

$y = \sqrt[m]{lx} = (lx)^{\frac{1}{m}}$ erit $dy = \frac{1}{m} (lx)^{\frac{1}{m}-1} \frac{dx}{x}$. At-

que si p fuerit functio quaecunque ipsius x , ponaturque $y = (lp)^n$, erit $dy = n(lp)^{n-1} \frac{dp}{p}$. Quare cum diffe-

rentiale dp per praecedentia assignari possit, erit quoque differentiale ipsius y cognitum. Quando est $y = lp \times lq$, fuerintque p et q functiones quaecunque ipsius x ,

erit $dy = \frac{dp}{p} lq + \frac{dq}{q} lp$. Sit $y = xlx$, atque habe-

mus $dy = dxlx + \frac{xdx}{x} = dxlx + dx$. Quodsi fuerit y

$= x^m lx - \frac{1}{m} x^m$, differentiatione secundum partes

instituta reperietur $dy = mx^{m-1}dxlx + x^{m-1}dx - x^{m-1}dx = mx^{m-1}dxlx$. Quando autem est $y = x^m (lx)^n$, fiet

$dy = mx^{m-1}dx (lx)^n + nx^{m-1}dx (lx)^{n-1}$. Si logarithmi logarithmorum occurrant, idoneis substitutionibus eorum differentialia per præcepta hucusque tradita haud difficulter eruuntur. Uti si fuerit $y = llx$, ponatur $lx = p$, erit $y = lp$, et $dy = \frac{dp}{p}$; at est $dp = \frac{dx}{x}$, pro-

inde fiet $dy = \frac{dx}{xlx}$. Si sit $y = lllx$, ac statuatur $lx = p$, fiet $y = llp$, et proinde est $dy = \frac{dp}{plp}$. Quia vero

$dp = \frac{dx}{x}$; invenitur $dy = \frac{dx}{xlx \cdot llx}$.

§. 339.

Menfura datae rationis, quæ hic exponitur per aream afymtoticam hyperbolæ, etiam repræsentari potest per lineam rectam. Productæ enim intelligantur omnes applicatæ BG versus M et capiantur BM tales, ut
F.290. fit rectangulum sub AC et BM æquale areae AFGB, et

proinde $BM = \frac{AFGB}{AC}$, erunt puncta M in curva

AM, quæ et versus oppositam partem R continuatur concipiendo, quod puncto β versus C fluente, apud β sub angulo afymtotarum applicata sit $\beta\mu$ ita crescente C β , ut perpetuo rectangulum sub AC et $\beta\mu$ æquale sit

areae AF $\gamma\beta$, et proinde $\beta\mu = \frac{AF\gamma\beta}{AC}$. Curva haec

vocatur *Logistica* sive *Logarithmica*. Ductis enim MP, ZV, μp etc. ipsi CS parallelis erunt CP, CZ, Cp, logarithmis rationum CA : PM, CA : ZV, CA : μp proportionales. Sunt enim rectæ CP, CZ, Cp proportionales areis AFGB, AFDE, AF $\beta\gamma$. Si rationes MP : AC, ZV : MP, CA : μp sunt æquales, erunt æquales CP, PZ, Cp, utpote respondentes æqualibus spatiis hyperbolicis AFGB,

AFBG, BGED, atque ex his patet, quod applicatis in geometrica progressionē procedentibus $AC : PM : ZV$ etc. abscissæ progrediantur in progressionē arithmetica $0 - CP - 2CP$ etc. Repræsentat igitur et Logistica systema logarithmicum completum.

§. 340.

Quodsi ipsæ CP, CZ, Cp etc, sumantur pro logarithmis rationum $CA : PM, CA : ZV, CA : \mu p,$ etc; erit modulus hujus systematis $= AF$. In duobus enim logarithmorum systematibus logarithmi æqualibus rationibus respondentes sunt ut moduli. Proinde fit $ABFG : BM = AC \times AF : m$, vel $ABFG : AC \times AF = BM : m$,

est vero et $\frac{ABFG}{AC} : AF = ABFG : AC \times AF$, proinde

$\frac{ABFG}{AC} : AF = BM : m$, sed $\frac{ABFG}{AC} = BM$, ideo AF

$= m$. Sumantur nunc duo quævis logistica puncta M et V , per quæ ducatur recta curvam secans et axi occurrens in s . Ex punctis M et V ducantur ipsi SC parallelæ applicatæ MP et VZ ad CZ tanquam axem, atque per M ducatur Mr axi CZ parallela. Vocetur $CP = x$ et $PM = y$, erit $PZ = \Delta x = Mr$, et $rV = \Delta y$. Posita vero ratione $MP : VZ$ eadem erit Δx constans. Cum vero fit $MP : VZ$ ratio constans, erit simul $VZ - MP : MP$, seu $Vr : MP$ ratio constans. Est vero $Vr : MP = Mr : Ps$; proinde Ps , posita ratione $MP : VZ$ eadem, est quantitas constans, sub hac enim hypothese Mr est quantitas constans, et ratio $Mr : Ps$ constans. Habemus

igitur $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{Ps}$, ex qua æquatione fit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{Ps}$.

Accedente puncto V ad M , $\Delta x, \Delta y$ et Ps variantur, y et x constantibus. Coincidente puncto V cum ipso M , Δy evanescit et cum ea simul Δx , secans Vs cadit in tangentem TM , et punctum s cum puncto T coincidit, ita ut ex Ps fiat PT , quæ erit *subtangens* curvæ. Limes igitur

tur rationis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $\frac{y}{PT}$, proinde fit $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT}$. Quia

praeterea est $\Delta x = \frac{BGED}{AC}$, et $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{BGED}{\Delta y \cdot AC} =$

$\frac{\Delta \cdot AGBF}{\Delta y \cdot AC}$; erit $\frac{dx}{dy} = \frac{d \cdot AGBF}{dy \cdot AC} = \frac{GB \cdot dy}{dy \cdot AC} =$

$\frac{AC \cdot AF}{y \cdot AC} = \frac{AF}{y}$. Ergo $\frac{AF}{y} = \frac{PT}{y}$, et $AF = PT$. De-

finiri igitur potest logistica per æquationem $\frac{dx}{b} =$

$\frac{dy}{y}$, quando subtangens littera b denotatur, vel per x

$= b \int \frac{dy}{y}$, vel loco y scripto $a+y$, per $x = b \int \frac{dy}{a+y}$,

et l denotante logarithmum naturalem, erit $x = b$
 $l \frac{a+y}{a}$.

§. 34^I.

F.290. Quæ igitur hyperbola per areas, Logistica per lineas exponit, ita ut quæcunque eam in rem de hyperbolis dicta sunt, simul de logisticis valeant. Quælibet systema logarithmicum sibi proprium continet, ita ut in diversis logisticis abscissæ eidem rationi applicatarum respondentes sint ut subtangentes. Possunt tamen hæc systemata omnia una eademque logistica exprimi pro diversa expressione numerica subtangentis seu moduli.

Data abscissa x in logistica ex ratione $\frac{a+y}{a}$ habetur

quadratura arearum hyperbolæ asymptoticarum, proinde logistica vocari potest *quadratrix hyperbolæ*. Prouti magnitudo arearum hyperbolicarum datur per canonem logarithmorum, sic quoque construitur Logistica per eun-

eundem. *Dentur enim duo puncta A et M Logisticae construendae, et axis seu asymptota Logisticae.* Ex M et A demittantur perpendiculara MP et AC in axem, atque dabitur ratio MP : AC cum logarithmo CP. Assumatur ratio quaevis alia CD : CA, et fiat ut logarithmus tabularis rationis datae MP : AC ad log. tab. rationis assumptae CD : CA, sic CP ad quartum CZ. Lateribus DC et CZ fiat rectangulum CV, et erit V punctum in Logistica. *Quando unum punctum M datur et Axis cum modulo;* ex M demisso perpendicularo MP in Axem, fiat PT = modulo, atque ratio MP : TN = rationi modulari, erit N in logistica, tum vero reliqua fiunt ut ante. *Data sit subtangens sola seu modulus,* atque assumpta asymptota CR ex puncto ejus C quocunque ducatur perpendicularis, atque in ea capiatur CA magnitudinis arbitrariae. Fiat CP = modulo, et capiatur CA : CB = rationi modulari. Lateribus BC et CP compleatur rectangulum CM, erit M in logistica. *Denique detur Logistica descripta et quaeratur modulus* Ducta ordinata qualibet CA capiatur CA : CB = rationi modulari. Per B ducatur axi parallela curvæ occurrens in M, atque ex eo demittatur in axem perpendicularum MP, erit CP subtangens seu modulus.

§. 342.

Quando logistica construitur ex hyperbola æquilatera, cujus quadratum inscriptum est CF = 1, ut fiat AC = AF, etiam modulus seu subtangens in logistica fit = 1 et posito FB = CF fit ratio CA : CB ratio modularis, et ideo CB basis logarithmorum naturalium. Quia igitur hoc casu subtangens logisticae fit = 1, eadem repræsentat systema logarithmorum naturalium. Aequatio

logisticae $x = b l \frac{y}{a}$, quia jam fit $b = 1$ et $a = 1$, nunc

abit in $x = ly$, et posita base logarithmorum naturalium = e, fit $e^x = y$, quæ est æquatio exponentialis ipsam logarithmicam exprimens, et proinde eadem curvis expo-

nentialibus jure annumeratur. *Quantitas* enim *exponentialis* est omnis dignitas mathematica, cujus exponens est variabilis. Quo igitur natura quantitatum ut et *curvarum exponentialium*, quæ generatim omnes istæ erunt, in quarum aequationem quantitates exponentiales ingrediuntur, eo melius innotescat; inquiremus in methodum inveniendi ejusmodi functionum differentialia. Quare si primo fuerit $y = a^x$, erit, suntis logarithmis, $ly = xla$, cujus æquationis differentialis est $M \frac{dy}{y}$

$= dxla$, unde concluditur $dy = \frac{y dxla}{M}$. Est autem

$y = a^x$, proinde $dy = a^x dxla : M$. Quodsi vero sumantur logarithmi naturales æquationis $y = a^x$, ut sit $M = 1$, erit $dy = a^x dxla$. Ob calculi igitur commoditatem perpetuo sumi possunt logarithmi naturales, ita ut character l in sequentibus perpetuo logarithmum naturalem denotet, nisi contrarium expresse indicetur. Atque hoc supposito erit $d. a^x = a^x dxla$, et generaliter quoque, si est p functio quæcunque ipsius x , erit $d. a^p = a^p dpla$. Unde sequentem deducimus regulam: *Quantitatis exponentialis, primi gradus a^p differentiale, si quantitas ad exponentem variabilem elevata est constans, erit productum ex ipsa quantitate exponentiali a^p , differentiali exponentis p , et logarithmo constantis a , quæ ad exponentem variabilem est erecta.* Cum la^p sit $= pla$ et proinde $d. la^p = dpla$, eadem regula sic quoque enuntiari potest: *Quantitatis exponentialis a^x differentiale est ipsa hæc quantitas per differentiale logarithmi ipsius multiplicata.* Ubi notandum est, ipsam hanc regulam adeo generalem esse, ut ad omnis generis quantitatum differentialia se extendat. Sit enim y functio quæcunque ipsius x , vel algebraica vel transcendens,

erit ejus differentiale $dy = y \frac{dy}{y}$. Fit igitur $d. e^x = e^x lxle = e^x lx$, quando e denotat basin logarithmorum

rum naturalium, tum enim est $le = 1$. Posito dx constante facile inveniuntur differentialia sequentium ordinum. Erit enim $dd.e^x = e^x dx^2$, $d^3e^x = e^x dx^3$, $d^4e^x = e^x dx^4$, et ita porro.

§. 343.

Si ipsa quantitas elevata est variabilis, hic casus facile ad eum reducitur, ubi quantitas elevata est constans. Quando enim sunt p et q variabiles quæcunque, atque vel functiones ejusdem variabilis x , ut una ab altera pendeat, atque ipsius pq differentiale quærat; erit $l.pq = qlp$, et posito $e =$ basi logarithmorum naturalium, fit quoque $leqlp = qlp$, proinde $l.pq = leqlp$, atque ideo $pq = eqlp$, et $d.pq = d.eqlp$. Ex quo simul patet, esse $elp = p$, utriusque enim quantitatis logarithmus est lp . Fit autem

$$d.eqlp = eqlp \left(dqlp + \frac{qdp}{p} \right) = pq \left(dqlp + \frac{qdp}{p} \right) =$$

$$pq dqlp + pq q \frac{dp}{p} = pq dqlp + qpq^{-1} dp. \quad \text{Ex quo}$$

habetur $d.pq = pq dqlp + qpq^{-1} dp$. Si igitur fuerit $y = x^x$, erit $dy = x^x dx lx + x^x dx$, unde simul sequentium ordinum differentialia habentur. Invenitur enim

$$\frac{ddy}{dx^2} = x^x \left(\frac{1}{x} + (1+lx)^2 \right); \frac{d^3y}{dx^3} = x^x \left((1+lx)^3 + \right.$$

$$\left. \frac{3(1+lx)}{x} - \frac{1}{xx} \right), \text{ etc.} \quad \text{Si proponantur quantitates}$$

exponentiales secundi et sequentium ordinum, atque adeo ipsi exponentes fuerint denuo quantitates exponentiales; differentiatio secundum eadem præcepta institue-

tur. Differentianda sit quantitas $y = e^{e^x}$, atque cum in-

finem statuatur $e^x = p$, ut sit $e^{e^x} = ep$, erit $dy = epdp$;

at est $dp = e^x dx$, unde fit $dy = e^{e^x} e^x dx$, si fuerit $y =$

$$= e^{e^x}, \text{ erit } dy = e^{e^x} e^{e^x} e^x dx. \text{ Quando vero est } y = p^q, \text{ statuatur } q^r = z, \text{ erit } p^q = p^z, \text{ proinde } dy = p^z dz lp + zp^{z-1} dp, \text{ est autem } dz = q^r dr lp + r q^{r-1} dq, \text{ unde habetur } dy = p^z q^r dr lp \cdot lq + p^z r q^{r-1} dq lp + p^z q^r \frac{dp}{p} = p^q q^r (dr lp \cdot lq + \frac{r dq lp}{q} + \frac{dp}{p}).$$

§. 344.

$$\text{Quando est } y = a^x, \text{ habemus } \frac{dy}{dx} = a^x la, \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= a^x (la)^2, \frac{d^3 y}{dx^3} = a^x (la)^3 \text{ etc. Posito igitur } x + \Delta x$$

$$\text{loco } x, \text{ erit } y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \left(1 + \frac{\Delta x la}{1} + \frac{\Delta x^2 (la)^2}{1.2.} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4.} + \text{etc}\right) \text{ quæ series si dividatur}$$

$$\text{per } a^x \text{ prodibit } a^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x la}{1.2.} + \frac{\Delta x^2 la^2}{1.2.} + \frac{\Delta x^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{\Delta x^4 (la)^4}{1.2.3.4.} + \text{etc, vel scripto } z \text{ pro } \Delta x \text{ fit } a^z = 1 +$$

$$\frac{z la}{1} + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} + \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.4.} + \text{etc,}$$

$$\text{Sumto } z \text{ negativo, erit } a^{-z} = 1 - \frac{z la}{1} + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} - \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.4.} - \text{etc. ex quarum combina-}$$

$$\text{tione oritur } \frac{a^z + a^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2 (la)^2}{1.2.} + \frac{z^4 (la)^4}{1.2.3.4.} + \frac{z^6 (la)^6}{1.2.3.4.5.6.} + \text{etc, et } \frac{a^z - a^{-z}}{2} = \frac{z la}{1} + \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3.} +$$

$$+ \frac{z^5 (la)^5}{1.2.3.4.5.} + \text{etc}$$

$$\frac{z^5 (la)^5}{1.2.3.4.5.} + \frac{z^7 (la)^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \text{etc, ubi } la \text{ semper denotat}$$

logarithmum naturalem numeri a . Hujus formulae ope ex dato quovis logarithmo numerus ei conveniens reperiri potest. Sit enim propositus logarithmus quicumque u ad canonem, in quo numeri a logarithmus $= 1$ statuitur, pertinens. Quaeratur in eodem canone logarithmus x proxime ad u accedens, sitque $u = x + \omega$ numerus autem logarithmo x conveniens sit $y = a^x$, erit numerus logarithmo $u = x$

$$+ \omega \text{ respondens} = a^{x+\omega} = z, \text{ fietque } z = y \left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 la^2}{1.2.} \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3.} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4.} + \text{etc,} \right) \text{ quæ series ob } \omega \text{ nume-}$$

rum valde parvum vehementer converget. Quando terminorum æquationis $y = a^x$ logarithmi sumuntur artificiales, quorum modulus est m , et l denotet logarith-

mum artificialem, fit $ly = xla$, et proinde $m \frac{dy}{y} = dxla$,

$$\text{ex quo fit } \frac{dy}{dx} = \frac{ymla}{m} = \frac{a^x \cdot mla}{m}, \frac{ddy}{dx^2} = a^x \cdot m^2 \frac{(la)^2}{m^2},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = a^x \cdot m^3 \frac{(la)^3}{m^3} \text{ etc. Ideo } a^z = 1 + \frac{zmla}{1 \cdot m} + \frac{z^2 m^2 (la)^2}{1.2. m^2}$$

$$+ \frac{z^3 m^3 (la)^3}{1.2.3. m^3} + \frac{z^4 m^4 (la)^4}{1.2.3.4. m^4} + \text{etc. Quando igi-}$$

tur est a basis logarithmorum artificialium, quorum modulus est m ; hæc æquatio relationem inter basin logarithmicam a et modulum m ostendit. Posito enim $z =$

$$1, \text{ erit } a = 1 + \frac{1 \cdot m}{1 \cdot m} + \frac{1 \cdot m^2}{1.2. m^2} + \frac{1 \cdot m^3}{1.2.3. m^3} + \frac{1 \cdot m^4}{1.2.3.4. m^4}$$

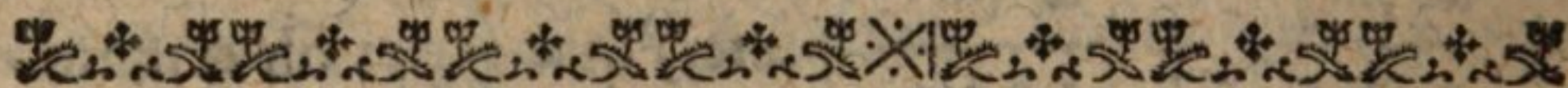
+ etc. Posito autem $m = 1$, fit a basis logarithmorum naturalium $= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \text{etc}$, quæ igitur series hoc modo facilius invenitur, quam per re-

ver.

versionem ferierum (§. 334.). Sit alia quantitas exponentialis quaecunque bz data, atque sumto a pro basi logarithmica sit $b = a^n$, hincque $lb = n$. Ergo cum sit

$$bz = a^{nz}, \text{ erit } bz = 1 + \frac{m^1 z^1}{1 \cdot m} lb + \frac{m^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot m^2} (lb)^2 + \frac{m^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m^3} (lb)^3 + \frac{m^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4} (lb)^4 + \text{etc.}$$

Cognito itaque modulo ex data base a quantitas exponentialis quaecunque bz per seriem infinitam exprimi potest, cujus termini secundum potestates ipsius z procedunt.



SECTIO XXII.

DE

QUANTIS TRANSCENDENTIBVS QVAE A CIRCULO PENDENT.

§. 345.

Cum quævis quantitas ab altera quantitate pendens ita, ut ista mutationem patiatur, prout hæc mutationem subit; cumque sinus arcus cujusdam circularis ab hujus arcus magnitudine, et vice versa magnitudo arcus a magnitudine sinus pendeat: patet arcum circula-rem quemcunque esse functionem sinus ipsius, et vice versa sinum esse functionem arcus sui. Quodsi igitur y denotet arcum circuli, cujus sinus est x , qui arcus sic exprimitur (§. 314.) $A \sin x$, erit $A \sin. x$ vel y functio ipsius x et quidem transcendens, quia ex dato valore ipsius x respondens valor functionis $y = A \sin. x$ exhiberi nequit per operationes, quæ tandem in postulata Geometriae Elementaris resolvuntur. Accedit, quod y sit functio infinitiformis ipsius x , quia eidem sinui x innumera-

merabiles arcus conveniunt. Pari ratione arcum, cujus cosinus est x , ita exprimi docuimus, $A \cos. x$; arcum etiam, cujus tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel sinus versus est x , signis analyticis sic exprimendum esse $A \tan. x$, vel $A \cot. x$, vel $A \sec. x$, vel $A \csc. x$, vel $A \text{sv.} x$, quæ expressiones omnes ob allegatam jam rationem erunt functiones ipsius x transcendentes. Nihilo tamen minus hæ functiones transcendentes geometricè repræsentari possunt modo prorsus simili ei, qua repræsentantur algebraicæ. Quod negotium infra in Geometria sublimiori explicandum erit.

§. 346.

Ex §. 314. sqq. habentur differentialia omnium hujus generis functionum, quæ posito radio $= 1$ erunt

$$d. A \sin. x = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$$

$$d. A \cos. x = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$$

$$d. A \tan. x = \frac{dx}{1+xx}$$

$$d. A \cot. x = \frac{-dx}{1+xx}$$

$$d. A \sec. x = \frac{dx}{x\sqrt{xx-1}}$$

$$d. A \csc. x = \frac{-dx}{x\sqrt{xx-1}}$$

$$d. A \text{sv.} x = \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$$

Quanquam ergo arcus, cujus sinus, vel cosinus, vel tangens, vel cotangens, vel secans, vel cosecans, vel sinus versus datur, est quantitas transcendens, tamen

eius differentiale seu potius ratio $\frac{dy}{dx}$ erit functio alge-

braica

braica, ac propterea quoque, si capiantur differentialia secunda, tertia, quarta et sequentia, erunt $\frac{ddy}{dx^2}$,

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc, functiones algebraicae. Ceterum regulae hujus differentiationis in sequentibus exemplis poterunt applicari.

Si sit $y = A \sin 2x\sqrt{1-xx}$, ponatur $p = 2x\sqrt{1-xx}$ ut sit $y = A \sin p$, erit $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$. Est vero $dp = 2dx\sqrt{1-xx} - \frac{2xxdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}}$, et $\sqrt{1-pp} = 1-2xx$, quibus substitutis erit $dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-xx}}$.

Si sit $y = A \sin \frac{1-xx}{1+xx}$, ponatur $\frac{1-xx}{1+xx} = p$, erit $dp = \frac{-4xdx}{(1+xx)^2}$ et $\sqrt{1-pp} = \frac{2x}{1+xx}$. Quare cum sit $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-pp}}$, habetur $dy = \frac{-2dx}{1+xx}$.

Si sit $y = A \tan \frac{2x}{1-xx}$, fiat $\frac{2x}{1-xx} = p$, et erit $1+pp = \frac{(1+xx)^2}{(1-xx)^2}$ et $dp = \frac{2dx(1+xx)}{(1-xx)^2}$; quare cum sit $dy = \frac{dp}{1+pp}$, erit $dy = \frac{2dx}{1+xx}$.

Si fuerit $y = A \tan \frac{\sqrt{1+xx}-1}{x}$, ponatur $\frac{\sqrt{1+xx}-1}{x} = p$, ut sit $pp = \frac{2+xx-2\sqrt{1+xx}}{xx}$

et

$$\text{et } 1 + pp = \frac{2 + 2xx - 2r(1 + xx)}{xx} = \frac{2(r(1 + xx) - 1)r(1 + xx)}{xx}.$$

$$\text{Est vero } dp = \frac{-dx}{xxr(1 + xx)} + \frac{dx}{xx} = \frac{dx(r(1 + xx) - 1)}{xxr(1 + xx)} \text{ et } dy = \frac{dp}{1 + pp}, \text{ proinde } dy = \frac{dx}{2(1 + xx)}.$$

Quando est $y = e^{A \sin x}$, hæc formula quoque per præcedentia differentiabitur. Fiat enim $dy = e^{A \sin x}$

$\frac{dx}{r(1 - xx)}$. Atque hoc modo omnes functiones variabilis x , in quas præter logarithmos atque exponentiales quantitates etiam arcus circulares ingrediuntur, differentiari poterunt.

Quoniam si sit y ejusmodi functio transcendens ipsius x , quales hucusque consideravimus, $\frac{dy}{dx}$ est functio algebraica, horum functionum differentialia secunda et sequentia per ea, quæ de functionum algebraicarum differentiatione exposita sunt, invenientur. Si nimirum dx sumatur constans, atque sit $y = A \sin x$, erit $\frac{dy}{dx} =$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(1 - xx)^2} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{x}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}, \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}, \\ \frac{d^6y}{dx^6} &= \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}. \end{aligned}$$

§. 347.

Ex serie §. 316. inventa, quæ exprimit arcum circuli ex data tangente, deduci posset series exprimens tangentem ex dato arcu per præcepta §. 252. Atque eodem modo inventa per calculum integralem serie, quæ exprimit arcum ex dato sinu, cosinu, etc, *per reversionem* deduceretur series exprimens sinum, cosinum, etc, ex dato arcu. Sed breviori via ejusmodi series eruuntur ipsius calculi differentialis ope. Atque ut methodus eum in finem ab Analystis excogitata explicari possit, quærendæ sunt formulæ differentiales pro sinu, cosinu, tangente, etc. ex dato arcu.

Sit igitur x arcus circuli, et $\sin. x$ denotet ejus sinum, cujus differentiale investigamus. Ponamus $y =$

$\sin. x$, erit $x = A \sin. y$ et $dx = \frac{dy}{r(1-yy)}$, at ob $y =$

$\sin. x$, erit $\cos. x = r(1-yy)$, quo valore substituto erit

$dx = \frac{dy}{\cos. x}$ et $dy = dx \cos. x$. Inde regula: *Differential*

iale sinus arcus cujusvis æquale est differentiali arcus per cosinum multiplicato. Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x erit simili modo $d. \sin. p = dp \cos. p$. Deinde si fuerit $y = \cos. x$, erit $r(1-yy) = \sin. x$ et $x = A \cos. y$,

proinde $dx = \frac{-dy}{r(1-yy)} = \frac{-dy}{\sin. x}$, unde habetur dy

$= -dx \sin. x$. *Differential* igitur *cosinus cujusque arcus dati æquale est differentiali arcus negative sumto per sinum ejusdem arcus multiplicato.* Atque si fuerit p functio quaecunque ipsius x erit $d. \cos. p = -dp \sin. p$.

§. 348.

Quando est $y = \tan. x$, eris $x = A \tan. y$, et per

præcepta superiora fiet $dx = \frac{dy}{1+yy}$. Est vero $y =$

tang.

tang. x, proinde $1 + yy = \sec. x^2 = \frac{1}{\cos. x^2}$, atque dx

$= dy \cos. x^2$, et $dy = \frac{dx}{\cos. x^2}$. Tangentis ergo cujusvis

arcus differentiale aequale est differentiali arcus diviso per quadratum cosinus ejusdem arcus. Simili modo si propo-

natur $y = \cot. x$, fiet $x = A \cot. y$ et $dx = \frac{-dy}{1 + yy}$. Sed

erit $r(1 + yy) = \operatorname{cosec}. x = \frac{1}{\sin. x}$, unde habetur $dx =$

$-dy \sin. x^2$, et $dy = \frac{-dx}{\sin. x^2}$. Proinde cotangentis dif-

ferentiale aequatur differentiali arcus sui negative sumto per quadratum sinus ejusdem arcus diviso. Quia est $\cot.$

$x = \frac{\cos. x}{\sin. x}$, fiet hanc fractionem differentiendo $dy =$

$\frac{-dx \sin. x^2 - dx \cos. x^2}{\sin. x^2} = \frac{-dx}{\sin. x^2}$, ut ante. Si

proponatur secans arcus, ut sit $y = \sec. x$, quia erit

$y = \frac{1}{\cos. x}$, fiet $dy = \frac{dx \sin. x}{\cos. x^2} = dx \operatorname{tang}. x \sec. x$. Si-

mili modo si fuerit $y = \operatorname{cosec}. x$, ob $y = \frac{1}{\sin. x}$, erit dy

$= \frac{-dx \cos. x}{\sin. x^2} = -dx \cot. x \operatorname{cosec}. x$, pro quibus casibus

regulas peculiares formare superfluum foret. Si sinus versus arcus proponatur, ut sit $y = \operatorname{sv}. x$, quia est $y = 1 - \cos. x$, erit $dy = dx \sin. x$. Omnes igitur casus, quibus linea quaedam recta ad arcum circuli relata proponitur, quia semper per sinum cosinumve exprimi potest, sine difficultate differentitari poterunt. Neque ve-

ro tantum differentialia prima, sed etiam secunda et sequentia per regulas datas invenientur.

§. 349.

Ponamus esse $y = \sin. x$, et $z = \cos. x$, atque dx esse constans, erit

$$\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} = \cos. x & \frac{dz}{dx} = -\sin. x \\ \frac{ddy}{dx^2} = -\sin. x & \frac{ddz}{dx^2} = -\cos. x \\ \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos. x & \frac{d^3z}{dx^3} = \sin. x \\ \frac{d^4y}{dx^4} = \sin. x \text{ etc.} & \frac{d^4z}{dx^4} = \cos. x \text{ etc.} \end{array}$$

Pari ratione si fuerit $y = \text{tang. } x$, et ponatur dx constans, habetur

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos. x^2}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{2 \sin. x}{\cos. x^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{\cos. x^4} - \frac{4}{\cos. x^2}, \\ \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24 \sin. x}{\cos. x^5} - \frac{8 \sin. x}{\cos. x^3}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{120}{\cos. x^6} - \frac{120}{\cos. x^4} + \\ \frac{16}{\cos. x^2}, \quad \frac{d^6y}{dx^6} = \frac{720 \sin. x}{\cos. x^7} - \frac{480 \sin. x}{\cos. x^5} + \frac{32 \sin. x}{\cos. x^3}, \\ \frac{d^7y}{dx^7} = \frac{5040}{\cos. x^8} - \frac{6720}{\cos. x^6} + \frac{2016}{\cos. x^4} - \frac{64}{\cos. x^2} \text{ etc.} \end{array}$$

§. 350.

Secundum hæc præcepta quæcunque functiones, in quas sinus vel cosinus arcuum ingrediuntur, differentiari poterunt, cujus rei exempla erunt sequentia.

Si fit $y = 2 \sin. x \cos. x = \sin 2x$, erit $dy = 2dx \cos x^2 - 2dx \sin. x^2 = 2dx \cos. 2x$.

Si sit $y = \cos. l \frac{1}{x}$, erit posito $l \frac{1}{x} = p$, $y = \cos. p$, proinde $dy = -dp \sin. p$. At, ob $p = li - lx$, erit $dp =$

$$= -\frac{dx}{x}, \text{ ideoque } dy = \frac{dx}{x} \sin. l \frac{1}{x}.$$

Si fit $y = e^{\sin. x}$, erit $dy = e^{\sin. x} dx \cos. x$.

Si fit $y = e^{\cos. x}$, erit $dy = -\frac{e^{\cos. x} ndx \sin. x}{\cos. x^2}$.

Si fit $y = l(1 - r(1 - e^{\sin. x}))$, ponatur $e^{\sin. x} = p$, atque ob $y = l(1 - r(1 - p))$ erit $dy =$

$$\frac{dp}{2(1 - r(1 - p))r(1 - p)}. \text{ At est } dp = \frac{e^{\sin. x} ndx \cos. x}{\sin. x^2},$$

Hoc igitur valore substituto prodibit $dy =$

$$\frac{e^{\sin. x} ndx \cos. x}{2 \sin. x^2 (1 - r(1 - e^{\sin. x}))r(1 - e^{\sin. x})}$$

$$2 \sin. x^2 (1 - r(1 - e^{\sin. x}))r(1 - e^{\sin. x})$$

§. 351.

Quando est $y = \sin. x$, ac loco x ponatur $x + z$,
functio y abit in $y + \frac{z dy}{dx} + \frac{z^2 d^2 y}{1.2 dx^2} + \frac{z^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} +$
 $\frac{z^4 d^4 y}{1.2.3.4. dx^4} + \text{etc.}$ Cum igitur sit $\frac{dy}{dx} = \cos. x$, $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

$$-\sin. x, \frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos. x, \text{ etc, habetur } \sin(x + z) = \sin.$$

$$x + z \cos. x - \frac{1}{2} z^2 \sin. x - \frac{1}{6} z^3 \cos. x + \frac{1}{24} z^4 \sin. x +$$

etc, et sumto z negativo $\sin(x - z) = \sin. x - z \cos. x -$
 $\frac{1}{2} z^2 \sin. x + \frac{1}{6} z^3 \cos. x + \frac{1}{24} z^4 \sin. x - \text{etc.}$ Quod si ve-

ro statuatur $y = \cos. x$, ob $\frac{dy}{dx} = -\sin. x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos. x$,

$\frac{d^3y}{dx^3} = \sin. x$, $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos. x$, etc, habemus $\cos. (x+z) =$

$\cos. x - z \sin. x - \frac{1}{2} z^2 \cos. x + \frac{1}{6} z^3 \sin. x + \frac{1}{24} z^4 \cos. x$
 - etc. et posito z negativo erit $\cos. (x-z) = \cos. x + z$
 $\sin. x - \frac{1}{2} z^2 \cos. x - \frac{1}{6} z^3 \sin. x + \frac{1}{24} z^4 \cos. x +$ etc. Po-
 sito igitur $x = 0$, cum sit $\cos. x = 1$, et $\sin. x = 0$, ha-
 betur $\sin. z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 +$ etc, et
 $\cos. z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{720} z^6 +$ etc. Dato ergo
 arcu z , ope harum serierum ejus finus et cosinus inveni-
 ri poterunt, posito sinu toto = 1. Ponatur arcus 90
 graduum = r ; et ponamus esse arcum z ad quadrantem

ut $m:n$, seu esse $z = \frac{m}{n} r$, fiet $\sin. \frac{m}{n} r = \frac{m}{n} r -$

$\frac{m^3}{n^3} \times \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{m^5}{n^5} \times \frac{r^5}{1.2.3.4.5} -$ etc, et $\cos. \frac{m}{n} r = 1 -$

$\frac{m^2}{n^2} \times \frac{r^2}{1.2.} + \frac{m^4}{n^4} \times \frac{r^4}{1.2.3.4} - \frac{m^6}{n^6} \times \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6} +$

etc. Denotante igitur π semiperipheriam circuli erit

$r = \frac{\pi}{2} = 1, 570796326794896619231313216916.$

Substituto igitur hoc valore pro r , habemus $\sin. \frac{m}{n} r =$

$+\frac{m}{n} \times 1, 5707963267948966192313216916$

$-\frac{m^3}{n^3} \times 0, 6459640975062462536557565636$

$+\frac{m^5}{n^5} \times 0, 0796926262461670451205055488$

$$+ \frac{m^4}{n^4} 0, 2536695079010480136365633659$$

$$- \frac{m^6}{n^6} 0, 0208634807633529608730516364$$

$$+ \frac{m^8}{n^8} 0, 0009192602748394265802417158$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} 0, 0000252020423730606054810526$$

$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} 0, 0000004710874778818171503665$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} 0, 0000000063866030837918522408$$

$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} 0, 0000000000656596311497947230$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} 0, 000000000000005294400200734620$$

$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} 0, 000000000000000034377391790981$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} 0, 000000000000000000183599165212$$

$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} 0, 00000000000000000000820675327$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} 0, 0000000000000000000003115285$$

$$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} 0, 0000000000000000000000010165$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} 0, 0000000000000000000000000026.$$

Cum igitur sufficiat, sinus et cosinus angulorum ad 45°
nosse,

nosse, fractio $\frac{m}{n}$ semper minor erit quam $\frac{1}{2}$, hinc-

que etiam ob potestates fractionis $\frac{m}{n}$ series exhibitae maxime convergent, ita ut plerumque aliquot tantum termini sufficiant, praecipue si sinus et cosinus non ad tot figuras desiderentur.

§. 352.

Inventis sinibus et cosinibus inveniuntur tangentes, cotangentes, secantes, cosecantes, sinus versi ex formu-

$$\text{lis } \text{tang. } z = \frac{\sin. z}{\cos. z}, \text{ cot. } z = \frac{\cos. z}{\sin. z}, \text{ sec. } z = \frac{1}{\cos. z},$$

$$\text{cosec. } z = \frac{1}{\sin. z}, \sin. v. z = 1 - \cos. z. \quad \text{Atque ex his}$$

patet modus, quo canon finuum tangentium etc, construui possit. Quo constructo simul logarithmi finuum

etc, tam naturales quam vulgares inveniuntur secundum praecepta §. 335. Ubi iterum tantum opus est, ut logarith-

mi finuum et cosinuum per series l. c. exhibitas computentur, quia reliquarum hujus generis linearum ad ar-

cum circuli relatarum per solam additionem et subtractionem ex logarithmis finuum habentur. Est enim $l \text{ tang.}$

$$z = l \sin. z - l \cos. z, \quad l \text{ cot. } z = l \cos. z - l \sin. z, \quad l \text{ sec. } z = l 1 - l \cos. z,$$

$$l \text{ cosec. } z = l 1 - l \sin. z, \quad \text{et quia } \sin. v. z = \frac{\sin. \frac{1}{2} z \times \sin. z}{\cos. \frac{1}{2} z}, \text{ erit } l \sin. v. z = l \sin. \frac{1}{2} z + l \sin. z - l \cos. \frac{1}{2} z.$$

$\frac{1}{2} z$. Quodsi igitur pro rectis hisce ad arcus circulares relatis supputentur logarithmi naturales, multiplicandi

erunt omnes per numerum 0, 434294481 etc, ut habeantur vulgares. In tabulis autem vulgaribus sinus totus

non ponitur = 1 sed = 10000000000, proinde omnes numeri pro sinibus et reliquis hisce rectis inventi per

hunc numerum debent multiplicari, quod facile fit, locum unitatis a sinistra versus dextram per 10 loca remo-

vendo, ut habeantur numeri tabulares pro hisce rectis. Et parem ob rationem logarithmis inventis addi debet 100000000000, qui est 10, ut habeantur logarithmi tabulares,

§. 353.

F.292.

Cæterum quia sinuum immediata ex arcu inventio non careat prolixitate calculorum, quam plura ad calculum abbreviandum excogitata sunt compendia, quorum unum, quod instar omnium commendari potest, hic adpoluisse sufficiat. Sint BL et PB duo arcus quicunque, atque sit $BL > PB$. Facto $BD = PB$, ducatur diameter BG atque ad eandem ex P et D. demittantur perpendiculares PH et DR eæque producantur, donec peripheriæ apud F et I occurrant; erit $GI = BD = FG$, proinde arcus FCBD = semicirculo, et junctis F et D, recta FD fit diameter per centrum A tranfiens. Ex L ad FD demittatur perpendicularis LK, atque juncta DL ad eandem sit AQ perpendicularis. Erit jam angulus CDF = CLF, et quia $\triangle DER \sim \triangle EKL$ erit ang. EDR = ELK, proinde CDF + EDR = CLF + ELK, id est CDR = KLF. Ergo $\triangle DCR \sim \triangle FLK \sim \triangle DKL$. Unde concluditur $CD : CR = DL : LK$. Porro est $\triangle AQD \sim \triangle LDK \sim \triangle LDE$, proinde $DL : LK = DF : FL$, $AD : CR = DF : FL$, ex qua analogia concluditur $\frac{1}{2}CD : CR = \frac{1}{2}DF : FL$. Est vero $\frac{1}{2}CD = \sin \frac{1}{2}(BL + PB)$, $CR = \sin BL + \sin PB$, $\frac{1}{2}DF = AD =$ radius, qui sit = r . Denique AQ ipsi FL parallela, et proinde ob $DF : DA = FL : AQ$ fit $FL = 2AQ = 2 \cos \frac{1}{2}(BL - PB)$. Posito itaque $BL = a$ et $PB = \alpha$, erit $\sin \frac{1}{2}(a + \alpha) : \sin a + \sin \alpha = r : 2 \cos \frac{1}{2}(a - \alpha)$. In tabulis arcus, quorum sinus supputantur, sunt æquidifferentes. Proinde ratio $2 \cos \frac{1}{2}(a - \alpha)$ evadit constans. Arcus $\frac{1}{2}(a + \alpha)$ est medius arithmetice proportionalis inter arcus a et α , qui si ponatur = m , erit ratio $\sin m : \sin a + \sin \alpha$ constans. Proinde si duo alii arcus sint b et β , et medius inter eosdem arithmetice proportionalis sit μ , erit

erit semper $\sin. m : \sin. a + \sin. a = \sin. \mu : \sin. b + \sin. \beta$.
Si igitur dantur sinus arcuum m a μ b , datur sinus ar-
cus β . Et hoc modo sinus ex datis quinque veluti pri-
mitivis vel adeo tribus tantum ordine se consequentibus
et utcumque in Canone fitis supputari possunt reliqui o-
mnes, quod patebit ex sequenti exemplo.

§. 354.

Dentur sinus arcuum $6^\circ 25'$, $6^\circ 26'$, $6^\circ 27'$, et
quærat^r sinus arcus $6^\circ 28'$. Proinde habemus

Sinus arcus a $6^\circ 25' = 0, 1117580$

sinus arcus m $6^\circ 26' = 0, 1120471$

sinus arcus a $6^\circ 27' = 0, 1123361$

sinus arcus b $6^\circ 26' = 0, 1120471$

sinus arcus μ $6^\circ 27' = 0, 1123361$

sinus arcus β $6^\circ 28' =$

$\sin. m : \sin. a + \sin. b = \sin. \mu : \sin. b + \sin. \beta$

$0, 1120471 : 0, 2240941 = 0, 1123361 : \sin. b + \sin. \beta$

Proinde est $\sin. b + \sin. \beta = 0, 224672$

subtrahatur $\sin. b = 0, 112047$

et invenitur $\sin. \beta = 0, 112625$

Quodsi hujus analogiæ ope supputentur sinus omnium
arcuum ab $1'$ usque ad $89^\circ 59'$ pro cosinibus peculiari
calculo opus non est, quia iidem tum simul habentur.
Logarithmi tum supputandi sunt pro quadrantis semis-
se. Atque ex ipsis tum colligendi reliqui facile erunt
per solam additionem et subtractionem. Sit enim ar-
cus $BR = RD$, ducatur chorda BD et radius CR , qui
chordam BD apud Q normaliter secabit. Ducatur QG
ad CB perpendicularis et bissecetur CB apud O , erit CB
 $: BQ = CQ : QG$ et $CB : CO = DB : BQ = DE : QG$.
Proinde $BQ \times CQ = CO \times DE = CB \times QG$ et $BQ :$
 $CO = DE : CQ$. Denotato igitur arcu RB littera x ; erit
 $\sin x : \frac{1}{2}r = \sin 2x : \cos x$, et proinde $l \cos x = l \frac{1}{2}r + l \sin$
 $2x - l \sin x$. Sic ex logarithmis sinuum $22^\circ 30' 44''$ in-
venitur logarithmus $\cos 22^\circ$ seu logarithmus sinus 68° ,

X x 5

qui

Fig. 291.

qui est minimus eorum, qui hac methodo inveniri possunt, si ipsi sinus non ultra 45° fuerint computati, quia est arcus $2 \times 23^\circ = 46^\circ$, qui ignoratur.



SECTIO XXIII.

DE

REDVCTIONE INTEGRALIVM AD HYPERBOLAE ET CIRCULI QVADRATURAM.

§. 355.

Quia differentiale logarithmi variabilis cujuscunque est differentiale hujus variabilis per ipsam variabilem divisum et per modulum systematis logarithmici multiplicatum; vicissim sequitur, *quod integrale fractionis, cujus numerator est differentiale denominatoris per constantem multiplicatum, sit logarithmus denominatoris, cujus modulus invenitur multiplicando differentiale propositum per eam quantitatem, cujus logarithmus est integrale questum, et dividendo per differentiale, hujus quantitatis.*

Sic erit $m \frac{dx}{x} = lx$, ubi primo determinanda est quan-

titas constans adjicienda, ut integrale completum evadat. Quando hoc integrale est $= 0$, posito $x = 1$, fit $l1 + C = 0$, proinde $C = -l1 = -0$, atque hoc casu lx est integrale completum, quod etiam ex eo patet, quod

fit $lx - l1 = l \frac{x}{1} = lx$. Multiplicetur nunc $m \frac{dx}{x}$ per

x , et quod prodit dividatur per dx erit quotus = modu-
lo

lo m . Quando est $\int m \frac{dx}{x} = 0$, si $x = a$, fit $la + C = 0$,

proinde $C = -la$, et $\int m \frac{dx}{x} = lx - la = l \frac{x}{a}$. Quan-

do est $\int m \frac{dx}{x} = 0$, si $x = \frac{1}{b}$ fit $l \frac{1}{b} + C = 0$, proinde

$C = -l \frac{1}{b}$ et $\int m \frac{dx}{x} = lx - l \frac{1}{b} = lbx$. Modulus

pariter invenitur multiplicando $m \frac{dx}{x}$ per $\frac{x}{a}$ vel bx ,

et quod prodit dividendo per $\frac{dx}{a}$ vel bdx .

§. 356.

Quærendum sit integrale hujus formulæ differentialis
 $\frac{z^{n-1} dz}{e + fz^n}$, atque statim observo, numeratorem hujus fra-

ctionis esse differentiale denominatoris per constantem
 $\frac{1}{nf}$ multiplicatum. Proinde ejus integrale est $l(e + fz^n)$

+ C , quod igitur erit $l(e + fz^n) - le = l \frac{e + fz^n}{e}$, si fiat

$\int \frac{z^{n-1} dz}{e + fz^n} = 0$, posito $z^n = 0$. Modulus invenitur

multiplicando $\frac{z^{n-1} dz}{e + fz^n}$ per $\frac{e + fz^n}{e}$ et quod prodit, di-

videndo per $\frac{nfz^{n-1} dz}{e}$, quotus $\frac{1}{nf}$ erit modulus. Quia

ratio logarithmi artificialis cujuscunque numeri ad loga-
 rithmum naturalem ejusdem numeri perpetuo est $m : 1$;
 integrale inventum, denotante l logarithmum natura-
 lein

lem sic exprimi potest $\frac{1}{nf} l \frac{e + f2^n}{e}$. Interdum si

functio fracta differentialis unius variabilis x integranda proponatur, quæ ea destituta est proprietate, qua ejus numerator est differentiale denominatoris; ejus numerator et denominator per talem functionem ipsius x multiplicari possunt, quæ efficit, ut ea functionis propo-

sitæ forma restituatur. Sit integranda functio $\frac{dx}{r(xx-1)}$,

atque sub hac forma ejus integrale per quadraturam hyperbolæ exprimi non potest. Quodsi vero numerator et denominator per $x + r(xx-1)$ multiplicetur; fiet

$$\frac{dx}{r(xx-1)} = \frac{xdx + dx r(xx-1)}{(x + r(xx-1))r(xx-1)} = \frac{dx + \frac{xdx}{r(xx-1)}}{x + r(xx-1)}$$

cujus proinde integrale est $l(x + r(xx-1))$. Pari modo

si integranda proponatur fractio $\frac{dx r-1}{r(1-xx)}$, numeratore

et denominatore per $xr-1 + r(1-xx)$ multiplicato fit

$$\frac{dx r-1}{r(1-xx)} = \frac{-xdx + dx r-1 \cdot r(1-xx)}{(xr-1 + r(1-xx))r(1-xx)} =$$

$$\frac{dx r-1 - \frac{xdx}{r(1-xx)}}{xr-1 + r(1-xx)}.$$

Integrale igitur quæsitum est

$$l(xr-1 + r(1-xx)).$$

§. 357.

Integranda nunc proponatur fractio $dy = \frac{dx}{1-xx}$,

atque sub hac forma ejus integrale ad logarithmos revo-

cari non posse observe. Est autem fractio $\frac{1}{1+xx} =$

$$\frac{1}{2(1+x)}$$

$$\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}, \text{ proinde } dy = \frac{dx}{2(1+x)} +$$

$$\frac{dx}{2(1-x)}, \text{ ubi uterque terminus est differentiale loga-}$$

rithmicum. Posito itaque in primo termino $2+2x = u$, erit $2dx = du$, et $dx = \frac{1}{2}du$. Posito præterea in

secundo termino $2-2x = z$, erit $-2dx = dz$, et dx

$$= \frac{1}{2}dz, \text{ Quibus valoribus substitutis erit } dy = \frac{du}{2u} -$$

$$\frac{dz}{2z}, \text{ et proinde } y = \frac{1}{2}lu - \frac{1}{2}lz = \frac{1}{2}l(2+2x) - \frac{1}{2}l(2-$$

$$2x) = \frac{1}{2}l \frac{2+2x}{2-2x} = \frac{1}{2}l \frac{1+x}{1-x}, \text{ vel quoque } y = l \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Hoc integrale geometricè inveniri potest sequentem in modum. Centro C et semiaxibus CA et CB descripta sit F.293.

hyperbola æquilatera AP. Ex centro C ad punctum hyperbolæ quodcunque P ducatur recta CP, secans rectam AB in D. Deinde ex puncto P ad axem CA ducta sit

applicata orthogonalis PK, quæ prolongata occurrat asymptotæ CB in I. Ex punctis A et P ad asymptotam cadant normales AH et PQ; erit sector hyperbolicus CAP, vel quadrilaterum hyperbolicum APQH mensura

rationis CQ:CH, quæ = AH:PQ. Sed $\triangle ABH \sim \triangle PIQ$, proinde $AH:PQ = AB:IP$. Præterea $(KI+KP) \times IP = AB^2$ (§. 303.) vel $KI+KP:AB = AB:IP$.

Jam in omni proportionē geometrica continua, ut $a:am = am:am^2$, concludi potest, esse $a:am^2 = a^2:a^2m^4$.

Ideo ex proportionē $KI+KP:AB = AB:IP$ sequitur $KI+KP:IP = (KI+KP)^2:AB^2$, hincque

$\sqrt{KI+KP}:\sqrt{IP} = KI+KP:AB$. Insuper $\triangle CAD \sim \triangle CKP$ et $\triangle CAB \sim \triangle CKI$, unde $AB:AD = KI:KP$,

ergo $AB+AD:AB = KI+KP:KI$, et $AB-AD:AB = IP:KI$, unde $AB+AD:AB-AD = KI+KP:IP$,

et $\sqrt{AB+AD}:\sqrt{AB-AD} = (KI+KP):\sqrt{IP} =$

AH

AH : PQ. Sit itaque $CA = AB = 1$, erit $CH = AH = \frac{1}{r^2}$, $AD = x$, $CK = y$, $CQ = u$; erunt rationes se-

$$\text{quentes omnes æquales } \frac{u}{r^2} = \frac{1}{y - r(yy-1)} = \frac{y + r(yy-1)}{r(y - r(yy-1))} = r \frac{1+x}{1-x}; \text{ et}$$

sector CAP est logarithmus cujuscunque harum rationum pro modulo $= \frac{1}{2}$, id est sector CAP $= \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$, si l denotet logarithmum naturalem, uti hic perpetuo supponitur.

Hinc $2CAP = l r \frac{1+x}{1-x}$, et integrale quæsitum $y =$

$$\int \frac{dx}{1+xx} = 2CAP. \text{ Est itaque } \frac{1}{2} y = \int \frac{dx}{2(1+xx)} =$$

CAP, unde habetur nova methodus exprimendi aream sectoris hyperbolici ex data AD, quæ hyperbolam in vertice tangit, et inter crura sectoris CAP intercipitur.

§. 358.

Si integranda sit hæc formula $dy = \frac{dx}{1+xx}$, quæ a priori non differt nisi signo, quod in denominatore quadrato xx præfixum est; modo prorsus simili ad integrationem pervenitur. Est enim fractio $\frac{1}{1+xx} =$

$$\frac{1}{2(1+xr-1)} + \frac{1}{2(1-xr-1)}, \text{ et proinde } dy =$$

$$\frac{dx}{2+2xr-1} + \frac{dx}{2-2xr-1}. \text{ Pro priori itaque termino sit}$$

$$2+2xr-1=u, \text{ erit } 2dxr-1=du, \text{ et } dx = \frac{1}{2r-1} du.$$

Pro

Pro termino secundo sit $2-2x\sqrt{-1}=z$, erit $-2dx\sqrt{-1}=dz$ atque

$$dx = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} dz. \text{ Ergo est } dy = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{du}{u} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot$$

$$\frac{dz}{z}, \text{ atque } y = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (lu - lz) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l((2+2x\sqrt{-1}) - l(2$$

$$-2x\sqrt{-1})) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} l \frac{r(1+x\sqrt{-1})}{r(1-x\sqrt{-1})},$$

quæ expressio licet quantitatibus imaginariis inquinetur, tamen minime impossibilem, sed utique realem denotat quantitatem, quia evoluta hac expressione per seriem signa imaginaria se mutuo tollunt. Ex §. 333. enim est

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{2x\sqrt{-1}}{1} - \frac{2x^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{2x^5\sqrt{-1}}{5} -$$

$$\frac{2x^7\sqrt{-1}}{7} + \text{etc, quæ series multiplicata per } \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ dat}$$

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc, quæ est expres-}$$

sio arcus circularis, cujus tangens est x et radius $= 1$

(§. 316.), unde patet, esse $y = \int \frac{dx}{1+xx} = A \text{ tang. } x$,

quod etiam ex §. 346. et 315. immediate sequitur. Hæc causa est, cur arcus circulares a quibusdam Analystis *logarithmi imaginarii* vocentur, quod quomodo intelligendum sit, ex his patet. Quia est sector circuli, cu-

jus arcus est $\int \frac{dx}{1+xx}$ et radius 1, $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+xx} =$

$$\int \frac{dx}{2(1+xx)} = \frac{1}{4\sqrt{-1}} \cdot l \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot$$

$$l \frac{r(1+x\sqrt{-1})}{r(1-x\sqrt{-1})}; \text{ etiam sectores circulares logarithmi imaginarii interdum vocantur. Quod igitur ita non}$$

intelligi debet, ac si arcus vel sectores circulares essent quantitates imaginariae, quippe quae utique reales sunt. Usus iste loquendi tantum introductus est ad indicandam analogiam, quæ intercedit inter formulas algebraicas, quibus sectores hyperbolici et arcus vel sectores circulares ex data tangente exprimuntur. Quia est $A \text{ tang. } x$

$$= \int \frac{dx}{1+xx} = \frac{1}{2r-1} \cdot l \frac{1+x}{1-x}, \text{ si } y \text{ denotet hunc arcum, ut sit } y = A \text{ tang. } x; \text{ erit } x = \text{tang. } y, \text{ et proinde arcus } y \text{ ex sua tangente ita potest exprimi } y = \frac{1}{2r-1}$$

$$l \frac{1+\text{tang. } y \cdot r-1}{1-\text{tang. } y \cdot r-1}. \text{ Est vero } \text{tang. } y = \frac{\sin. y}{\cos. y}, \text{ pro-$$

$$\text{inde arcus } y \text{ sic quoque potest exprimi } y = \frac{1}{2r-1} \cdot$$

$$l \frac{1 + \frac{\sin. y \cdot r-1}{\cos. y}}{1 - \frac{\sin. y \cdot r-1}{\cos. y}} = \frac{1}{2r-1} \cdot l \frac{\cos. y + \sin. y \cdot r-1}{\cos. y - \sin. y \cdot r-1}.$$

§. 359.

Prouti hoc modo arcus circulares ut logarithmi imaginarii formulis algebraicis repræsentantur; ita quoque sinus, cosinus, tangentes, cotangentes arcuum circularium ut quantitates exponentiales imaginariae repræsentari solent. Si fuerit $z = A \sin. x$, habetur $dz =$

$$\frac{dx}{r(1-xx)} \text{ (§. 346.). Proinde } dzr-1 = \frac{dxr-1}{r(1-xx)},$$

$$\text{atque } zr-1 = \int \frac{dxr-1}{r(1-xx)} = l(xr-1 + r(1-xx))$$

(§. 356.). Ergo, si e denotet basin logarithmorum naturalium, est $e^{zr-1} = xr-1 + r(1-xx)$, unde conclu-

cluditur $e^{2r-1} - xr - 1 = r(1 - xx)$, vel sum-
to utriusque membri quadrato $e^{2xr-1} - 2e^{2r-1}$
 $xr - 1 - xx = 1 - xx$. Unde $e^{2xr-1} - 1 = 2e^{2r-1}$
 $xr - 1$, et $xr - 1 = \frac{e^{2xr-1} - 1}{2e^{2r-1}} = \frac{e^{2r-1} - e^{-2r-1}}{2}$.

Proinde $x = \sin. z = \frac{e^{2r-1} - e^{-2r-1}}{2r - 1}$. Deinde ex æ-

quatione $e^{2r-1} = xr - 1 + r(1 - xx)$ sequitur e^{-2r-1}
 $= \frac{1}{xr - 1 + r(1 - xx)} = -xr - 1 + r(1 - xx)$. Sed

$-xr - 1 = r(1 - xx) - e^{2r-1}$, proinde $e^{-2r-1} =$
 $2r(1 - xx) - e^{2r-1}$; $2r(1 - xx) = e^{-2r-1} + e^{2r-1}$;
et $r(1 - xx) = \cos. z = \frac{e^{2r-1} + e^{-2r-1}}{2}$. Insuper quia

est $\tan. z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$; erit $\tan z = \frac{e^{2r-1} - e^{-2r-1}}{(e^{2r-1} + e^{-2r-1})r - 1}$

$= \frac{e^{2xr-1} - 1}{(e^{2xr-1} + 1)r - 1}$. Denique $\cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z} =$

$\frac{(e^{2r-1} + e^{-2r-1})r - 1}{e^{2r-1} - e^{-2r-1}} = \frac{(e^{2xr-1} + 1)r - 1}{e^{2xr-1} - 1}$.

De his formulis idem tenendum est, quod de formulis
§phi antecedentis est monitum. Evolutis iisdem per
series (§. 344.) signa imaginariorum se mutuo tollunt,
et ipsæ formulæ omnino reales evadunt.

§. 360.

Prouti hic inventum est $\int \frac{dx}{1+xx} = A \text{ tang. } x$;
ita quoque ex §. 346. concluditur, esse

$$\int \frac{-dx}{1+xx} = A \cot. x$$

$$\int \frac{dx}{r(1-xx)} = A \sin. x$$

$$\int \frac{-dx}{r(1-xx)} = A \cos. x$$

$$\int \frac{dx}{xr(xx-1)} = A \sec. x$$

$$\int \frac{-dx}{xr(xx-1)} = A \csc. x$$

$$\int \frac{dx}{r(2x-xx)} = A \text{ sv. } x.$$

Si itaque fuerit $dy = \frac{adx}{aa+xx}$, quia $\frac{adx}{aa+xx} =$

$$\frac{dx}{a + \frac{xx}{a}} = \frac{dx}{a} : 1 + \frac{xx}{aa}; \text{ erit } y = A \text{ tang. } \frac{x}{a}. \text{ Si}$$

vero sit $y = \frac{dx}{r(aa-xx)}$, quia $\frac{dx}{r(aa-xx)} =$

$$\frac{dx : a}{r(aa-xx) : a} = \frac{dx}{r(1 - \frac{xx}{aa})}, \text{ erit } y = A \sin$$

$\frac{x}{a}$; qui casus hisque similes facile solvuntur. Si sit

$dy = \frac{aadx}{aa+xx}$, erit quidem pariter $y = A \text{ tang. } x$, sed
radius

radius non est $= 1$, nisi $a = 1$. Quare ut verum integrale habeatur observandum est primo, quod ex hypothesis sit $a : x = r : \text{tangente} \text{ arcus } y$, si r denotet numerum, quo exprimitur radius pro quo tabulæ sinuum et tangentium sunt computati, quam hic ponere possumus $= 1$. Proinde ex hac analogia habetur $\text{tang. } y =$

$\frac{x}{a}$ pro radio $= 1$ et proinde $y = A \text{ tang } \frac{x}{a}$ pro radio $= 1$. Sed quæritur iste arcus pro radio $= a$. Quia igitur arcus similes sunt ut radii, erit $1 : a = A \text{ tang } \frac{x}{a}$

$: y = a A \text{ tang } \frac{x}{a}$. Idem quoque exinde perspicitur,

$$\text{quia } \int \frac{aadx}{aa + xx} = a \int \frac{adx}{aa + xx} = a \times A \text{ tang } \frac{x}{a}.$$

§. 361.

Prouti igitur magnitudo potentia hyperbolæ vel quoque diversa denominatio ejusdem potentia determinat magnitudinem sectorum vel quadrilaterorum hyperbolicorum, quæ sunt mensuræ rationum, in asymptota ipsis respondentium; ita quoque radius, quo arcus inter crura anguli cujusdam describitur, determinat illius arcus magnitudinem. Mensuræ ejusdem rationis sunt ut hyperbolarum potentia. Ita quoque mensuræ ejusdem anguli sunt ut radii, quibus describuntur. Haec causa est, cur radius hic quoque vocetur *Modulus* eorum integralium, quæ per arcus circulares seu mensuras an-

gulorum exprimuntur. Integrale itaque $\int \frac{aadx}{aa + xx}$ ita

poterit exprimi $aA \text{ tang } \frac{x}{a}$, si expressio $A \text{ tang } \frac{x}{a}$

semper indicet longitudinem illius arcus cujus tangens est

Y y 2

$\frac{x}{a}$

$\frac{x}{a}$ pro radio = 1, eodem modo, uti supra expressio lx semper denotavit logarithmum numeri x cujus modulus est = 1. Quodsi denique differentiale $\frac{aadx}{aa+xx}$ per constantem quandam C multiplicatum fit; integrale $aA \operatorname{tang} \frac{x}{a}$ per eandem constantem C debet multiplicari, ut sit $\int \frac{Caadx}{aa+xx} = CaA \operatorname{tang} \frac{x}{a}$. Ex his itaque generationem concludimus sequentem propositionem. Quoties integranda proponitur fractio rationalis, cujus denominator est binomium, ubi unus terminus est quadratum constantis cujusdam ut a , alter vero quadratum variabilis cujusdam ut x ; numerator autem sit productum ex quadrato constantis a in differentiale variabilis dx per novam forsan constantem multiplicatum; toties integrale illius fractionis exprimi potest per arcum circuli. Idem accidet, si fractio ad ejusmodi formam sit reducibilis, licet prouti proponitur, ea forma sit destituta.

§. 362.

Integranda proposita sit fractio $dy = \frac{gdx}{e+fxx}$, atque eadem primo eo reduci debet, ut denominatoris terminus fxx non alium præter unitatem habeat coefficientem, quod fiet numeratorem et denominatorem per f dividendo.

$$\text{Erit enim } dy = \frac{\frac{g}{f} dx}{\frac{e}{f} + xx} = \frac{\frac{g}{f} dx}{r \frac{e}{f} + r \frac{e}{f} + xx}$$

ubi denominator jam habet formam, quæ requiritur.
Divido

Divido præterea numeratorem $\frac{g}{f} dx$ per $\frac{e}{f} dx$, et

quotus erit $\frac{g}{e}$, proinde si ponatur $r \frac{e}{f} = a$, fit $dy =$

$\frac{g}{e} \times \frac{a dx}{aa + xx}$. Ergo $y = \frac{g}{e} a \Lambda \text{ tang } \frac{x}{a}$, vel, ip-

fius a valore restituto, $y = \frac{g}{e} \cdot r \frac{e}{f} \cdot \Lambda \text{ tang } \frac{x r f}{r e}$. Si

foret $xx = z^n$, ut fit $x = z^{\frac{n}{2}}$, haberetur $dx =$

$\frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, ex quo patet, si fuerit $dy =$

$\frac{g \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz}{e + f z^n}$, esse $y = \frac{g}{e} r \frac{e}{f} \cdot \Lambda \text{ tang } \frac{z^{\frac{n}{2}} r f}{r e}$.

Si vero fit $dy = \frac{g z^{\frac{n}{2} - 1} dz}{e + f z^n}$, dividendo primo per

f , fit $\frac{\frac{g}{f} z^{\frac{n}{2} - 1} dz}{\frac{e}{f} + z^n}$, tum dividendo numeratorem

$\frac{g}{f} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, per $\frac{e}{f} \cdot \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2} - 1} dz$, quotus erit

$\frac{2g}{en}$, unde ponendo $r \frac{e}{f} = a$, concluditur $dy =$

$\frac{2g}{en} \cdot r^{\frac{e}{f}} \cdot A \operatorname{tang} \frac{z^{\frac{n}{2}} r f}{r^e}$. Quæ de additione constantium sæpe jam sunt monita, hic quoque tenenda

sunt, integrale $\int \frac{g z^{\frac{n}{2}-1} dz}{e + f z^n} = \frac{2g}{en} \cdot r^{\frac{e}{f}} \cdot A \operatorname{tang}$

$\frac{z^{\frac{n}{2}} r f}{r^e}$ completum non est, nisi ea sub hypothese,

qua ipsum posito $z^{\frac{n}{2}} = 0$ evanescere debet.

§. 363.

Si fuerit $dy = \frac{adx}{r(aa - xx)}$, quia $y = a$

$\int \frac{dx}{r(aa - xx)}$, invenitur $y = a A \sin \frac{x}{a}$ (§. 346.), ubi

iterum expressio $A \sin \frac{x}{a}$ denotat longitudinem arcus,

cujus sinus est $\frac{x}{a}$ pro radio = 1. Proinde si sit $dy =$

$\frac{gadx}{r(aa - xx)}$, fiet $y = ga A \sin \frac{x}{a}$. Atque ex his simi-

lia deduci possunt ratiocinia, quæ §. præc. ex formula $\int$

$\frac{gaadx}{aa + xx} = ga A \operatorname{tang} \frac{x}{a}$ fuerunt deducta. Scriptis

enim $r^{\frac{e}{f}}$ loco a et $z^{\frac{n}{2}}$ loco x , habetur

$\frac{g}{r}$

$$\frac{g \cdot r \frac{e}{f} \cdot \frac{n}{2} z^{\frac{n}{2}-1} dz}{r \left(\frac{e}{f} - z^n \right)} \text{ vel } \frac{ngre z^{\frac{n}{2}-1} dz}{2r(e-fz^n)}. \text{ Est}$$

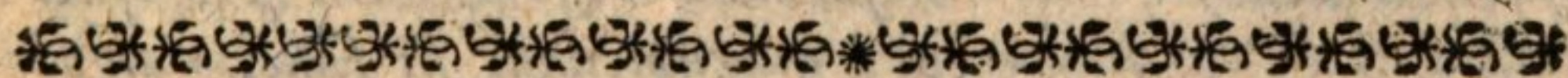
$$\text{itaque } \int \frac{ngre \cdot z^{\frac{n}{2}-1} dz}{ar(e-fz^n)} = g \cdot r \frac{e}{f} A \sin \frac{z^{\frac{n}{2}} rf}{re}.$$

$$\text{Atque si fuerit } dy = \frac{gz^{\frac{n}{2}-1} dz}{r(e-fz^n)}, \text{ habemus } y =$$

$$\frac{2g}{nre} \cdot r \frac{e}{f} \cdot A \sin \frac{z^{\frac{n}{2}} rf}{re} = \frac{2g}{nrf} \cdot A \sin \frac{z^{\frac{n}{2}} rf}{re}, \text{ quod}$$

integrale iterum eo tantum casu completum est, quo il-

lud posito $z^{\frac{n}{2}} = 0$ debet evanescere.



SECTIO XXIV.

DE

INTEGRATIONE DIFFERENTIALIVM ALGEBRAICORVM VNIVS VARIABILIS COMPLEXORVM.

§. 364.

Differentialia omnium ordinum functionum algebraicarum unius variabilis sunt functiones algebraicæ; sed vero exinde concludere non licet, quod proposito

differentiali quocunque algebraico, ejus integrale futura fit functio algebraica. Repertum enim jam est, quod quarundam functionum transcendentium, quales sunt logarithmi et arcus circulares, per sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, secantes, cosecantes, sinus verfos suos dati, differentialia evadant functiones algebraicae. Proinde proposito differentiali algebraico quocunque, integrale ipsius utique potest esse functio transcendens. Ante igitur, quam regulae pro integrandis differentialibus algebraicis complete poterant explicari, necesse erat, ut natura quarundam functionum transcendentium explicetur, quo ipsum hoc negotium eo meliori subiri possit successu. Cui igitur expediendo ut accingamus nos, ordo jam postulat.

§. 365.

Quia generaliter est $\int aX^p dX = \frac{a}{p+1} X^{p+1}$ quamcunque variabilem denotet X , potest per X quaecunque functio ipsius x algebraica intelligi. Quod si igitur alicujus formulae differentialis algebraica integrale inveniendum sit; inquirendum est, utrum formula differentialis proposita constet ex duobus factoribus, quorum unus sit functio algebraica quaecunque ad certam quandam dignitatem elevata; alter vero differentiale hujus functionis, quae est sub vinculo exponentis, per constantem quandam multiplicatum. Id quod si ita se habeat, integrale quaesitum per regulam fundamentalem inveniri poterit.

Si fit $dy = dx \sqrt{a+x}$, video primo hoc differentiale ex duobus compositum esse factoribus dx et $\sqrt{a+x}$, quorum unus est functio $a+x$ ad dignitatem exponentis $\frac{1}{2}$ elevata, alter vero differentiale functionis $a+x$ per constantem multiplicatum. Pono igitur $a+x = z$, erit $dx = dz$ et $\sqrt{a+x} = z^{\frac{1}{2}}$, proinde $dy = dx$, $\sqrt{a+x} = z^{\frac{1}{2}} dz$ et $y = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} z^{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (a+x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (a+x) \sqrt{a+x}$. Si

Si fit $dy = xdx \sqrt[3]{(aa + xx)}$, erit hoc differentiale compositum ex factoribus xdx et $(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$. Ut igitur certior evadam, hujus differentialis integrale per regulam præcedentem inveniri posse, differentio functionem $aa + xx$, eritque $d.(aa + xx) = 2xdx$; atque patet factorem xdx esse differentiale functionis $aa + xx$ per constantem $\frac{1}{2}$ multiplicatum. Ideo pono $aa + xx = z$, erit $2xdx = dz$, et $xdx = \frac{1}{2}dz$, quibus valoribus substitutis fit $dy = xdx \sqrt[3]{(aa + xx)} = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{3}}dz$, et $\int dy = y = \frac{z^{\frac{1}{3} + 1}}{\frac{1}{3} + 1}$
 $z^{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{8}z^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(aa + xx)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(aa + xx)\sqrt[3]{(aa + xx)}$.

Si fit $dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a + x)}}$, iterum hæc formula differentialis composita est ex duobus factoribus dx et $(a + x)^{-\frac{1}{2}}$, quorum unus est functio $a + x$ ad dignitatem exponentis $-\frac{1}{2}$ elevata, alter vero functionis $a + x$ differentiale per constantem 1 multiplicatum. Posito igitur $a + x = z$, fiet $dy = z^{-\frac{1}{2}}dz$, atque $y = \frac{z^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1} = 2z^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[3]{(a + x)}$.

Si fit $dy = \frac{\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx}{\sqrt[7]{(ax + bxx + cx^3)}}$, differentiale propositum est productum ex functione $ax + bxx + cx^3$ ad dignitatem exponentis $-\frac{1}{7}$ elevata et differentiali $\frac{a}{3}dx + \frac{2}{3}bxdx + cx^2dx$. Inquirendum igitur est, utrum hoc differentiale sit productum illius, quod oritur ex differentiatione functionis $ax + bxx + cx^3$, in quantitatem constantem. Est vero $d.(ax + bxx + cx^3) = adx + 2bxdx + 3cx^2dx$, quod multiplicatum per constantem $\frac{1}{3}$ dat

Y y 5

facto-

factorem. $\frac{a}{3} dx + \frac{2}{3} bxdx + cx^2 dx$. Pono igitur $ax + bxx + cx^3 = z$, ut sit $adx + 2bxdx + 3cx^2 dx = dz$, et $\frac{a}{3} dx + \frac{2}{3} bxdx + cx^2 dx = \frac{1}{3} dz$, atque fiet $dy = \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{7}} dz$, proinde $y = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{7} + 1} z^{\frac{1}{7} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{7}} z^{\frac{8}{7}} = \frac{7}{18} z^{\frac{8}{7}} = \frac{7}{18} (ax + bxx + cx^3)^{\frac{8}{7}}$.

§. 366.

Occurrunt sæpius differentialia, quorum integralia per hanc regulam inveniri non posse primo intuitu videntur. Tum vero *omne negotium eo redit, ut ipsa proposita formula differentialis in aliam formam non variato ipsius valore ita mutetur, ut vel ex eadem tota, vel saltem integratione per partes instituta ex una aut aliquot partibus ipsius, secundum regulam fundamentalem integrale capi queat.* Adferamus primo casus quosdam facillimos et simpliciores, deinde ad magis complicatos progressuri.

Si sit $dy = dx \sqrt{aax + x^4}$, inveniri non potest y nisi forma ipsius dy aliquo modo mutetur. Statim vero patet, esse $\sqrt{aax + x^4} = x \sqrt{aa + xx}$, et proinde $dy = x dx \sqrt{aa + xx}$; hinc posito $aa + xx = z$, ut sit $2x dx = dz$ et $x dx = \frac{1}{2} dz$, invenitur $dy = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$ atque $y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} z^{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (aa + xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (aa + xx) \sqrt{aa + xx}$.

Si sit $dy = dx \sqrt{a^3 + 3aax + 3a^2x + x^3}$, patet esse $a^3 + 3aax + 3a^2x + x^3 = (a + x)^3$, atque $dy = dx \sqrt{(a + x)^3} = dx (a + x)^{\frac{3}{2}}$, cujus integralis est $y = \frac{2}{5} (a + x)^{\frac{5}{2}} \sqrt{a + x}$. Ad eandem formam reducitur æquatio $dy = (adx + xdx) \sqrt{a + x}$. Est enim $adx + xdx = (a + x)dx$, ideo $dy = dx (a + x) \sqrt{a + x} = dx (a + x)^{\frac{3}{2}}$.

Sic

Sic et integralis hujus æquationis $dy = (3ax^3 dx + 4x^4 dx) \sqrt{ax + xx}$ secundum regulam nostram sumi posse primo intuitu non videtur. Est vero $(3ax^3 dx + 4x^4 dx) \sqrt{ax + xx} = (3axx dx + 4x^3 dx) x \sqrt{ax + xx} = (3axx dx + 4x^3 dx) \sqrt{ax^3 + x^4}$. Proinde $y = \frac{2}{3}(ax^3 + x^4) \times \sqrt{ax^3 + x^4}$.

§. 367.

Fractio interdum integram habere non videtur. Numeratore vero et denominatore ipsius per eandem quantitatem multiplicato, integralis per regulam datam invenitur.

Sit $dy = \frac{adx + xdx}{\sqrt{3a + 2x}}$. Multiplicetur ejusdem numerator et denominator per x , atque erit $dy = \frac{axdx + xxdx}{x\sqrt{3a + 2x}} = \frac{axdx + xxdx}{\sqrt{3axx + 2x^3}}$, proinde $y = \frac{1}{3}\sqrt{3axx + 2x^3}$.

Vicissim interdum numerator et denominator dividendi sunt per eandem quantitatem, ut integrale haberi possit. Quando est $dy = \frac{axxdx}{\sqrt{aax^2 + x^4}}$, dividendus est numerator et denominator per x , ut fiat $dy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, et $y = a\sqrt{aa + xx}$.

Quando formula differentialis proposita est fractio rationalis, cujus denominator est quadratum vel cubus, vel alia potestas perfecta, cujus radix est algebraice rationalis: extrahenda est hæc radix vinculo exponentis includenda atque tum integratio tentanda. Sit $dy =$

$\frac{xdx}{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}$, eritque $a^4 + 2a^2x^2 + x^4 = (aa + xx)^2$,

proinde $dy = \frac{xdx}{(aa + xx)^2}$, et $y = -\frac{1}{2aa + 2xx}$.

§. 368.

§. 368.

Si duarum quantitatum separatim sumtarum integrale inveniri nequit, accidit interdum, ut ex conjunctis haberi possit.

Quodsi fuerit $dy = \frac{adx}{r(2ax + xx)} + \frac{xdx}{r(2ax + xx)} = adx(2ax + xx)^{-\frac{1}{2}} + xdx(2ax +$

$xx)^{-\frac{1}{2}}$, neutrius termini seorsim sumti integrale habetur.

Sed additorum $dy = (adx + xdx)(2ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$

integrale est $(2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$. Innititur huic observationi

aliud artificium transformandi differentiale datum, cujus integrale per regulam haberi non potest. Sæpius enim

inveniri potest aliud differentiale per se integrabile, quod dato additum efficit summam, cujus integrale sumi po-

test: si itaque ab hoc auferatur integrale quantitatis additæ, remanebit integrale quæsitum. Quærendum fit

integrale ipsius $dy = xdx r(a+x)$. Quod quia simpliciter fieri non potest, addatur eidem hoc differentiale

$adx r(a+x)$, et habebitur $(adx + xdx) r(a+x)$, cujus integrale est $\frac{2}{3}(a+x)^2 r(a+x)$. Ab hoc si auferatur

integrale ipsius $adx r(a+x)$, quod est $\frac{2}{3}a(a+x) \times r(a+x)$ remanebit $\frac{2}{3}(a+x)^2 r(a+x) - \frac{2}{3}a(a+x) r(a+x)$

$= y$. Eodem modo invenitur integrale ipsius $x^2 dx \times r(a+x)$. Habetur enim integrale ipsius $(aa + 2ax +$

$xx) dx r(a+x)$ ut et differentialis $aadx r(a+x)$, et per modo inventum ipsius $2axdx r(a+x)$. Proinde etiam

habetur integrale reliqui $xxdx r(a+x)$. Pari ratione invenitur integrale differentialis $x^3 dx r(a+x)$ vel x^4

$dx r(a+x)$ vel generaliter ipsius $x^m dx r(a+x)$ existente m numero integro. Maximi momenti est hoc ultimi-

um transformandi artificium. Quare ipsius adhuc in casibus aliquot specialibus ostendemus adplicationem, de-

inde ad generaliora progressuri.

§. 369.

Sit igitur nunc $dy = xdx \sqrt{2ax + xx}$, atque patet, xdx esse differentiale termini secundi binomii $2ax + xx$ per constantem $\frac{1}{2}$ multiplicati. Integrum hujus binomii differentiale est $2adx + 2xdx$, quod per $\frac{1}{2}$ multiplicatum dat $adx + xdx$, proinde quantitatis $(adx + xdx) \sqrt{2ax + xx}$ integrale invenitur per regulam. Est vero $xdx \sqrt{2ax + xx} = (adx + xdx) \sqrt{2ax + xx} - adx \sqrt{2ax + xx}$, et proinde $y = \frac{1}{3} (2ax + xx)^{\frac{3}{2}} - a \int dx \sqrt{2ax + xx}$ integrale quaesitum, cujus ultimus terminus tanquam cognitus spectari potest, quia $\int dx \sqrt{2ax + xx}$ exprimit aream hyperbolicam APM posita femiaxe hyperbolae æquilateræ $= a$. Concessa igitur quadratura hyperbolæ æquilateræ integrale, quod quaeritur, inventum est. Quia factor xdx est differentiale unius termini illius functionis, quæ sub signo radicali existit, per constantem multiplicatum; patet, quod posita integra illa functione $2ax + xx =$ variabili cuidam z , hacque æquatione differentiatâ, ex æquatione differentiali, quæ prodit, valor factoris extra vinculum radicale existentis determinari possit per differentiale dz in constantem multiplicatum $+$ vel $-$ differentiali illius termini functionis z , quod in factore extra vinculum radicale existente deficit. Calculus igitur sic institui potest. Pono $2ax + xx = z$, erit $\sqrt{2ax + xx} = z^{\frac{1}{2}}$ et $2adx + 2xdx = dz$. Ex ultima æquatione elicio valorem factoris xdx extra vinculum radicale existentis, quia est $xdx = \frac{1}{2} dz - adx$. Hunc valorem substituo in differentiali dato, eritque $xdx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = xdx z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz - az^{\frac{1}{2}} dz$, ubi terminus primus $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$ per regulam est integrabilis. Integratione igitur peracta et valore pro z restituto, fiet $\int xdx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (2ax + xx)^{\frac{3}{2}} - a \int dx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$, ut ante. Eodem modo, si fuerit $dy = xdx \sqrt{2ax - xx}$, invenitur

$y =$

$y = -\frac{1}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} + a \int dx \sqrt{2ax - xx}$. Exprimit vero $\int dx \sqrt{2ax - xx}$ aream circularem APM posito radio circuli $= a$, ideo concessa quadratura circuli integrale, quod quærebatur, inventum est.

§. 370.

Quando differentialia hujus formæ $dy = g x^m dx \sqrt{X}$ quæ integranda proponuntur, ea proprietate gaudent, de qua locuti sumus; ea nimirum, ut factor $g x^m dx$ extra vinculum exponentis p existens sit differentiale unius termini functionis X : oportet, ut exponens dignitatis m variabilis, quæ extra vinculum exponentis p habetur, unitate minor sit, quam exponens ejusdem hujus variabilis in uno functionis X termino. Raro autem differentialia, quæ integranda proponuntur, hac proprietate sunt prædita. Tum igitur alia opus est transformatione, qua efficitur, ut exponens dignitatis variabilis x , quæ est extra vinculum exponentis p , unitate minor fiat, quam exponens unius eorum, qui sunt sub vinculo, terminorum. Omne vero hujus transformationis negotium ea nititur numerorum proprietate, quæ in elementis jam demonstratur, quod numerus per eundem alium multiplicatus et iterum per eundem divisus non mutetur. Adplicabimus et hoc negotium ad calum quendam specialem generaliora in sequentibus tradituri.

Sit $dy = \frac{(x^5 - a^4 x) dx}{\sqrt{xx - aa}}$, et quærenda hujus æquationis integralis. Hunc in finem sic argumentor:

Est $dy = (x^5 dx - a^4 x dx) (xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = x^5 dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}} - a^4 x dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$. Ultimus terminus ea jam proprietate gaudet, de qua nunc sermo est: Primus vero eadem destituitur. Proinde id efficiendum est, ut exponens ipsius x primi factoris $x^5 dx$ unitate minor sit exponente ipsius x unius termini in altero factore vinculo radicali incluso. Multiplicato vero nume-

$\sqrt{xx}$

ratore $x^5 dx$ hujus fractionis per x seu quod idem est per $\sqrt{x}$ etiam denominator $(xx - ax)^{\frac{1}{2}}$ per $\sqrt{x}$ erit multiplicandus, ut fractionis valor idem maneat. Ex quo patet, quod crescente exponente ipsius x extra vinculum radicale unitate, exponentes ipsarum x sub vinculo duabus unitatibus crescere debeant. His innituntur sequentes transformationum regulæ. Quando differentiale quoddam exprimitur per quantitatem rationalem, divisam per adplicatam circuli vel hyperbolæ, id est, vel per $\sqrt{ax - xx}$ vel per $\sqrt{aa - xx}$, vel per $\sqrt{ax + xx}$, vel per $\sqrt{xx - aa}$; membrum numeratoris, ubi variabilis plurimas habet dimensiones, ad plures adhuc dimensiones elevetur, sicut et functio sub vinculo radicali; quæ quotiescunque membrum superius multiplicatur per dimensionem quandam variabilis, per duplam dimensionem multiplicanda est. Et vice versa membrum superius dividi potest per dimensionem quandam variabilis, si modo membrum sub signo radicali existens per duplam dimensionem simul dividatur. Sic enim fractio semper æqualis manebit. Ipsa vero multiplicatio eo usque continuari debet, donec variabilis maxima dimensio in radice unitate excedat membrum ejusdem variabilis maximae dimensionis in numeratore. Tum huic membro in talem formam reducto, addatur quantitas talis, ut de summa integrale sumi possit, id quod semper fieri potest. Hoc facto idem peragi debet cum addita, et ita tandem descenditur ad ultimum membrum, cujus integrale potest vel per regulam sumi, vel si hoc fieri nequeat, cognitum esse supponi. Integrabimus igitur per hanc methodum primum formulæ, quæ data est, terminum $x^5 dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$, qui erit per prædientia = $x^9 dx (x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}}$. Ponatur $x^{10} - aax^8 = z$, erit $10x^9 dx - 8aax^7 dx = dz$, et $x^9 dx = \frac{1}{10} dz + \frac{4}{5} aax^7 dx$, proinde fit $x^5 dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10} z^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{4}{5} aax^7 dx$

$dx (x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}}$. Porro est $\frac{4}{5} aax^7 dx (x^{10} - aax^8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} aax^5 dx (x^6 - aax^4)^{-\frac{1}{2}}$. Ponatur $x^6 - aax^4 = u$, erit $6x^5 dx - 4aax^3 dx = du$, $x^5 dx = \frac{1}{6} du + \frac{2}{3} aax^3 dx$, et $\frac{4}{5} aax^5 dx = \frac{1}{15} du + \frac{8}{15} a^4 x^3 dx$, proinde $x^5 dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{15} z^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{1}{15} u^{-\frac{1}{2}} du + \frac{8}{15} a^4 x^3 dx (x^6 - aax^4)^{-\frac{1}{2}}$. Denique erit $\frac{8}{15} a^4 x^3 dx (x^6 - aax^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} a^4 x dx \times (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$ atque ideo integrale quæsitum integrum $y = \int \frac{1}{15} z^{-\frac{1}{2}} dz + \int \frac{1}{15} u^{-\frac{1}{2}} du + \int \frac{8}{15} a^4 x dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}} = \int a^4 x dx (xx - aa)^{-\frac{1}{2}}$, in quo singuli termini per regulam inveniuntur. Methodo eadem utendum est, si datum differentiale sit quantitas rationalis per adplicitam circuli vel hyperbolæ multiplicata. Tum enim ipsum differentiale propositum denuo multiplicandum est et simul dividendum per factorem suum irrationalem, sicque quantitas signo radicali affecta in denominatorem transferenda, ut numerator omnino rationalis evadat. Sic si integranda fuerit æquatio $dy = (aax + x^3) dx \sqrt{xx - aa}$, multiplico et simul divido hoc differentiale per $\sqrt{xx - aa}$, eritque $dy = \frac{(aax + x^3) dx (xx - aa)}{\sqrt{xx - aa}}$
 $= \frac{x^5 dx - a^4 x dx}{\sqrt{xx - aa}}$, cujus integrale §. præc. inventum fuit.

§. 371.

Pari modo invenitur integrale æquationis $dy = (2ax - xx) dx \sqrt{2ax - xx}$, ex qua fit $dy = (4aaxx - 4ax^3 + x^4) dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = x^4 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$

$$-4ax^3 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} + 4aaxx dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}.$$

Est vero $x^4 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = x^7 dx (2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}}$
 et posito $2ax^7 - x^8 = z$, fiet $14ax^6 dx - 8x^7 dx = dz$,
 $\frac{7}{4}ax^6 dx - x^7 dx = \frac{1}{8}dz$, $x^7 dx = -\frac{1}{8}dz + \frac{7}{4}ax^6 dx$,
 ex quibus substitutis fit $x^7 dx (2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8}$
 $z^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{7}{4}ax^6 dx (2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}}$. Deinde est $\frac{7}{4}$

$$ax^6 dx (2ax^7 - x^8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}ax^5 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}}, \text{ et } -4ax^3 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = -4ax^5 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}},$$

quibus additis fit $(\frac{7}{4}ax^5 dx - 4ax^5 dx) (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}}$
 $= -\frac{9}{4}ax^5 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}}$. Posito igitur $2ax^5 -$
 $x^6 = u$, fiet $10ax^4 dx - 6x^5 dx = du$, $\frac{5}{3}ax^4 dx - x^5 dx$
 $= \frac{1}{3}du$, $\frac{5}{3}aax^4 dx - ax^5 dx = \frac{1}{3}adu$, $\frac{1}{4}aax^4 dx - \frac{9}{4}ax^5$
 $dx = \frac{2}{5}adu$, $-\frac{9}{4}ax^5 dx = \frac{2}{5}adu - \frac{1}{4}aax^4 dx$, ex qui-

bus substitutis fit $-\frac{9}{4}ax^5 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$
 $au^{-\frac{1}{2}} du - \frac{1}{4}aax^4 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}}$. Denique est $-\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}aax^4 dx (2ax^5 - x^6)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}aax^3 dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

et $4aaxx dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = 4aax^3 dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$
 quibus additis erit $(-\frac{1}{4}aax^3 dx + 4aax^3 dx) (2ax^3 -$
 $x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}aax^3 dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Quare nunc po-

no $2ax^3 - x^4 = s$, ut fit $6axx dx - 4x^3 dx = ds$, $\frac{3}{2}$
 $axx dx - x^3 dx = \frac{1}{4}ds$, $\frac{3}{2}a^3xx dx - aax^3 dx = \frac{1}{4}aads$, $\frac{3}{8}$
 $a^3xx dx - \frac{1}{4}aax^3 dx = \frac{1}{8}aads$, $\frac{1}{4}aax^3 dx = -\frac{1}{8}aads + \frac{3}{8}$

$a^3xx dx$. His substitutis fit $\frac{15}{4}aax^3 dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$
 $= -\frac{15}{8}aas^{-\frac{1}{2}} ds + \frac{3}{8}a^3xx dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Tandem

est $\frac{3}{8}a^3xx dx (2ax^3 - x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}a^3x dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$;
 hinc posito $2ax - xx = t$, ut fit $2a dx - 2x dx = dt$, $2a^4$
 $dx - 2a^3x dx = a^3 dt$, $a^4 dx - a^3x dx = \frac{1}{2}a^3 dt$, $\frac{3}{8}a^3x dx$

$= -\frac{3}{8}a^3 dt + \frac{3}{8}a^4 dx$, fiet $\frac{3}{8}a^3 x dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}} =$
 $-\frac{3}{8}a^3 t^{-\frac{1}{2}} dt + \frac{3}{8}a^4 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$. His omnibus
 collectis fit $dy = -\frac{1}{8}z^{-\frac{1}{2}} dz + \frac{2}{25}au^{-\frac{1}{2}} du - \frac{1}{8}aas^{-\frac{1}{2}}$
 $ds - \frac{3}{8}a^3 t^{-\frac{1}{2}} dt + \frac{3}{8}a^4 dx (2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$, cujus inte-
 gralis quatuor termini primi habentur per regulam, ulti-
 mus vero concessa quadratura circuli.

§. 372.

Quodcunque sit differentiale propositum, caute ani-
 madvertendum est, num possit per transformationem
 quamcunque, nimirum vel per multiplicationem, vel
 per divisionem, vel etiam per extractionem radicis redi-
 gi ad quantitatem, in qua habeatur applicata circuli
 vel hyperbolæ ducta in quantitatem rationalem et inte-
 gram. Hoc si fieri possit, per methodum descriptam aut
 integrale differentialis dati exacte invenietur, aut ad
 quadraturam circuli vel hyperbolæ reducetur. Sit verbi

gratia $dy = (a^3 + axx - x^3) r^{\frac{a+x}{x}}$, Multiplico nu-
 meratorem et denominatorem fractionis signo radicali
 affectae per numeratorem, et productum numeratoris
 in se ipsum per alterum factorem rationalem, ita ut ex-
 inde fiat fractio, cujus numerator est pure rationalis, et
 denominator irrationalis. Erit nempe $(a^3 + axx - x^3) dx$
 $r^{\frac{a+x}{x}} = (a^4 + aaxx + a^3x - x^4) dx (ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$

cujus integrale per methodum satis distincte jam descri-
 ptam invenitur.

§. 373.

Proposita sit integranda æquatio $dy = x^{-1} dx (2aa^5$
 $+ x^6)^{\frac{1}{2}}$, atque statim patet, sub hac forma ejusdem in-
 tegralem inveniri non posse. Tentanda igitur est trans-
 formatio eaque efficiendum, ut exponens ipsius x extra
 vin-

vinculum radicale unitate minor fiat exponente ipsius x unius sub vinculo radicali existentis termini. Potest quidem eum in finem integrum differentiale per factorem $\sqrt{(2ax^5 + x^6)}$ multiplicari et simul per eundem dividi, uti in præcedentibus factum est, sed vero et alia methodo eodem fundamento nixa ad eundem pervenire possumus scopum. Multiplicato enim factore $x^{-1} dx$ per certam ipsius x dignitatem et simul altero factore $(2ax^5 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ per eandem ipsius x dignitatem diviso, dati differentialis valor item invariatus manet. Quodsi igitur $x^{-1} dx$ per x seu quod idem est per $\sqrt{xx}$ multiplicetur, etiam alter factor $(2ax^5 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ per $\sqrt{xx}$ est dividendus. Elevetur igitur x^{-1} ad plures dimensiones. Quotiescunque vero $x^{-1} dx$ multiplicatur per dimensionem quandam variabilis x , toties functio $2ax^5 + x^6$ vinculo radicali inclusa per duplam hanc dimensionem dividenda est, ut valor differentialis propositi idem maneat. Sic colligimus esse $dy = x^{-1} dx (2ax^5 + x^6)^{\frac{1}{2}} = x dx (2ax + xx)^{\frac{1}{2}}$, cuius integrale supra jam inventum fuit.

§. 374.

Ea formulas differentiales, quæ integrandæ proponuntur, transformandi methodus, qua loco variabilis, quam problema continet, alia variabilis introducitur, a priori pendens, et qua in præcedentibus in facilioribus quibusdam casibus usi jam sumus, usum habet in calculo integrali admodum late patentem. Quodsi enim fuerit y functio quæcunque ipsius x , atque inter variabilem x et aliam variabilem x detur æquatio quæcunque, tum quoque y per x definiri poterit. Proposita igitur sit formula differentialis unius variabilis x quæcunque formæ

$$\frac{dy}{dx} = P, \text{ existente } P \text{ functione variabilis } x; \text{ atque as-}$$

sumpta æquatione, qua x per novam vrrabilem z definitur, si z loco x , atque dz loco dx introducatur; formula differentialis proposita sæpe in talem mutatur, cujus integrale per cognitatas methodos haberi potest. Tum vero hoc integrale erit functio ipsius z . Loco z autem variabilis x iterum introduci potest ex æquatione inter z et x assumpta. Quod ad hos transformationum modos ipsos adtinet, tales proponere hoc loco tantum possumus, quorum frequentior usus est, quia omnes fere, qui vel ex cogitati jam sunt, vel excogitari adhuc possunt, ad casus speciales tantum restricti sunt.

§. 375.

Prior itaque modus, isque facillimus, quo etiam in antecedentibus sæpius jam usi sumus, is est, qui absolvitur, ponendo quantitatem, quæ sub signo radicali includitur, æqualem variabili cuidam z soli, et convertendo functionem datam secundum hanc positionem in aliam variabilis z . Hoc enim facto posterioris functionis, quæ plerumque multo brevior evadit, integrale quæritur, quod iterum converti potest in integrale quæsitum, substituendo valorem variabilis assumptæ. Opus non est, ut simplicissimus iste modus exemplis ulterius illustretur, quia in §§. 365. et sq. hujus rei exempla jam fuerunt proposita. Prouti vero ibidem quantitas sub vinculo radicali existens variabili cuidam z æquata est, ita quoque ipsa quantitas irrationalis optato successu ponitur æqualis variabili cuidam z soli, tumque reliqua peraguntur, ut ante. Sit $dy = (ax + xx)dx \sqrt{a+x}$. Pono $\sqrt{a+x} = z$, erit $a+x = zz$; $x = zz - a$; $dx = 2zdz$; atque $dy = 2z^6dz - 2az^4dz$; cujus integrale nunc facile et absque multis ambagibus statim invenitur $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5 = \frac{2}{7}(x+a)^3 \sqrt{a+x} - \frac{2}{5}a(x+a)^2 \sqrt{a+x}$. Eodem modo invenitur integrale ipsius $dy = \frac{(aa + 2xx) dx}{\sqrt{aa + xx}}$ ponendo $\sqrt{aa + xx} = z$, ut fiat $aa + xx = zz$, $x = \sqrt{zz - aa}$; $dx =$

$$= \frac{zdz}{r(zz - aa)}. \quad \text{Proinde } dy = \frac{(2z^3 - aaz) dz}{r(z^4 - aaz)}, \text{ atque}$$

$$y = r(z^4 - aaz). \quad \text{Si fuerit } dy = \frac{(a - x) dx}{r(2ax - xx)}; \text{ po-}$$

$$\text{nendo } r(2ax - xx) = z, \text{ erit } x = a \pm r(aa - zz); dx =$$

$$\mp \frac{zdz}{r(aa - zz)}, \text{ atque } dy = dz. \quad \text{Proinde } y = z = r$$

$$(2ax - xx). \quad \text{In infinitis aliis casibus adplicari potest hæc}$$

regula, et quidem in ejusmodi casibus, qui ob prolixitatem

pro desperatis fere haberi possent. Præterquam enim,

quod ista regula functionem propositam plerumque mul-

to breviorē reddat, hunc insuper usum habet, quod

statim ob oculos ponat, an ex functione sic transforma-

ta integrale peti queat. Alius modus transformandi fun-

ctiones differentiales propositas is est, quo variabilis x

x qualis ponitur fractioni numeratoris constantis, cujus

denominator est alia quædam variabilis z , reliquis ut an-

te peractis. Inveniendum sit integrale ipsius $dy =$

$$\frac{a^4 dx}{xx r(xx \pm aa)}. \quad \text{Pono } x = \frac{aa}{z} \text{ erit } dx = -\frac{aadz}{zz}, \text{ porro } dy$$

$$= -\frac{aazdz}{r(a^4 \pm aaz)}, \text{ atque } y = \mp r(a^4 \pm aaz) =$$

$$\mp r(a^4 \pm \frac{a^6}{xx}). \quad \text{Ad formam hujus differentialis re-}$$

$$\text{ducitur ista æquatio } dy = \frac{aadx}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ponendo } aa + xx$$

$$= zz, \text{ quo facto erit } xx = zz - aa, dx = \frac{zdz}{r(zz - aa)},$$

$$\text{et proinde } dy = \frac{aadz}{zz r(aa - zz)}, \text{ cujus integrale habetur}$$

per methodum præcedentem.

§. 376.

Præter hos transformationum modos præcipue commendanda est is, qui sequitur, qui vero circa illas duntaxat functiones versatur, quæ signis radicalibus implicata sunt. Tota illius praxis consistit in eo, ut functiones irrationales in rationales convertantur, ita ut tota functio differentialis proposita induat rationalitatem, ex qua deinde integrale, si fieri potest, facile invenitur. Ad hoc igitur negotium expediendum quæstiones Diophanteae non parum conducunt, ceu in exemplis quibusdam clarius patebit.

Quærendum sit integrale ipsius $dy = \frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - xx}}$, quod per hanc methodum ita præstabitur. Quia $\sqrt{ax - xx}$ est quantitas irrationalis, ut rationalis reddatur, oportet, ut $ax - xx$ sit quadratum. Sit itaque $ax - xx = \frac{aaxx}{zz}$; erit ex hac suppositione $x = \frac{aaz}{zz + aa}$, et

proinde $\sqrt{ax - xx} = \frac{aaz}{zz + aa}$; $dx = \frac{2a^3 z dz}{(zz + aa)^2}$.

Quare facta hac substitutione erit $dy = \frac{2a^3 dz}{zz}$, cuius integrale facile habetur, nempe $y = -\frac{2a^3}{z} =$

$$\sqrt{\frac{4a^5 - 4a^4x}{x}} = 2aa\sqrt{\frac{a - x}{x}}.$$

Quærendum si sit integrale ipsius $dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{xx + 2ax + aa}}$; oportet, ut $xx + 2ax + aa$ sit cubus.

Sit ergo $x + a = z^3$, erit $x = z^3 - a$ et $dx = 3z^2 dz$, $\sqrt[3]{xx + 2ax + aa} = zz$, proinde $dy = \frac{3z^2 dz}{z^3 - a}$, cuius fractionis rationalis integrale si haberi potest,

potest, habebitur simul integrale quæsitum. Methodus autem fractiones rationales integrandi infra fusius explicabitur. Hac itaque methodo propositum differentiale sæpe reducitur ad formam, pro qua integranda de novo specialibus opus est regulis.

§. 377.

Et hi quidem, quos adduximus, præcipui casus sunt, qui occurrere possunt in transformandis differentialibus, quorum integralia quærentur. Plures quidem alii restant a Matheseos Doctoribus excogitati; sed quia plerique ad allatos reduci possunt, ut et per hos ad opus perveniri possit, et quia attente consideranti mille alii modi pro datarum differentialium natura sponte sese offerunt: reliquos merito hic seponimus. Ad speciales vero casus omnia hucusque tantum adplicavimus, idque consutum esse duximus, ut reliqua generaliora nunc adferenda eo distinctius a Matheseos Studiosis intelligi queant. Omne negotium eo redit, ut huius formulæ $gx^m dx (a + bx^n + cx^{2n} + \text{etc.})$ integrale in potestate sit, quod ex iis, quæ §. 371. exposita sunt, manifestum est.

Sit igitur primo proposita formula differentialis ex duobus factoribus composita, quorum unus est binomium formulæ $a + bx^n$ ad dignitatem quamcunque exponentis p elevatum, atque patet, quod si alter factor eam habeat formam $gx^{n-1}dx$, integrale huius formulæ in potestate sit, quia hic factor est differentiale alterius

qui est sub vinculo exponentis per constantem $\frac{g}{nb}$ multiplicatum. Invenitur enim $\int gx^{n-1}dx (a + bx^n)^p$ ponendo $a + bx^n = z$, ut sit $nbx^{n-1}dx = dz$, et $x^{n-1}dx = \frac{dx}{nb}$.

Fiat substitutio, et erit $\frac{g}{nb} z^p dz = gx^{n-1}dx (a + bx^n)^p$,

proinde $\int g x^{n-1} dx (a + b x^n)^p = \int \frac{g}{nb} z^p dz = \frac{g z^{p+1}}{nb(p+1)}$
 $= \frac{g(a + b x^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$. Integratio adhuc succedit, quan-

do factor $g x^{n-1} dx$ multiplicatus fuerit per x^{rn} existente r numero integro positivo, ita ut formula differentialis proposita hanc habeat formam $g x^{rn} \times x^{n-1} dx (a + b x^n)^p$.

Ponatur enim $a + b x^n = z$, erit $x^n = \frac{z-a}{b}$, et $x^{n-1} dx$

$$= \frac{dz}{nb}, \text{ præterea } x^{rn} = \frac{(z-a)^r}{b^r}, \text{ et } (a + b x^n)^p =$$

z^p . Factis igitur substitutionibus erit $g x^{rn} \times x^{n-1} dx \times$

$$(a + b x^n)^p = g \frac{(z-a)^r}{nb^{r+1}} z^p dz. \text{ Quia } r \text{ est numerus}$$

integer positivus, erit series in quam convertitur $(z-a)^r$ finita. Evolutione igitur actu facta, et quolibet ter-

mino per $z^p dz$ multiplicato, integrale cujuslibet hujus seriei termini in potestate est. Quod si in formula $g x^{rn}$

$\times x^{n-1} dx (a + b x^n)^p$ fit $n = 1$; habemus $g x^r dx (a + b x)^p$, quod differentiale integrabile est, quodcunque denotet p , dummodo r sit numerus integer positivus.

Posito enim $a + b x = z$, fit $\int g x^r dx (a + b x)^p = \int g \frac{(z-a)^r}{b^{r+1}} z^p dz$, quod integrale habetur binomio $(z-a)^r$

$a)^r$ in seriem converso. Reduci possunt quandoque ad

formam $g x^{rn} \times x^{n-1} dx (a + b x^n)^p$ differentialia formæ dx

$(a x^q + b x^s)^p$. Est enim $dx (a x^q + b x^s)^p = dx \times (x^q \times (a + b x^{s-q}))^p$

$= x^q dx (a + b x^{s-q})^p$. Scripto igitur n pro $s-q$, forma

hæc eadem est cum præcedente, si fuerit $qp = rn + n - 1$.

Formula differentialis, cujus integrale exhibuimus, nunc

generaliter ita poterit exprimi $g x^m dx (a + b x^n)^p$, at-

que hujus formulæ integrale semper in terminis finitis

exhiberi potest, quando numeri m et n ita a se invicem

pendent, ut sit $\frac{m+1}{n}$ æquale numero quocunque integro, qui sit $r+1$, erit enim tum $m+1 = rn+n$, atque $m = rn+n-1$, quo valore pro m substituto formula differentialis integranda hæc est $gx^{rn+n-1}dx (a+bx^n)^p$, vel $gx^{rn} \times x^{n-1}dx (a+bx^n)^p$, quæ formula utique integrabilis est; quia enim $r+1$ est numerus integer, etiam r integer erit. Quando vero in formula $gx^m dx (a+bx^n)^p$ numeri m et n ita a se invicem non pendent, ut sit $\frac{m+1}{n}$ = numero integro, non aliis subsidiis ad integrale inveniendum opus est, nisi iis, quibus supra jam in casibus aliquot specialibus usi sumus, quæ jam ad formulam generalem adplicabimus.

§. 378.

Quare nunc posito $dy = gx^m dx (a+bx^n)^p$, ante omnia efficiendum est, ut exponens ipsius x extra vinculum exponentis p unitate minor fiat exponente ipsius x unius sub vinculo exponentis p existentis termini, ut bx^n . Multiplicetur eum in finem factor $gx^m dx$ per certam ipsius x dignitatem, quæ sit x^q , et simul alter factor $(a+bx^n)^p$ per eandem ipsius x dignitatem x^q vel $\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^p$ dividendus est, ut dati differentialis valor maneat invariatus: erit $dy = gx^m dx (a+bx^n)^p = gx^{m+q} dx \left(ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}}\right)^p$.

Esse vero debet q numerus talis, ut sit vel $m+q = n - \frac{q}{p} - 1$ vel $m+q = -\frac{q}{p} - 1$.

Ex priori æquatione (secundæ enim evolvendæ non immorabimur, quia calculus sequenti prorsus similis hoc casu instituendus erit) concluditur $mp + qp = np - q - p$,

$np - mp - p = qp + q$, et proinde $q = \frac{np - mp - p}{p+1}$.

Fit igitur $dy = g x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx \left(ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right)^p$,
cujus formulæ integrale eadem invenitur methodo, qua
supra in casibus specialibus usi sumus. Pono enim

$$ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} = z, \text{ ut fiat } \frac{m-n+1}{p+1} ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} dx$$

$$+ \frac{m+np+1}{p+1} bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} dx, = dz \text{ et } g x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx$$

$$= \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} dz - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b}$$

$$g x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx, \text{ proinde } dy = \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$$

$$\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} dx \times \left(ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} \right)^p$$

$$= \frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} g x^{m-n}$$

$$dx (a + bx^n)^p, \text{ ejus integrale est } y = \frac{1}{m+np+1} \times$$

$$\frac{g}{b} z^{\frac{p+1}{p}} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \times \int g x^{m-n} dx (a + bx^n)^p.$$

$$\text{Cum autem sit } z = ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} =$$

$$x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times (a + bx^n), \text{ erit } z^{\frac{p+1}{p}} = x^{m-n+1} \times (a +$$

$$bx^n)^{\frac{p+1}{p}}, \text{ et proinde } y = \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times g x^{m-n+1}$$

$$(a + bx^n)^{\frac{p+1}{p}} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \int g x^{m-n} dx \times (a +$$

$$bx^n)^p.$$

$bx^n \rangle p$. Inventus igitur est primus formulæ integralis quæsitæ terminus, atque ad secundum sequentem inveniendum non alia opus est methodo, nisi ea, qua in ipsa formula inventa ubique loco m substituitur $m - n$,

et quod prodit, per $-\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b}$ multiplicatur.

Facta hac substitutione invenitur $y = \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times$

$$gx^{m-n+1} (a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times$$

$$\frac{a}{bb} \times gx^{m+1-2n} (a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times$$

$$\frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \int gx^{m-2n} dx (a+bx^n)^p. \text{ Tertius}$$

terminus invenitur posito $m-2n$ loco m in formula pri-
mum pro $\int gx^m dx (a+bx^n)^p$ inventa, et quod prodit

$$\text{per } -\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \text{ multiplicato. Si-}$$

mili quoque substitutione habetur terminus quartus,
quintus et sequentes, eadem operatione quousque lubet
continuata. Quilibet hujus seriei terminus excepto ul-
timo per $g'(a+bx^n)^{p+1}$ erit multiplicatus, ideo hic
factor communis initio seriei semel pro semper præfigi
potest. Tum vero, si numerator et denominator ter-
mini primi per n , secundi per n^2 , tertii per n^3 , et sic
sequentium omnium per n elevatum ad potentiam, cujus
exponens numero termini est æqualis, dividatur, series

$$\text{ipsa hanc habebit formam: } y = \frac{g}{n} (a+bx^n)^{p+1}$$

$$\times \left(\frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} x^{m-n+1} - \frac{m+1-n}{n} \right. \\ \left. \frac{1}{(m+np+1)(m+np+1-n)} \right)$$

$\propto \frac{a}{bb} x^{m-2n+1} + \text{etc.}$). Ponatur $\frac{m+1}{n} = r$, ex quo fit

$$\frac{m+1}{n} = r$$

$$\frac{m+1-n}{n} = r-1$$

$$m+1-n = rn-n$$

$$m+1-2n = rn-2n$$

Ponatur præterea $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$

ex quo fiet $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1$

$$\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2, \text{ etc.}$$

atque his valoribus substitutis fiet $y = \frac{g}{n} (a + bx^n)^{p+1}$

$$\left(\frac{1}{s} \propto \frac{1}{b} x^{rn-n} - \frac{r-1}{s \cdot s-1} \propto \frac{a}{bb} x^{rn-2n} + \frac{r-1 \cdot r-2}{s \cdot s-1 \cdot s-2} \right.$$

$$\propto \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} - \text{etc.}) \text{ vel } y = \frac{g}{n} (a + bx^n)^{p+1} \left(\frac{1}{s} \propto \right.$$

$$\frac{1}{b} x^{m+1-n} - \frac{r-1}{s \cdot s-1} \propto \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{r-1 \cdot r-2}{s \cdot s-1 \cdot s-2} \propto$$

$$\frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n} - \text{etc.}). \text{ Quando fuerit } dy = gx^m dx (a -$$

$bx^n)^p$; in formula inventa eorum terminorum signa sunt mutanda, in quibus b habet imparem dimensionem.

§. 379.

Quando hæc series in casibus specialibus abrumpitur, quod verbi gratiæ accidit, si r fuerit numerus integer positivus; integrale quæsitum habetur in terminis finitis expressum. Alias habetur vel per approximationem, vel quoque concessa quadratura curvæ cujus applicata

$bx^n \rangle p$. Inventus igitur est primus formulæ integralis quæsitæ terminus, atque ad secundum sequentem inveniendum non alia opus est methodo, nisi ea, qua in ipsa formula inventa ubique loco m substituitur $m - n$,

et quod prodit, per $-\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b}$ multiplicatur.

Facta hac substitutione invenitur $y = \frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times$

$$gx^{m-n+1} (a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times$$

$$\frac{a}{bb} \times gx^{m+1-2n} (a+bx^n)^{p+1} - \frac{m-n+1}{m+np+1} \times$$

$$\frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \int gx^{m-2n} dx (a+bx^n)^p. \text{ Tertius}$$

terminus invenitur posito $m-2n$ loco m in formula pri-
mum pro $\int gx^m dx (a+bx^n)^p$ inventa, et quod prodit

per $-\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb}$ multiplicato. Si-

mili quoque substitutione habetur terminus quartus, quintus et sequentes, eadem operatione quousque lubet continuata. Quilibet hujus seriei terminus excepto ultimo per $g'(a+bx^n)^{p+1}$ erit multiplicatus, ideo hic factor communis initio seriei semel pro semper præfigi potest. Tum vero, si numerator et denominator termini primi per n , secundi per n^2 , tertii per n^3 , et sic sequentium omnium per n elevatum ad potentiam, cujus exponents numero termini est æqualis, dividatur, series

ipsa hanc habebit formam: $y = \frac{g}{n} (a+bx^n)^{p+1}$

$$\times \left(\frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} x^{m-n+1} - \frac{m+1-n}{n} \right. \\ \left. \frac{1}{(m+np+1)(m+np+1-n)} \right)$$

$\propto \frac{a}{bb} x^{m-2n+1} + \text{etc.}$). Ponatur $\frac{m+1}{n} = r$, ex quo fit

$$\begin{aligned} m+1 &= rn \\ \frac{m+1-n}{n} &= r-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m+1-n &= rn-n \\ m+1-2n &= rn-2n \end{aligned}$$

Ponatur præterea $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$

$$\text{ex quo fiet } \frac{m+np+1-n}{n} = s-1$$

$$\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2, \text{ etc.}$$

atque his valoribus substitutis fiet $y = \frac{g}{n} (a + bx^n)^{pt1}$

$$\left(\frac{1}{s} \propto \frac{1}{b} x^{rn-n} - \frac{r-1}{s \cdot s-1} \propto \frac{a}{bb} x^{rn-2n} + \frac{r-1 \cdot r-2}{s \cdot s-1 \cdot s-2} \right.$$

$$\propto \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} - \text{etc.}) \text{ vel } y = \frac{g}{n} (a + bx^n)^{pt1} \left(\frac{1}{s} \propto \right.$$

$$\frac{1}{b} x^{m+1-n} - \frac{r-1}{s \cdot s-1} \propto \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{r-1 \cdot r-2}{s \cdot s-1 \cdot s-2} \propto$$

$$\frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n} - \text{etc.}). \text{ Quando fuerit } dy = gx^m dx (a -$$

$bx^n)^p$; in formula inventa eorum terminorum signa sunt mutanda, in quibus b habet imparem dimensionem.

§. 379.

Quando hæc series in casibus specialibus abrumpi-
tur, quod verbi gratiæ accidit, si r fuerit numerus in-
teger positivus; integrale quæsitum habetur in terminis
finitis expressum. Alias habetur vel per approximatio-
nem, vel quoque concessa quadratura curvæ cujus ad-
plicata

plicata, abscissa existente $= x$, exprimitur per $gx^{m-n}(a+bx^n)^p$ vel per $gx^{m-2n}(a+bx^n)^p$ vel per $gx^{m-3n}(a+bx^n)^p$ etc. vel denique concessa rectificatione curvæ, in qua si arcus vocetur $= s$, abscissa existente $= x$ limites rationis $\frac{ds}{dx}$ exprimitur per $gx^{m-n}(a+bx^n)^p$, vel per $gx^{m-2n}(a+bx^n)^p$, vel per $gx^{m-3n}(a+bx^n)^p$, etc. Atque nullo prorsus negotio inveniri possunt illæ formulæ differentiales speciales sub ea generali, de qua loquimur, comprehensa, quarum integralia habentur concessa quadratura circuli vel alius curvæ ex sectionibus conicis. Sic posito radio circuli $= r$, ejus quadratura abscissis a centro computatis exprimitur per $\int dx (rr - xx)^{\frac{1}{2}}$. Comparetur hæc formula cum $gx^{m-n}dx (a+bx^n)^p$, atque ponendo $g = 1$, $m-n = 0$, $a = rr$, $b = -1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, patet, quia $m=n=2$, formulæ differentialis $dy = xx dx (rr - xx)^{\frac{1}{2}}$ integrale haberi concessa quadratura circuli. Arcus circuli sub eadem hypothesis exprimitur per $\int r dx (rr - xx)^{-\frac{3}{2}}$. Comparata hac formula cum $gx^{m-n}dx (a+bx^n)^p$, habetur $g = r$, $m-n = 0$, $a = rr$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$; et quia $m=n=2$; patet, formulæ differentialis $rxx dx (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ integram haberi concessa rectificatione circuli. Sic comparatis his et aliis formulis similibus cum $gx^{m-2n}dx (a+bx^n)^p$, vel $gx^{m-3n}dx (a+bx^n)^p$ etc, plures aliae inveniuntur formulæ differentiales, quarum integralia habentur, curvæ cujusdam et in speciei sectionis cujusdam conicæ quadratura concessa. Indiget vero hæc methodus præcautione quadam. Haud raro enim accidit, ut series abrumpatur in termino quodam, qui illum, cum qua comparatio instituta est, antecedit. Atque tum integrale habetur in terminis finitis algebraice expressum a quadratura vel rectificatione curvarum indepen-

dependens. Sic generaliter invenitur, in formula $gx^m dx (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ successive ponendo numeros pares 2, 4, 6, etc, loco m , quod integrale illius formulae pendeat a rectificatione circuli. Quodsi vero in hac formula fit m numerus par negativus, integrale invenitur algebraicum. Sit enim $m = -2f$ atque differentiale,

de quo sermo est, sic transformatur $\frac{gdx}{x^2 f \sqrt{(rr - xx)}}$.

Sit $x = \frac{rr}{u}$; ut fiat $dx = -\frac{rr du}{uu}$, $x^2 f = \frac{r^4 f}{u^2 f}$, $\sqrt{(rr - xx)}$

$= \sqrt{(rr - \frac{r^4}{uu})} = \frac{r}{u} \sqrt{(uu - rr)}$, ideoque

$\frac{gdx}{x^2 f \sqrt{(rr - xx)}} = -\frac{grr}{uu} dx \propto \frac{uuf}{r^4 f} \left(\frac{u}{rr(uu - rr)} \right)$

$= -\frac{gu^2 f^{-1} du}{r^4 f^{-1} \sqrt{(uu - rr)}}$. Atque hoc differentiale habet

integrale absolutum et algebraicum, quia ob $m = 2f -$

1, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, fit $\frac{m+1}{n} = f =$ numero integro

positivo.

§. 380.

Integratio formularum differentialium, in quibus factor sub vinculo exponentis p existens est trinomium vel polynomium quodcunque, modo huic prorsus simili peragitur. Sit $dy = gx^m dx (a + bx^n + cx^{2n})^p$ atque multiplicato factore $gx^m dx$ per x^q alter simul per x^q ,

vel per $\left(\frac{q}{x^p} \right)^p$ est dividendus, ut valor formulae

non mutetur, quo facto fit $dy = gx^{m+q} dx (ax^{\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}} + cx^{2n-\frac{q}{p}})^p$. Posito nunc $m+q =$

$$-\frac{q}{p} - 1, \text{ habetur } q = \frac{-mp - p}{p+1}, \text{ et } dy = \\ g x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times \left(ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+1}{p+1}} \right)^p.$$

Deinde posito $ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+1}{p+1}} = z$, et inde deductis valoribus ipsius z^p , $z^{\frac{p+1}{p}}$, dz ,

$$\text{et factoris } g x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \text{ fit } y = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} g x^{m+1} \times (a + bx^n + \\ + cx^{2n})^{\frac{m+1+np+1}{p+1}} - \frac{m+1+np+1}{m+1} \times \frac{b}{a} \int g x^{m+1} dx (a + bx^n + \\ + cx^{2n})^{\frac{m+1+2np+1}{p+1}} - \frac{m+1+2np+1}{m+1} \times \frac{c}{a} \int g x^{m+1} dx (a + bx^n + \\ + cx^{2n})^{\frac{m+1+3np+1}{p+1}}. \text{ Operatio hæc continuatur ponendo } m+n \text{ loco}$$

m in formula inventa, quo facto invenitur $y = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a}$

$$\times g x^{m+1} (a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{m+1+np+1}{p+1}} - \frac{(m+1+np+1) \times 1}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times$$

$$\frac{b}{aa} \times g x^{m+1} (a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{m+1+np+1}{p+1}} +$$

$$\left(\frac{(m+1+np+1) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)} \times \frac{bb}{aa} - \right.$$

$$\left. \frac{m+1+2np+2n}{m+1} \times \frac{c}{a} \right) \times \int g x^{m+1} dx (a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{m+1+3np+1}{p+1}}.$$

$$+ \frac{m+1+np+1}{m+1} \times \frac{m+1+2np+3n}{m+1+n} \times \frac{bc}{aa} \int g x^{m+1} dx$$

$$\times (a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{m+1+4np+1}{p+1}}. \text{ Sic pergendo et substituendo}$$

$m+2n$ in formula primum inventa invenitur tertius terminus et sequentes, quæ operatio quousque lubet continuari potest, ita ut hic quoque vel integrale exactum habeatur, si series tandem abrumptur, vel per approxima-

ximationem, vel denique, ad quadraturas aut rectificationes duarum curvarum reducatur, in quibus abscissa existente $= x$, vel applicata, vel rationis $\frac{ds}{dx}$ limes datur per functionem formæ $gx^{mtrn} dx (a + bx^n + cx^{2n})^p$ existente r numero quocunque integro. Pari ratione integrale differentialis quadriminii ad tres quadraturas vel rectificationes, quinquinomii ad quatuor et sic porro reducitur, si exactum non inveniatur, nec approximatio præferatur.

§. 381.

Functiones quidem differentiales fractæ rationales comprehenduntur sub forma $(\alpha x^q + \beta x^r + \gamma x^s + \text{etc.}) dx (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \text{etc.})^p$, existente p numero integro negativo, q vero r, s , etc, numeris integris positivis. Sed tamen per methodum huc usque descriptam functionum differentialium fractarum, et quidem rationalium integralia non semper habentur. In formula pro integrali ipsius $dy = gx^m dx (a + bx^n)^p$ inventa in qua

$$r = \frac{m+1}{n} \text{ et } s = \frac{m+1}{n} + p \text{ contingere potest, ut } r$$

et s sint numeri integri positivi, quando p est numerus integer negativus. Quodsi eveniat, patet necessario esse $r > s$, et proinde intuitus ipsius formulæ docet, quod, ante quam series multiplicatione per factorem $r - r$ abrumptur, in hoc casu denominatores quorundam formulæ terminorum per multiplicationem factoris $s - s$ evadant $= 0$, et proinde ipsi termini fiant infinite magni. Tantum abest, ut ex hoc concludere possimus, integrale in istis casibus haberi non posse, ut potius ex eo concludendum sit, integrale quæsitum non esse functionem algebraicam, sed saltem ex parte transcendente. Propositum sit differentiale $dy = gx^7 dx (a +$

$$bx^2)^{-2}, \text{ quodsi comparetur cum formula } dy = gx^m dx (a + bx^n)^p \text{ dat } m = 7, n = 2, p = -2, r = 4, s =$$

$= 2$, atque secundum formulam generalem pro integrali $y = \int g x^m dx (a + b x^n)^p$ inventam: aliqui ipsius $\int g x^7 dx (a + b x^2)^{-2}$ termini evadunt infiniti. Alia igitur methodo in illud inquirendi opus est. Quia enim $g x^7 dx (a + b^2)^{-2} = g x^6 \cdot x dx (a + b x^2)^{-2}$ pono $a + b x^2 = z$, ut fiat $x^2 = \frac{z-a}{b}$, $2x dx = \frac{dz}{b}$, $x dx = \frac{1}{2} \frac{dz}{b}$, $x^6 =$

$\frac{(z-a)^3}{b^3}$. Substitutis his valoribus habetur $g x^7 dx (a +$

$$b x^2)^{-2} = \frac{g(z-a)^3 dz}{2b^4 z^2} = \frac{g^1}{2b^4} z dz - \frac{3ag}{2b^4} dz +$$

$$\frac{2a^2 g}{2b^4} z^{-1} dz - \frac{a^3 g}{2b^4} z^{-2} dz, \text{ et proinde } \int g x^7 dx (a +$$

$$b x^2)^{-2} = \frac{g}{4b^4} z^2 - \frac{3ag}{2b^4} z + \frac{3a^2 g}{2b^4} \ln z + \frac{a^3 g}{2b^4 z}, \text{ quod in-}$$

tegrale ex parte algebraicum, ex parte transcendens est. Simili defectu laborant formulae generales pro differentialibus trinomiis, quadrinomiis, et reliquis secundum methodum hucusque descriptam formatæ, ut nimirum denominatores evanescent, quando est p numerus integer negativus. Ratio hujus defectus illum latere nequit, qui ad modum, quo formulæ istæ ex differentialibus derivantur, attentus est. Methodus hæc inversa est ejus, qua ex functionibus mere algebraicis differentialia eliciuntur. Proinde ejus ope ad optatum scopum pertinere semper possemus, si aliarum non, nisi functionum mere algebraicarum, differentialia essent algebraica. Sed vero cum functionum quarundam transcendentium pariter ac algebraicarum differentialia sint algebraica; mirum non est, quod integralia differentialium algebraicarum, si eadem integralia involvunt expressiones logarithmicas, vel alias operationes transcendentes, ea methodo non inveniantur, quæ proprie solis integralibus

bus algebraicis inveniendis adcommodata est. Hæc causa est, cur alia opus sit methodo, qua fractionum differentialium rationalium integralia inveniuntur, cuius ope simul dijudicari potest, utrum integrale ejusmodi functionis sit algebraicum vel transcendens.

§. 382.

Quodsi in functione rationali fracta quantitas variabilis x tot vel plures habeat dimensiones in numeratore, quam in denominatore; tum ista functio resolvi poterit in duas partes, quarum altera est functio integra, altera fracta, in cujus denominatore quantitas variabilis x pauciores habet dimensiones, quam in denominatore. Potest enim in hoc casu numerator per denominatorem dividi more solito, donec in quoto ad exponentes negativos ipsius x perveniatur. Hoc ergo loco abrupta divisionis operatione quotus constabit ex parte integra et fractione, in cujus numeratore minor erit dimensionum numerus ipsius x , quam in denominatore. Hic autem quotus functioni propositæ est æqualis. Hujusmodi igitur functiones fractæ, in quibus quantitas variabilis x tot vel plures habet dimensiones in numeratore, quam in denominatore, vocari possunt functiones fractæ *spuriæ*, quo distinguantur a functionibus fractis *genuinis*, in quarum numeratore quantitas variabilis x pauciores habet dimensiones, quam in denominatore. Functio itaque fracta spuria resolvi poterit in functionem integram et functionem fractam genuinam, hæcque resolutio per vulgarem divisionis operationem absolvetur. Proinde si proponatur formula differentia-

lis hujus formæ, $dy = \frac{p}{q} dx$ cujus integrale quæritur,

atque in eadem sint p et q functiones rationales integræ;

primum eo respiciendum est, utrum fractio $\frac{p}{q}$ sit spu-

ria, an genuina. Si prius sit, divisio erit instituenda,
donec

donec ultimum residuum pauciores habeat dimensiones, quam divisor q , ut quotus constet ex parte rationali integra et parte, quæ est functio rationalis fracta genuina. Tum integratio prioris partis nulla laborat difficultate, atque ad integrale posterioris partis inveniendum omnia redibunt. Comprehendamus igitur imposterum sub

forma $\frac{p}{q}$ non alias fractiones nisi genuinas, atque nunc inquirendum erit, quomodo integrale ipsius $dy = \frac{p}{q} dx$ sit inveniendum.

§. 383.

Cum sit q functio rationalis integra, factorum, in quos resolvi potest, erunt aut omnes reales, aut omnes imaginarii, aut quidam reales, alii imaginarii. Atque in priori casu possunt esse vel omnes æquales vel omnes inæquales, vel ex parte æquales et ex parte inæquales. Quodsi factores reales omnes fuerint æquales, ita ut fra-

ctio, hanc habeat formam $\frac{a + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc}}{(a + bx)^p} dx$ et x in

numeratore non habeat maiorem dimensionem quam x^{p-1} , integratio difficultate non laborat. Integrale enim habetur per partes $= \int a dx (a + bx)^{-p} + \int \beta x dx (a + bx)^{-p} + \int \gamma x^2 dx (a + bx)^{-p} \text{ etc.}$ quæ omnes comprehenduntur sub forma $\int g x^m dx (a + bx^n)^p$. Proinde quia hic m est semper numerus integer et $n = 1$, erit in omnibus hisce parti-

bus $\frac{m+1}{n} =$ numero integro, atque integrale erit fini-

tum et algebraicum, nisi maxima ipsius x dimensio in numeratore sit $p-1$, quo casu integrale pendet a quadratura hyperbolæ. Sit enim iste terminus $\int x^{p-1} dx (a +$

$bx)^{-p}$, et ponatur $a + bx = z$, erit $x = \frac{z-a}{b}$ et $dx =$

$$\frac{dz}{b}, x^{p-1} = \frac{(z-a)^{p-1}}{b^{p-1}}, \text{ et proinde } \int x^{p-1} dx (a+bx)^{-p} \\ = \frac{\int (z-a)^{p-1} z^{-p} dz}{b^p} = \frac{\int (z-a)^{p-1} dz}{b^p z^p}. \text{ Est vero } p$$

numerus integer positivus et proinde quoque $p-1$, resolvi igitur potest $(z-a)^{p-1}$ in seriem finitam. Continet vero hæc series omnes ipsius z dimensiones a z^{p-1} usque ad z^0 inclusive; proinde terminus in quo occurrit z^{p-1}

sequentem habet formam $A \frac{dz}{z}$, cujus integrale est A

$\ln z$, quod pendet a quadratura hyperbolæ. Si maxima ipsius x in numeratore dimensio fuerit x^{p-2} , vel x^{p-3} etc, integrale semper erit algebraicum.

§. 384.

Quando factores simplices denominatoris sunt reales atque hi omnes sunt inæquales, ipsa functio fracta

proposita genuina, quæ sit $\frac{M}{N}$, in tot fractiones simplices

formæ $\frac{A}{p-qz}$ resolvi poterit, quot factores simplices habet

denominator N inter se inæquales, ita ut earum fractionum simplicium summa algebraica sit ipsi functioni fractæ propositæ equalis, A vero p et q sint quantitates constantes.

Hoc problema semper præbet solutionem possibilem.

Proposita sit hæc functio fracta $\frac{1+xx}{x-x^3}$, atque factores

simplices denominatoris sunt x , $1-x$, et $1+x$. Per

conditionem vero problematis erit $\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$

$= \frac{1+xx}{x-x^3}$, ubi numeratores constantes definiri oportet.

Reducantur itaque istæ fractiones ad communem denominatorem, qui erit $x-x^3$, atque numeratorum summa

ma æqualis, esse debet ipsi $1+xx$, unde ista æquatio concluditur

$$\begin{aligned} A + Bx - Axx &= 1 + xx = 1 + 0x + xx \\ + Cx + Bxx \\ - Cxx \end{aligned}$$

quæ totidem comparationes præbet, quot sunt quantitates incognitæ quælitæ. Erit nimirum $A=1$; $B+C=0$; $-A+B-C=1$. Unde concluditur $B-C=2$; $A=1$; $B=1$; $C=-1$.

Quodsi jam propositum fuerit differentiale hujus formæ $dy = \frac{M}{N} dx$, M et N sunt tales ipsius x functiones,

quales modo descriptæ sunt; fractio $\frac{M}{N}$ resolva-

tur in suas simplices, quæ sint $\frac{a}{f+x}$, $\frac{b}{g+x}$, $\frac{c}{h+x}$, etc,

ita ut sit $dy = \frac{adx}{f+x} + \frac{bdx}{g+x} + \frac{cdx}{h+x} + \text{etc}$; atque sta-

tim patet, esse $y = a.l(f+x) + b.l(g+x) + c.l(h+x) + \text{etc} = l(f+x)^a (g+x)^b (h+x)^c \text{ etc}$. Integratio igitur hujusmodi fractionum differentialium rationalium pendet, a quadratura hyperbolæ.

§. 385.

Perpetuo autem si denominator N fractionis $\frac{M}{N}$ habeat

n factores simplices reales, quorum unus sit $p-qx$, atque si S sit alter denominatoris N factor, qui ex hypothese in $n-1$ factores simplices est resolubilis, qui inter se omnes sunt inæquales, ut sit $N = (p-qx)S$; inveniri possunt

duæ fractiones formæ $\frac{A}{p-qx}$ atque $\frac{P}{S}$, ut sit $\frac{M}{N} =$

$$\frac{A}{p-qx} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)S}.$$

Concluditur enim ex hac

hypothefi $\frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)S} - \frac{A}{p-qx} = \frac{M-AS}{(p-qx)S}$, at-
 que $P = \frac{M-AS}{p-qx}$. Quia igitur eft P functio ipsius x in-
 tegra ex hypothefi, erit $M-AS$ per $p-qx$ divifibilis,
 et proinde $x = \frac{p}{q}$ radix æquationis $M-AS = 0$, ita
 ut hæc expreffio $M-AS$ pofito $x = \frac{p}{q}$ evanefcat. Po-
 natur itaque ubique loco x ifte valor conftans $\frac{p}{q}$, erit
 $M-AS = 0$, unde concluditur $A = \frac{M}{S}$. Hoc ita-
 que modo femper inveniri poteft numerator A fractio-
 nis quæfitæ $\frac{A}{p-qx}$; atque fi ex fingulis denominatoris
 N factoribus fimplicibus, dummodo fint inter fe inae-
 quales, hujusmodi fractiones fimplices formentur, harum
 fractionum fimplicium omnium fumma algebraica erit
 fractioni propofitæ $\frac{M}{N}$ æqualis.

§. 386.

Quodfi denominator fractionis rationalis $\frac{M}{N}$ ha-
 bet factores fimplices reales omnes inter fe æquales, ut
 fit $N = (p-qx)^n$, existente forma fractionis iftæ
 $\frac{P}{(p-qx)^n}$, cujus numerator tantam ipsius x poteftatem
 non involvit, quantam continet denominator; eadem fra-
 ctio transmutari poteft in hujusmodi fractiones partiales
 $\frac{A}{(p-qx)^n} + \frac{B}{(p-qx)^{n-1}} + \dots + \frac{K}{p-qx}$,
 qua-

quarum omnium numeratores sunt quantitates constantes; ita ut summa omnium fractionum partialium æqualis sit fractioni propositæ. Sub hac enim hypothese functio P huiusmodi habebit formam $a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \dots + kx^{n-1}$ existente terminorum numero $= n$, ubi tamen notandum est, quod coefficientium a, β, γ, δ , etc, unus vel aliqui possint esse $= 0$; ipsi vero functioni P æquari debet numerator summæ omnium fractionum partialium, postquam singulæ ad eandem denominationem $(p - qx)^n$ sunt perductæ, qui igitur numerator erit $A + B(p - qx) + C(p - qx)^2 + D(p - qx)^3 + \dots + K(p - qx)^{n-1}$. Hujus maxima potestas est ut ibi x^{n-1} , atque tot habentur quantitates incognitæ $A, B, C, D, \dots, K$, quarum numerus est n , quot sunt termini inter se æquales reddendi; et proinde numeratores constantes plenariæ determinantur.

§. 387.

Hisce ratiociniis simul superstruitur methodus fra-

ctionem rationalem genuinam $\frac{M}{N}$, cujus denominator N habet factores simplices reales ex parte æquales et ex parte inæquales resolvendi in fractiones simplices, quarum omnium summa algebraica sit æqualis fractioni $\frac{M}{N}$.

Habeat enim primo fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N factorem $(p - qx)^2$, atque ex hoc factore duæ nascentur

fractiones partiales $\frac{A}{(p - qx)^2} + \frac{B}{p - qx}$. Sit autem $N = (p - qx)^2 S$, denotante S productum factorum rea-

lium inæqualium, eritque $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - qx)^2 S} =$

$\frac{A}{(p - qx)^2} + \frac{B}{p - qx} + \frac{P}{S}$, denotante $\frac{P}{S}$ omnes fra-

ctiones simplices ex denominatoris factore secundum §. 385. ortas junctim sumtas. Atque ex aequatione

$$\frac{M}{(p-qx)^2 S} = \frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx} + \frac{P}{S} \text{ concluditur}$$

$$\frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qx)^2 S} - \frac{A}{(p-qx)^2} - \frac{B}{p-qx} =$$

$$\frac{M - AS - B(p+qx)S}{(p-qx)^2 S} \text{ et } P = \frac{M - AS - B(p+qx)S}{(p-qx)^2}.$$

Debet itaque $M - AS - B(p+qx)S$ divisibile esse per $(p-qx)^2$ et ideo quoque per $p-qx$. Sit primum divisibile per $p-qx$, atque tota expressio $M - AS - B(p-qx)S$ evanescet posito $p-qx = 0$, seu $x = \frac{p}{q}$. Po-

natur ideo ubique $\frac{p}{q}$ loco x , erit $M - AS = 0$, ideo-

que $A = \frac{M}{S}$. Hoc valore invento quantitas $M - AS$

$- B(p-qx)S$ etiam per $(p-qx)^2$ divisibilis esse debet,

seu $\frac{M - AS}{p-qx} - BS$ denuo divisibile est per $p-qx$. Po-

sito igitur ubique $x = \frac{p}{q}$, erit $\frac{M - AS}{p-qx} = BS$, atque

$$B = \frac{M - AS}{(p-qx)S} = \frac{1}{p-qx} \cdot \left(\frac{M}{S} - A \right), \text{ ubi no-}$$

tandum est, cum $M - AS$ divisibile sit per $p-qx$, hanc divisionem prius institui debere, quam loco x substitua-

tur $\frac{M - AS}{p-qx} = T$, eritque $B = \frac{T}{S}$ posito $x = \frac{p}{q}$.

Inventis sic numeratoribus A et B erunt fractiones partiales ex denominatoris N factore $(p-qx)^2$ oriundae

$$\frac{A}{(p-qx)^2} + \frac{B}{p-qx}.$$

§. 388.

Habeat nunc functionis fractae $\frac{M}{N}$ denominator N factorem $(p - qx)^3$, fitque $N = (p - qx)^3 S$, fractio vero ex factore S orta fit $\frac{P}{S}$, erit $P =$

$$\frac{M - AS - B(p - qx)S - C(p - qx)^2 S}{(p - qx)^3}, \text{ functio integra.}$$

Numerator itaque primo divisibilis est per $p - qx$, unde

is posito $x = \frac{p}{q}$ evanescere debet, ut fit $M - AS = 0$,

atque $A = \frac{S}{M}$. Invento sic A , erit $M - AS$ divisi-

bile per $p - qx$; ideo ponatur $\frac{M - AS}{p - qx} = T$, atque T

$- BS - C(p - qx)S$ adhuc divisibile erit per $(p - qx)^2$, et proinde fiet $= 0$ posito $p - qx = 0$, unde concludi-

tur $B = \frac{T}{S}$ posito $x = \frac{p}{q}$. Quare posito $\frac{T - BS}{p - qx}$

$= V$ superest, ut $V - CS$ divisibile sit per $p - qx$, erit-

que proinde $V - CS = 0$ posito $p - qx = 0$, atque $C =$

$\frac{V}{S}$, posito $x = \frac{p}{q}$. Atque hoc modo inventis nu-

meratoribus A, B, C , fractiones partiales ex denomina-

toris N factore $(p - qx)^3$ ortae erunt $\frac{A}{(p - qx)^3} +$

$\frac{B}{(p - qx)^2} + \frac{C}{p - qx}$. Quodsi ideo generaliter fractionis

$\frac{M}{N}$ denominator N habeat factorem $(p - qx)^n$ fractio-

nes partiales hinc ortae $\frac{A}{(p - qx)^n} + \frac{B}{(p - qx)^{n-1}} +$

Aaa 5

+

+ $\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}$ + . . . + $\frac{K}{p-qx}$ sequenti modo invenientur. Ponatur $N = (p-qx)^n S$, atque eodem modo ut ante ratiocinando reperietur

$$\begin{aligned} \text{primo } A &= \frac{M}{Z}, \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ et posito } P = \frac{M - AZ}{p - qx} \\ \text{secundo } B &= \frac{P}{Z} \dots x = \frac{p}{q} \dots Q = \frac{P - BZ}{p - qx} \\ \text{tertio } C &= \frac{Q}{Z} \dots x = \frac{p}{q} \dots R = \frac{Q - CZ}{p - qx} \\ \text{quarto } D &= \frac{R}{Z} \dots x = \frac{p}{q} \dots S = \frac{R - DZ}{p - qx} \\ \text{quinto } E &= \frac{S}{Z} \dots x = \frac{p}{q} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hoc itaque modo si definiantur singuli numeratores constantes A, B, C, D , etc; invenientur omnes fractiones partiales, quae ex denominatoris N factore $(p-qx)^n$ oriuntur.

§. 389.

Quaecunque igitur fractio rationalis integra genuina $\frac{M}{N}$ fuerit proposita, cujus denominator N habet omnes factores simplices reales ex parte vero æquales; tam inæquales, quam æquales seorsim tractari possunt. Ex unoquoque inæqualium secundum §.385. fractio partialis erui atque pro quovis æqualium fractiones partiales convenientes ex § præc. possunt inveniri. Quo facto omnium earum fractionum partialium summa algebraica erit fractioni propositæ æqualis. Habeat itaque, si integrandum proponatur differentiale $dy = \frac{M}{N} dx$, fra-

ctio $\frac{M}{N}$ ejusmodi formam, sitque $\frac{M}{N} = \frac{A}{(p-qx)^n} +$

$$+ \frac{B}{(p-qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qx)^{n-2}} + \dots + \frac{F}{p-qx} \\ + \frac{G}{a-bx} + \frac{H}{c-ex} + \dots + \frac{K}{f-gx};$$

scripto z loco $p-qx$, et omnibus fractionibus ab $\frac{A}{z^n}$

usque ad $\frac{F}{z}$ actu additis invenitur $dy =$

$$\frac{(A + Bz + Cz^2 + \dots + Fz^{n-1}) \times \frac{dz}{-q}}{z^n} + \frac{Gdx}{a-bx} \\ + \frac{Hdx}{c-ex} \dots + \frac{Kdx}{f-gx}, \text{ cujus formulae inte-}$$

grale ex parte invenitur algebraicum, ex parte logarithmicum, pendens a quadratura hyperbolae.

§. 390.

Quodsi jam functio fracta genuina $\frac{M}{N}$ præter factores simplices reales habeat quoque factores simplices imaginarios, eorum numerus semper par erit, et binorum productum dat factorem duplicem realem formae $p-qx+rx^2$, atque hic iterum duo casus sunt distinguendi; nimirum aut factores duplices reales $p-qx+rx^2$ functionis N omnes sunt inter se inæquales, aut non, ita ut functio N quoque agnoscat factorem $(p-qx+rx^2)^n$. Priori casu si quaerantur omnes denominatoris N factores simplices, sive reales sint sive imaginarii per praecepta §. 385 et 388; quaelibet binæ fractiones, quarumduæ denominatores simplices imaginarii sunt, atque productum reale efficiunt, sibi invicem addantur, et summa erit fractio formæ

$\frac{m+nx}{p-qx+rx^2}$, vel $\frac{a+bx}{xx+fx+g}$, ad quam semper reduci potest, si numerator et denominator per coefficientem ipsius

ipsius xx , si quem præter unitatem agnoscat, dividatur. Tum itaque omne negotium eo redit, si integrandum

fit $dy = \frac{M}{N} dx$, ut fractionis $\frac{adx + bxdx}{xx + fx + g}$ integrale

in potestate sit, quod sequenti ratione reperiri potest. Tollatur secundus denominatoris terminus (§. 108.) po-

nendo $x + \frac{f}{2} = z$, unde fit $\frac{adx + bxdx}{xx + fx + g} =$

$\frac{adz + bzdz - \frac{1}{2}bfdz}{zz + \frac{1}{4}ff + g}$. Ponendo igitur $a - \frac{1}{2}bf = c$,

et $\frac{1}{4}ff + g = pp$, integrandum venit differentiale $\frac{cdz}{zz + pp}$

+ $\frac{bzdz}{zz + pp}$, ubi primus terminus est differentiale ar-

cus circuli, cujus tangens est z , alter vero differentiale logarithmicum. Notandum hic est, quod in hoc integrationis negotio semper effici possit, ut xx atque g terminus primus et tertius denominatoris $xx + fx + g$ habeant signum +. Quia enim factores hujus functionis simplices sunt imaginarii, xx et g semper eodem signo gaudent. Si igitur haberent signum —, opus tantum est, ut omnia tam numeratoris, quam denominatoris signa mutantur in contraria. Hoc itaque casu integrale quæsitum pendet a quadratura circuli et hyperbolæ simul.

§. 39¹.

Si fractio $\frac{M}{N}$ in forma evoluta contempletur,

ut sit $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc}}{(pp - 2pqx \cos \varphi + qqxx)(a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \text{etc})}$

ejus forma generalis, si denominator habeat duos factores simplices imaginarios, quorum productum reale est

pp

$pp - 2pqx \cos \Phi + qqxx$, fractio partialis formae
 $\frac{A + ax}{pp - 2pqx \cos \Phi + qqxx}$

ex hoc factore oriunda etiam
 $pp - 2pqx \cos \Phi + qqxx$

sequentem in modum potest investigari. Sit brevitatis gratia numerator $A + Bx + Cxx + \text{etc.} = M$, et alter denominatoris factor $a + \beta x + \gamma xx + \text{etc.} = Z$. Ponatur altera pars ex denominatoris factore Z oriunda =

$$\frac{Y}{Z}, \text{ eritque } Y = \frac{M - AZ - aZx}{pp - 2pqx \cos \Phi + qqxx}, \text{ quæ expressio}$$

est functio integra ipsius x , et proinde $M - AZ - axZ$ divisibile est per $pp - 2pqx \cos \Phi + qqxx$. Evanescet

itaque $M - AZ - axZ$, si ponatur $pp - 2pqx \cos \Phi +$

$$qqxx = 0, \text{ hoc est si ponatur } x = \frac{p}{q} (\cos \Phi \pm r - 1.$$

$$\sin. \Phi, \text{ eritque } x^n = f^n (\cos. n\Phi \pm r - 1. \sin. n\Phi) \text{ posito}$$

$$\frac{p}{q} = f. \text{ Ideo duplex hic valor pro } x \text{ substitutus du-}$$

plicem dabit æquationem, unde duæ incognitæ constantes A et a definirî possunt. Facta igitur hac substitutione æquatio $M = AZ + aZx$ evoluta hanc duplicem dabit æquationem

$$\left. \begin{aligned} &A + Bf \cos \Phi + Cff \cos 2\Phi + Df^3 \cos 3\Phi + \text{etc.} \\ &\pm (Bf \sin \Phi + Cff \sin 2\Phi + Df^3 \sin 3\Phi + \text{etc}) r - 1 \end{aligned} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A(a + \beta f \cos \Phi + \gamma ff \cos 2\Phi + \delta f^3 \cos 3\Phi + \text{etc}) \\ &\pm A(\beta f \sin \Phi + \gamma ff \sin 2\Phi + \delta f^3 \sin 3\Phi + \text{etc}) r - 1 \\ &+ A(a f \cos \Phi + \beta ff \cos 2\Phi + \gamma f^3 \cos 3\Phi + \text{etc}) \\ &\pm A(a f \sin \Phi + \beta ff \sin 2\Phi + \gamma f^3 \sin 3\Phi + \text{etc}) r - 1 \end{aligned} \right.$$

Sit ad calculum abbreviandum.

$$A + Bf \cos \phi + Cff \cos 2\phi + Df^3 \cos 3\phi + \text{etc} = P$$

$$Bf \sin \phi + Cff \sin 2\phi + Df^3 \sin 3\phi + \text{etc} = \Pi$$

$$a + \beta f \cos \phi + \gamma ff \cos 2\phi + \delta f^3 \cos 3\phi + \text{etc} = Q$$

$$\beta f \sin \phi + \gamma ff \sin 2\phi + \delta f^3 \sin 3\phi + \text{etc} = K$$

$$af \cos \phi + \beta ff \cos 2\phi + \gamma f^3 \cos 3\phi + \text{etc} = R$$

$$af \sin \phi + \beta ff \sin 2\phi + \gamma f^3 \sin 3\phi + \text{etc} = r$$

eritque his positis $P \pm \Pi r - 1 = AQ \pm AKr - 1 + aR \pm ar - 1$, unde ob signorum ambiguitatem hae duae oriuntur æquationes $P = AQ + aR$ et $\Pi = AK + ar$, ex quibus incognitæ A et a ita definiuntur, ut sit $A =$

$$\frac{Pr - \Pi R}{Qr - KR}, a = \frac{PK - \Pi Q}{KR - Qr}.$$

Proposita igitur fractione

$$\frac{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)x}{A + ax}$$

ctio partialis ex ea oriunda

$$\frac{A + ax}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx}$$

definietur. Posito $f = \frac{p}{q}$, et evolutis singulis terminis

$$\text{posito } x^n = f^n \cos. n\phi \text{ fiat } M = P$$

$$\dots x^n = f^n \sin. n\phi \dots M = \Pi$$

$$\dots x^n = f^n \cos. n\phi \dots Z = Q$$

$$\dots x^n = f^n \sin. n\phi \dots Z = K$$

$$\dots x^n = f^n \cos. n\phi \dots xZ = R$$

$$\dots x^n = f^n \sin. n\phi \dots xZ = r$$

$$\text{erit } A = \frac{Pr - \Pi R}{Qr - KR} \text{ et } a = \frac{\Pi Q - PK}{Qr - KR}.$$

§. 392.

Possunt valores quantorum R et Pr ex quantis Q et K definiri, cum enim sit

$$Q =$$

$$Q = a + \beta f \cos \phi + \gamma ff \cos 2\phi + \delta f^3 \cos 3\phi \text{ etc.}$$

$$K = \beta f \sin \phi + \gamma ff \sin 2\phi + \delta f^3 \sin 3\phi \text{ etc; erit}$$

$$Q \cdot \cos \phi - K \sin \phi = a \cos \phi + \beta f \cos 2\phi + \gamma ff \cos 3\phi + \text{etc}$$

ideoque $R = f(Q \sin \phi + K \cos \phi)$.

Ex his porro concluditur

$$Qr - KR = (QQ + KK) f \sin \phi$$

$$Pr - \Pi R = (PQ + \Pi K) f \sin \phi + (PK - \Pi Q) f \cos \phi.$$

$$\text{Proinde } A = \frac{PQ + \Pi K}{QQ + KK} + \frac{PK - \Pi Q}{QQ + KK} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$a' = - \frac{PK + \Pi Q}{(QQ + KK) f \sin \phi}.$$

Quare ex denominatoris factore $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ oritur ista fractio partialis

$$\frac{(PQ + \Pi K) f \sin \phi + (PK - \Pi Q) (f \cos \phi - x)}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx) (QQ + KK) \sin \phi}, \text{ vel,}$$

$$\text{ob } = \frac{p}{q}, \text{ ista}$$

$$\frac{(PQ + \Pi K) p \sin \phi + (PK - \Pi Q) (p \cos \phi - qx)}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx) (QQ + KK) p \sin \phi}; \text{ atque}$$

quanta P, Π, Q et K sequenti modo ex functionibus M et Z inveniuntur:

$$\text{Posito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos \phi \text{ fit } M = P$$

$$\text{et } Z = Q$$

$$\text{et posito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin \phi \text{ fit } M = \Pi$$

$$\text{et } Z = K$$

ubi notandum est, functiones M et Z , antequam hæc substitutio fiat, omnino evolvi debere; ut hujusmodi habeant formas

$$M = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

$$\text{et } Z = a + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \text{etc.}$$

Erit

Erit itaque

$$P = A + B \frac{p}{q} \cos \phi + C \frac{p^2}{q^2} \cos 2\phi + D \frac{p^3}{q^3} \cos 3\phi + \text{etc.}$$

$$\Pi = B \frac{p}{q} \sin \phi + C \frac{p^2}{q^2} \sin 2\phi + D \frac{p^3}{q^3} \sin 3\phi + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha + \beta \frac{p}{q} \cos \phi + \gamma \frac{p^2}{q^2} \cos 2\phi + \frac{p^3}{q^3} \cos 3\phi + \text{etc.}$$

$$K = \beta \frac{p}{q} \sin \phi + \gamma \frac{p^2}{q^2} \sin 2\phi + \delta \frac{p^3}{q^3} \sin 3\phi + \text{etc.}$$

§. 393.

Ex his jam via patet ad ultimum casum dijudican-
dum, quo denominator fractionis $\frac{M}{N}$ eundem facto-

rem $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ aliquoties in se complectitur.

Hoc casu in æquatione $M = AZ + aZx$ facta substitutio-
ne $x^n = f(\cos. n\phi \pm r - 1. \sin \phi)$ ipsa quantitas Z eva-

nescit. Ideo si functionis fractæ $\frac{M}{N}$ denominator ha-

beat factorem $(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^2$ vel altiore
potestatem, peculiari opus erit resolutione. Sit primo
 $N = (p - 2pqx \cos \phi + qqxx)^2 Z$; atque ex denomina-
toris factore $(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^2$ orientur hujus-

modi duae fractiones partiales $\frac{A + ax}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^2}$

+ $\frac{B + bx}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx}$, ubi quantitates constan-

tes A, a, B, b sunt definiendae. His vero positis de-
bet ista expressio

$$\frac{M - (A + ax)Z - (B + bx)Z(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^2}$$

esse

esse functio integra, et proinde numerator erit divisibilis per denominatorem. Primum itaque hæc expressio $M - AZ - AxZ$ divisibilis esse debet per $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$, qui cum sit casus præcedens, eodem modo quantitates A et a determinabuntur. Quare

$$\text{posito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos. n\phi \text{ fit } M = P$$

$$\text{et } Z = N$$

$$\text{posito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin. n\phi \text{ fit } M = \Pi$$

$$\text{et } Z = \nu$$

Hisque factis secundum regulam præcedentem erit

$$A = \frac{PN - \Pi\nu}{N^2 + \nu^2} + \frac{PN - \Pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

$$a = - \frac{P\nu + \Pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \sin \phi}.$$

Inventis hoc modo A et a , fiet $\frac{M - (A + ax)Z}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx}$

functio integra, quæ sit $= P$, atque superest, ut $P - BZ - bxZ$ divisibile evadat per $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$, quæ expressio cum similis sit præcedenti, si posito $x^n =$

$$\frac{p^n}{q^n} \cos n\phi \text{ fiat } P = R$$

$$\text{et posito } x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin. n\phi \text{ fiat } P = r;$$

$$\text{erit } B = \frac{RN + r\nu}{N^2 + \nu^2} + \frac{R\nu - rN}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\text{et } b = - \frac{R\nu + rN}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \sin \phi}.$$

§. 394.

Ex his generaliter jam concludere licet, quomodo resolutio institui debeat, si denominator fractio-

nis $\frac{M}{N}$ factorem habeat $(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k$.

Sit enim $N = (pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k Z$, ita ut hæc

resolvenda sit functio fracta $\frac{M}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k Z}$,
atque factor denominatoris $(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k$
 $A + ax$

præbeat has partes $\frac{B + bx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k} + \frac{C + cx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^{k-1}} +$

$\frac{D + dx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^{k-2}} +$

etc. Jam posito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\phi$ fit $M = M$

et $Z = N$

posito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin n\phi$ fit $M = \mu$

et $Z = \nu$

erit $A = \frac{MN + \mu N}{N^2 + \nu^2} + \frac{M\nu - \mu N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$.

$a = - \frac{M\nu + \mu N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{p \cdot \sin \phi}$.

Deinde ponatur $\frac{M - (A + ax)Z}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx} = P$, atque

posito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\phi$ fit $P = P$

et posito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin n\phi$ fit $P = \pi$

erit $B = \frac{PN + \pi \nu}{N^2 + \nu^2} + \frac{P\nu - \pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$

$b = - \frac{P\nu + \pi N}{N^2 + \nu^2} \cdot \frac{q}{\sin \phi}$.

Porro

Porro vocetur $\frac{P - (B + bx) Z}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx} = Q$, atque

posito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \cos. n\phi$ fit $Q = Q$.

etposito $x^n = \frac{p^n}{q^n} \sin. n\phi$ fit $Q = K$, erit

$$C = \frac{QN + Kv}{N^2 + v^2} + \frac{Qv - KN}{N^2 + v^2} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

$$e = - \frac{Qv + KN}{N^2 + v^2} \cdot \frac{q}{p \sin \phi}.$$

Eodem modo progrediendum est, donec ultimæ fractionis, cujus denominator est $pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$, numerator sit determinatus.

§. 395.

Quodsi jam integranda proponatur functio rationalis

facta hujus formæ $\frac{Mdx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k Z}$; ea resolvatur in fractiones partiales formæ

$$\frac{A dx + a x dx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k} + \frac{B dx + b x dx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^{k-1}} + \frac{C dx + c x dx}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^{k-2}} + \dots + \frac{F dx + f x dx}{pp - 2pqx \cos \phi + qqxx} + \frac{Y}{Z},$$

ubi $\frac{Y}{Z}$ est pars ex

evolutione factoris Z orta, quam integrare jam novimus.

Omnibus vero reliquis fractionibus ex evolutione factoris

$pp - 2pqx \cos \phi + qqxx$ sibi invicem additis atque ad communem denominatorem $(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k$ reductis, summa sequentem habebit formam

$$\frac{a + Bx + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \dots + \vartheta x^k}{(pp - 2pqx \cos \phi + qqxx)^k} dx, \quad \text{unde}$$

generaliter universa integratio reducitur ad integratio-

nem fractionis formæ $\frac{Ax^m dx}{(B+Cx+Dxx)^k}$, m et k existen-

tibus integris positivis. — Sed per præcepta § 390. hæc fractio transformatur in aggregatum fractionum partia-

linum hujus formæ $\frac{Gz^r dz}{(zz+pp)^k}$, r existente numero in-

tegro pari aut impari. Priori casu posito $zz+pp=$

uu fractio $\frac{Gz^r dz}{(zz+pp)^k}$ transformatur in functionem, cu-

jus termini hanc habent formam $Hu^q du$, existente q positivo vel negativo, atque tum integratio nulla prorsus laborabit difficultate. — Posteriori casu si r est numerus impar posito $zz+pp=uu$ functio post transfor-

mationem constabit ex terminis formæ $\frac{Cu^s du}{r(uu-pp)}$, exi-

stente s numero pari positivo, vel negativo, atque tum habebitur aut integrale algebraicum si s sit negativus (§. 379.) aut a quadratura circuli pendens si s fuerit positivus (§. cit.).

§. 396.

Methodus exposita fractionem quamvis propositam in simpliciores resolvendi calculi differentialis ope sic perfici potest, ut sæpe numero multo minori negotio ad optatum perveniri possit scopum. Nil itaque superest, nisi ut usus calculi differentialis in hoc quoque nego-

tio ob oculos ponatur. Primo itaque fractionis $\frac{M}{N}$

denominator N habeat unum factorem simplicem formæ $f+gx$, ita ut sit $N=(f+gx)S$. Sit fractio simplex

ex isto factore orta $= \frac{A}{f+gx}$, et complementum hu-

jus-

jusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ut sit $\frac{M}{N} = \frac{A}{f+gx} + \frac{V}{S}$. Erit itaque $\frac{V}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{f+gx} = \frac{M-AS}{(f+gx)S}$, et $V = \frac{M-AS}{f+gx}$. Quia vero est V functio ipsius x integra, $M-AS$ per $f+gx$ divisibilis erit. Proinde si ponatur $x = -\frac{f}{g}$, id est $f+gx=0$, expressio $M-AS$ pariter evanescet. Fiat ergo $x = -\frac{f}{g}$, erit $M-AS=0$, et $A = \frac{M}{S}$. Sed $S = \frac{N}{f+gx}$, proinde $A = \frac{(f+gx)M}{N}$. Quoniam itaque hujus fractionis numerator et denominator casu $x = -\frac{f}{g}$ evanescit, ex §. 249. erit $A = \frac{(f+gx)dM + Mgdx}{dN} = \frac{gMdx}{dN}$, ob $\frac{(f+gx)dM}{dN} = 0$. Atque sic valor numeratoris A per differentiationem expedite invenitur.

§. 397.

Sit denominatoris N factor quadratus $(f+gx)^2$, et fractiones hinc oriundæ sint $\frac{A}{(f+gx)^2} + \frac{B}{f+gx}$; ponamus $N = (f+gx)^2 S$, et complementum $= \frac{V}{S}$,

ita ut sit $\frac{V}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{(f+gx)^2} - \frac{B}{f+gx}$, erit V

$$= \frac{M - AS - B(f + gx)S}{(f + gx)^2}, \text{ unde functio } M - AS -$$

$BS(f + gx)$ est divisibilis per $(f + gx)^2$; et quia S factorem $f + gx$ amplius non continet, etiam formula

$$\frac{P}{S} = A + B(f + gx) \text{ per } (f + gx)^2 \text{ divisibilis erit.}$$

Casu itaque $x = -\frac{f}{g}$ seu $f + gx = 0$, non solum ipsa hæc formula evanescit, sed etiam ejus differentiale d .

$$\frac{M}{N} = Bgdx \text{ per } dx \text{ divisum erit nihilo æquale. Sit}$$

$$\text{itaque } x = -\frac{f}{g}, \text{ eritque ex priori æquatione } A =$$

$$\frac{M}{S} \text{ et ex posteriori fit } B = \frac{1}{gdx} d \cdot \frac{M}{S}.$$

Si N habeat factorem cubicum, atque sit $N = (f + gx)^3 S$, unde fractiones inveniendæ sint sequentes $\frac{A}{(f + gx)^3}$,

$$\frac{B}{(f + gx)^2}, \frac{C}{f + gx}, \text{ complementum vero } \frac{V}{S}; \text{ erit}$$

$$V = \frac{M - AS - BS(f + gx) - CS(f + gx)^2}{(f + gx)^3}. \text{ Unde}$$

$$\text{formula } \frac{M}{S} = A + B(f + gx) + C(f + gx)^2 \text{ divisi-}$$

bilis erit per $(f + gx)^3$, et posito $x = -\frac{f}{g}$, non so-

lum ipsa hæc formula, sed et ipsius differentiale primum per dx et differentiale secundum per dx^2 divisum fit $= 0$.

$$\text{Ponendo itaque } x = -\frac{f}{g}, \text{ erit}$$

$$\frac{M}{S}$$

$$\frac{M}{S} - A - B(f + gx) - C(f + gx)^2 = 0$$

$$d. \frac{M}{S} dx - Bg - 2Cg(f + gx) = 0$$

$$dd. \frac{M}{S} : dx^2 - Cgg = 0$$

$$\text{Erit itaque ex prima æquatione } A = \frac{M}{S}$$

$$\text{ex secunda } B = \frac{1}{2ggdx} d. \frac{M}{S}$$

$$\text{ex tertia } C = \frac{1}{2ggdx^2} dd. \frac{M}{S}$$

§. 398.

Quodsi denique generatim N habeat factorem $(f + gx)^n$, ita ut sit $N = (f + gx)^n S$; positis fractionibus simplicibus ex hoc factore oriundis sequentibus $\frac{A}{(f + gx)^n}$

$$+ \frac{B}{(f + gx)^{n-1}} + \frac{C}{(f + gx)^{n-2}} + \frac{E}{(f + gx)^{n-3}} + \frac{E}{(f + gx)^{n-4}} \dots + \frac{K}{f + gx} : \text{eodem modo}$$

$$\text{ut ante ratiocinando functio } \frac{M}{S} - A - B(f + gx) -$$

$C(f + gx)^2 - D(f + gx)^3 - E(f + gx)^4 - \text{etc.}$, divisibilis deprehenditur per $(f + gx)^n$. Ideo tam ipsa hæc functio quam singula ejus differentialia usque ad gradum $n - 1$ per convenientem ipsius dx dignitatem di-

visa erunt $= 0$ casu $x = -\frac{f}{g}$. Atque ex hisce æqua-

tionibus concluduntur sequentes numeratorum partialium

lium valores $A = \frac{M}{S}$, $B = \frac{1}{1gdx} d\frac{M}{S}$, $C = \frac{1}{1.2ggdx^2} dd.\frac{M}{S}$, $D = \frac{1}{1.2.3.g^3dx^3} d^3\frac{M}{S}$, $E = \frac{1}{1.2.3.4.g^4dx^4} d^4.\frac{M}{S}$, etc. Ubi notandum est, differentialia ista ipsius $\frac{M}{S}$ ante quæri debere, quam ponitur $x = -\frac{f}{g}$, quia alias variabilitas ipsius x tolleretur. §. 399.

Si fractionis $\frac{M}{N}$ denominator N duos habet fa-

ctores impossibiles formæ $x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$, quorum productum est $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$, ita ut habeatur $N = (ff - 2fgx \cos \phi + ggxx)S$; sit fractio ex isto denominatoris factore duplici oriunda

$\frac{A + ax}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx}$, et complementum ad propositionem $\frac{M}{N}$ sit $= \frac{V}{S}$. Erit $V = \frac{M - (A + ax)S}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx}$

unde $M - (A + ax)S$, et proinde quoque $\frac{M}{S} - A - ax$ per $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx$ dividi potest absque residuo.

Ergo $\frac{P}{S} - A - ax$ evanescit posito vel $x = \frac{f}{g} \cos \phi$

$+ \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$, vel $x = \frac{f}{g} \cos \phi - \frac{f}{g\sqrt{-1}} \sin \phi$. Quia M et

S sunt functiones integræ variabilis x , fiat in utraque seorsum

sin utraque substitutio. Et quia $x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos n\phi \pm \frac{f^n}{g^n r - 1}$
 $\sin n\phi$, ponatur primo ubique $\frac{f^n}{g^n} \cos n\phi$ pro x^n , at-
 que hoc facto abeat M in $\mathfrak{M}$ et S in $\mathfrak{S}$. Deinde po-
 natur ubique $\frac{f^n}{g^n} \sin n\phi$ pro x^n , hocque facto abeat
 M in m et S in s . His valoribus $\mathfrak{M}$, m , $\mathfrak{S}$, s , in-
 ventis manifestum est, si ponatur $x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm$
 $\frac{1}{gr - 1} \sin \phi$, functionem M abituram esse in $\mathfrak{M} \pm$
 $\frac{m}{r - 1}$, functionem vero S in $\mathfrak{S} \pm \frac{s}{r - 1}$. Cum itaque
 $\frac{M}{S} = A - ax$ seu $M = (A + ax)S$ utroque casu eva-
 nescere debeat, erit $\mathfrak{M} \pm \frac{m}{r - 1} = (A + \frac{af}{g} \cos \phi \pm$
 $\frac{af}{gr - 1} \sin \phi) (\mathfrak{S} \pm \frac{s}{r - 1})$, unde ob signa ambigua duæ
 æquationes deducuntur nimirum

$$\mathfrak{M} = A\mathfrak{S} + \frac{af\mathfrak{S}}{g} \cos \phi - \frac{afs}{g} \sin \phi$$

$$m = As + \frac{afs}{g} \cos \phi + \frac{af\mathfrak{S}}{g} \sin \phi$$

ex quibus eliminando A deducitur $\mathfrak{S}m - s\mathfrak{M} =$
 $\frac{af(\mathfrak{S}^2 + s^2)}{g} \sin \phi$, atque $a = \frac{g(\mathfrak{S}m - s\mathfrak{M})}{f(\mathfrak{S}^2 + s^2) \sin \phi}$.

Deinde eliminando $\sin \phi$ invenitur $\mathfrak{S}m + sm = (\mathfrak{S}^2$

$$+ s^2) (A + \frac{cf}{g} \cos \phi). \text{ Ergo } A = \frac{\mathfrak{S}M + sm}{\mathfrak{S}^2 + s^2} - \frac{(\mathfrak{S}m - sM) \cos \phi}{N}$$

$$\frac{(\mathfrak{S}^2 + s^2) \sin \phi}{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx} \text{ Præterea est } S = \frac{ff - 2fgx \cos \phi + ggxx}{(\mathfrak{S}^2 + s^2) \sin \phi}$$

cujus fractionis numerator et denominator $ff - 2fgx \cos \phi + ggxx = 0$ simul evanescunt. Ideo ex §. 249. fit hoc

$$\text{casu } S = \frac{dN : dx}{2ggx + 2fg \cos. \phi}. \text{ Ponamus jam, si ubique}$$

$$\text{substituatur } x^n = \frac{f^n}{g^n} \cos. n\phi \text{ functionem } \frac{dN}{dx} \text{ abire in}$$

$$N, \text{ eandem autem abire in } n \text{ a substituto } x^n = \frac{f^n}{g^n}$$

$$\sin. n\phi, \text{ atque patet, posito } x = \frac{f}{g} \cos \phi \pm \frac{f}{gr - 1}$$

$$\sin. \phi \text{ functionem } \frac{dN}{dx} \text{ abire in } N \pm \frac{n}{r - 1}, \text{ unde fun-}$$

$$\text{ctio } S \text{ abibit in } \frac{N \pm n : r - 1}{\pm 2fg \sin \phi : r - 1}. \text{ Sed } S = \mathfrak{S} \pm \frac{s}{r - 1}$$

$$\text{unde eodem valore pro } x \text{ posito habetur } N \pm \frac{n}{r - 1} = \pm$$

$$\frac{2fg\mathfrak{S}}{r - 1} \sin \phi - 2fgs \sin \phi. \text{ Ergo est } s = \frac{-N}{2fg \sin \phi} \text{ et } \mathfrak{S} =$$

$$\frac{n}{2fg \sin \phi}, \text{ quibus valoribus substitutis obtinetur } a =$$

$$\frac{2gg(mn + MN)}{N^2 + n^2} \text{ et } A = \frac{2fg(Mn - mN) \sin \phi}{N^2 + n^2}$$

$$\frac{2fg(m.n + MN) \cos \phi}{N^2 + n^2}$$

SECT.

***** SECTIO XXV.

DE

INTEGRATIONE FUNCTIONVM VNIVS VARIABILIS TRANS- SCENDENTIVM.

§. 400.

Quia proposita formula differentiali $dy = Pdx$, cujus integrale quæritur, functio P non tantum algebraica, sed quoque transcendens esse possit; in primo autem casu omnes fere explicatæ sint methodi, quibus ad integrationem æquationis $dy = Pdx$ pervenitur: restat alter casus, quo functio P transcendens est, quem hac sectione contemplaturi sumus. Sit itaque primo P functio logarithmica, et integranda proposita sit formu-

la differentialis $\frac{dx}{x \ln x}$. Pono $\ln x = y$, ex quo fit $\frac{dx}{x}$

$= dy$, et his substitutis habetur $\frac{dx}{x \ln x} = \frac{dy}{y}$, cujus in-

tegrale est $\ln y$, et restituto valore ipsius y , erit $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x$

Sit $dy = m(\ln x)^{m-1} \frac{dx}{x}$ et quæritur y . Pono $\ln x =$

z , ut fit $\frac{dx}{x} = dz$, $(\ln x)^{m-1} = z^{m-1}$ et $m(\ln x)^{m-1} \frac{dx}{x} = mz^{m-1} dz$; integrale quæsitum erit $= z^m = (\ln x)^m$.

Sit $dy = m, (\ln x)^{m-1} \frac{dx}{x \ln x}$ et quæritur y . Pono $\ln x$
 $= z,$

$= z$, ex quo fit $\frac{dx}{x} = dz$, $llx = lz$, proinde est $dy =$

$m(lz)^{m-1} \frac{dz}{z}$, ac $y = (lz)^m = (llx)^m$.

Sit $dy = nm (lx^m)^{n-1} \frac{dx}{x}$, et quaeritur y . Pono

$x^m = z$, ut fiat $dx = \frac{dz}{mx^{m-1}}$, $lx^m = lz$, et $dy = nm$

$(lz)^{n-1} \frac{dz}{mx^m} = n \cdot (lz)^{n-1} \frac{dz}{z}$, ex quo habetur $y = (lz)^n$
 $= (lx^m)^n$.

Sit $dy = nm (l(lx)^m)^{n-1} \frac{dx}{x lx}$, et quaeritur y . Po-

no $lx = z$, ex quo habetur $\frac{dx}{x} = dz$, $(lx)^m = z^m$,

et $dy = nm (lz^m)^{n-1} \frac{dz}{z}$, proinde $y (lz^m)^n = (l$
 $(lx)^m)^n$.

§. 401.

Ad functiones exponentiales quod attinet, cum generaliter quantitatis exponentialis differentiale fit ipsa illa quantitas per differentiale logarithmi sui multiplicata: vicissim, si proponatur formula differentialis exponentialis, ejus integrale erit ipsa haec quantitas per differentiale logarithmi sui divisa. Ita si fuerit $dy = c^x dx$, erit $y = c^x$. Si fit $du = xy dy lx + xy^{-1} y dx$, invenitur $u = xy$. Ad hujusmodi integralia invenienda iterum multum utilitatis afferunt substitutiones, qua exponentialis quantitas alii variabili aequalis ponitur. Proposita nimirum fit aequatio $dy = c^x dx$, et quaeritur y . Pono $c^x = z$, ex quo fit $xlc = lz$, vel $x = lz$, si c fit basis logarith-

garithmorum naturalium. Porro erit $dx = \frac{dx}{z}$, et

proinde $dy = z \frac{dz}{z} = dz$, et $y = z = e^x$.

Si proposita sit æquatio $du = xy \, dylx + xy^{-1}ydx$,
et quærat^r u , pono $xy = z$, $xy^{-1} = \frac{z}{x}$, ex quo

habetur $ylx = lz$, et $y \frac{dx}{x} + dylx = \frac{dz}{z}$. Fit igitur

$du = z \frac{dz}{z} - zy \frac{dx}{x} + \frac{z}{x} ydx = dz$, et $u = z = xy$.

Si sit $du = xy^z (y^z x^{-1} dx + y^z dx lx ly + z dylx)$, pono $xy^z = s$, ut fiat $y^z lx = ls$, et $y^z x^{-1} dx + y^z dx lx ly + y^{z-1} z dylx = \frac{ds}{s}$. Proinde factis substitutionibus

erit $du = ds$, atque $u = s = xy^z$.

§. 402.

Cum quævis functio y unius variabilis x repræsentet lineam quandam, patet, si ratio variabilium y et x ad se invicem detur per æquationem exponentialem, hac ipsa æquatione lineam quandam definiri a natura huius æquationis *exponentialem* vocatam. Aequatio quævis indeterminata duarum variabilium x et y mutuam a se invicem dependentiam exprimens consrui dicitur, si una earum x per rectam indefinitam repræsentata et quovis ipsius x valore per partem DE in eadem abscissam exhibito huic DE applicetur alia recta EF alterius variabilis y valorem ipsi DE respondentem repræsentans. Inquirendum igitur nobis erit in methodum æquationes quoque exponentiales consruendi. Proposita igitur sit æquatio $x^x = y$, atque ex eadem elicitur sequens æquatio

tio logarithmica, $x^x = ly$. Sit descripta logarithmica PB, cujus subtangens $= 1 = AD$, sitque $DE = BC = x$, erit $DC = lx$. Fiat $AD : BC = DC : DM$, erit $DM = x^x = ly$, et proinde $MN = y$, cui si æqualis applicetur EF ad abscissam DE, erit punctum F in curva quæsitæ HGF. Positio tangentis in F sic invenitur. Aequatione $x^x = y$ differentiata sit $x^x dx + x^x lxdx = dy$, et substituto y loco x^x erit $dy = ydx + ylx dx$, proinde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y(1+lx)} \text{ et subtangens} = \frac{1}{1+lx} = \frac{AD}{AD+DC}.$$

Sumta igitur $AD + DC : AD = AD : EL$, erit EL subtangens et FL tangens curvæ in puncto F.

Quodsi proponatur curva, cujus æquatio $x^y = a$, habebitur ad logarithmos redacta $ylx = la$, unde, ut in casu præcedente factum est, per logarithmicam elicitur curvæ constructio. Differentiando autem erit $x^y dy = -aydx$, id quod subtangentem determinat.

§. 303.

Eslo curvæ æquatio $x^x = a^y$, et proinde $x^x = yla$, quod constructioni inservit. Sumtis differentialibus obtinetur $dx + lxdx = dy la$, ex quo pariter subtangentis determinatio fuit. Observatu dignum est, quod hujus curvæ quadratura citra seriem possit exhiberi. Est enim

$$\int ydx = \frac{2xxx^x - xx}{4la}.$$

Si proponeretur $a^x = y$, ideoque esset $xla = ly$, prodiret $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{la} = \text{constanti}$, unde concludendum æquationem ipsissimæ logarithmicæ competere.

Data jam sit exponentialis plurium terminorum, e. g. $x^x + x^c = x^y + y$. Sumtis differentialibus cujusque termini separatim invenitur $d. x^x = x^x dx + x^x lxdx$; $d. x^c = cx^{c-1}dx$; $d. x^y = yx^{y-1}dx + x^y lxdy$, quæ rite disposita dabunt hanc æquationem $x^x dx + x^x lxdx + cx^{c-1}dx - yx^{y-1}dx = x^y lxdy + dy$. Inferendo itaque

ut

ut dy ad dx , id est ut $x^x + x \cdot lx + cxc^{-1} - yxy^{-1}$ ad $x^y \cdot lx + 1$; ita y ad quartam proportionalem: erit haec quarta proportionalis subtangens quaesita curvae propositae. Multitudo terminorum constructionem plane non impedit. Cum enim mediante logarithmica singulis seorsim assignari possit quantitas aequalis; patet utique, quantitates istas hoc modo assignatas simul sumtas formare ipsam illam, quae quaeritur.

Haec exempla allata abunde illustrant processum instituendum circa alias primi gradus exponentiales; atque ex illis haud difficulter perspicitur, quomodo methodus applicanda sit ad altiores gradus; in omnibus enim par operandi ratio observanda est.

§. 404.

Præter has methodos inveniendi integralia formularum differentialium logarithmicarum et exponentialium etiam alia uti possumus, quæ sequentibus nititur ratiociniis. Si integrari debeat formula ydx et y sit functio ipsius x ; erit $ydx = ydx + xdy - xdy$, et ideo $\int ydx = \int (ydx + xdy) - \int xdy = xy - \int xdy$. Pari modo existentibus y et z functionibus ipsius x si integranda sit formula $yzdx + xzdy$; erit $yzdx + xzdy = yzdx + xzdy + xydz - xydz$, ac proinde $\int (yzdx + xzdy) = \int (yzdx + xzdy + xydz) - \int xydz = xyz - \int xydz$. His positis quaerendum sit integrale formulae $x dx \cdot lx$; ac observo $x dx$ esse differentiale ipsius xx per $\frac{1}{2}$ multiplicatum, ita ut posito $xx = z$ sit $x dx = \frac{1}{2} dz$, et $x dx \cdot lx = \frac{1}{2} lxdz = ydz$, si loco $\frac{1}{2} lx$ ponatur y . Sed est $ydz + z dy - zdy = ydz$, ideo integrale quaesitum $= yz - \int zdy =$

$$\frac{1}{2} xx lx - \int xx \cdot \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} xx lx - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} xx lx - \frac{1}{4} xx.$$

Secundum eandem methodum generatim inveniatur $\int x^m$

$$lx \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

§. 405.

§. 405.

Si propositum sit differentiale $x^m dx \cdot (lx)^n$, iterum observo, $x^m dx$ esse differentiale ipsius x^{m+1} per $\frac{1}{m+1}$ multiplicatum. Pono itaque $x^{m+1} = z$, erit $x^m dx$

$$= \frac{1}{m+1} dz. \text{ Pono præterea } \frac{1}{m+1} (lx)^n = y, \text{ erit } dy$$

$$= \frac{1}{m+1} n (lx)^{n-1} \frac{dx}{x} \text{ atque } x^m dx \cdot (lx)^n = y dz, \text{ ideo-}$$

que integrale quæsitum $= \int (y dz + z dy) - \int z dy = yz -$

$$\int z dy = \frac{x^{m+1}}{m+1} (lx)^n - \int \frac{nx^m dx}{m+1} (lx)^{n-1}. \text{ Eadem ope-}$$

ratione continuata secundi terminini integrale invenitur $-$

$$\frac{nx^{m+1}}{(m+1)^2} (lx)^{n-1} + \int \frac{n \cdot n-1 \cdot x^m}{(m+1)^2} (lx)^{n-2} dx. \text{ Terti termini}$$

$$\text{per eadem principia invenitur } - \frac{n \cdot n-1 \cdot x^{m+1}}{(m+1)^3} (lx)^{n-2} -$$

$$\int \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^m}{(m+1)^3} (lx)^{n-3} dx, \text{ atque hæc operatio}$$

quoties n est numerus integer positivus tandem finietur et series abrumpetur. Alias eadem series in infinitum excurrit.

Forma seriei generalis hæc erit $\int x^m dx (lx)^n$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(lx^n - \frac{n(lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n \cdot n-1 \cdot (lx)^{n-2}}{(m+1)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{(m+1)^3} (lx)^{n-3} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{(m+1)^4} (lx)^{n-4} \right.$$

$- \text{etc.})$.

§. 406.

Adplicemus hæc quoque ad functiones exponentiales; atque si proponatur functio $zegz dz$, ejus integrale sic quæritur. Observo, quod $egz dz$ sit differentiale ipsius

sius egz per constantem g divisum. Posito itaque $\frac{egz}{g} = y$, erit $egzdz = dy$. Proinde $zegzdz = zdy$. Est vero $\int zdy = \int (zdy + ydz) - \int ydz = yz - \int egzdz = yz - \int \frac{egzdz}{g} = \frac{egz z}{g} - \frac{egz}{gg}$. Eadem methodo invenitur $\int z^2 egzdz = \frac{z^2 egz}{g} - \int \frac{2zegzdz}{g}$, et $\int \frac{2zegzdz}{g} = -\frac{2zegz}{gg} + \frac{2egz}{g^3}$. Proinde $\int z^2 egzdz = \frac{z^2 egz}{g} - \frac{2zegz}{gg} + \frac{2egz}{g^3}$. Haud difficile est, adplicare hanc methodum ad formulam generalem $z^m egzdz$. Invenietur enim $\int z^m egzdz = egz \left(\frac{z^m}{g} - \frac{mz^{m-1}}{gg} + \frac{m \cdot m-1 \cdot z^{m-2}}{g^3} - \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot z^{m-3}}{g^4} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot z^{m-4}}{g^5} - \text{etc.} \right)$, quae series iterum si m est numerus integer positivus tandem ob-
rumpitur.

§. 407.

Quod attinet ad quantitates transcendentes ex cir-
culo ortas; primo quia differentiale sinus arcus cujusvis
æquale est differentiali arcus per cosinum multiplicato;
vicissim habemus regulam: *Integrale cosinus per differen-
tiale arcus ipsius multiplicati, sinus ejusdem arcus est*, id
est $\int dx \cos. x = \sin. x + C$. Constans C definitur ex §.

310. Sic quoque est $\int dx \cos. ax = \frac{\sin. ax}{a} + C$,

quod integrale sic invenitur. Pono $ax = y$, erit $adx =$
C c c

$= dy$, et $dx = \frac{dy}{a}$, hisque valoribus substitutis ha-

betur $\frac{1}{a} dy \cos. y$ loco $dx \cos. ax$, et proinde integrale

$$\text{quæsitum est } \frac{1}{a} \sin. y + C = \frac{\sin. ax}{a} + C.$$

Si proponeretur formula $dx \cos \frac{x}{a}$; cujus integrale quæritur; pono $\frac{x}{a} = y$, erit $\frac{dx}{a} = dy$ et dx

$= a dy$, unde $dx \cos \frac{x}{a} = a dy \cos. y$, cujus integrale est

$$a \sin. y, \text{ et proinde } \int dx \cos \frac{x}{a} = a \sin \frac{x}{a} + C.$$

Quia deinde est differentiale cosinus cujusque arcus æquale differentiali arcus negative sumto per sinum ejusdem arcus multiplicato; inde fluit regula: *Integrale cosinus per differentiale arcus ipsius multiplicati est sinus ejusdem arcus cum signo contrario.* Ita est $\int dx \sin. x$

$= -\cos. x + C$. Eodem itaque modo ut ante inveni-

$$\text{tur } \int dx \sin. ax = -\frac{\cos. ax}{a} + C, \text{ et } \int dx \sin \frac{x}{a} = -a$$

$$\sin \frac{x}{a} + C.$$

§. 408.

Integranda jam sit formula $dx \cos. ax \sin. \beta x$, atque integrale habetur per eadem præcepta. Est enim $\sin ax.$

$$\cos \beta x = \frac{\sin(a+\beta)x}{2} + \frac{\sin(a-\beta)x}{2}, \text{ et proinde } dx$$

$$\cos ax. \sin \beta x = \frac{dx \sin.(a+\beta)x}{2} + \frac{dx \sin(a-\beta)x}{2}.$$

Ergo

$$\text{Ergo } \int dx \cos \alpha x. \sin \beta x = - \frac{\cos (\alpha + \beta) x}{2(\alpha + \beta)} -$$

$$\frac{\cos (\alpha - \beta) x}{2(\alpha - \beta)}.$$

$$\text{Supponimus hic formulam } \sin \alpha. \cos \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{2} + \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2}, \text{ atque h\u00e6c facili de-}$$

ducitur negotio ex formulis §. 40. demonstratis. Est

$$\text{enim } \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha. \sin \beta, \text{ et } \sin (\alpha - \beta)$$

$$= \sin \alpha. \cos \beta - \cos \alpha. \sin \beta, \text{ ergo } \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$$

$$= 2 \sin \alpha. \cos \beta, \text{ et } \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2} = \sin \alpha.$$

$\cos \beta.$ Habetur ex iisdem formulis quoque alia pro

$$\sin \alpha. \sin \beta, \text{ ut et pro } \cos \alpha. \cos \beta. \text{ Est enim } \cos (\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha. \cos \beta - \sin \alpha. \sin \beta, \text{ et } \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha. \cos \beta$$

$$+ \sin \alpha. \sin \beta. \text{ Ergo } \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha.$$

$$\cos \beta; \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha. \sin \beta; \cos \alpha.$$

$$\cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{2}; \sin \alpha. \sin \beta =$$

$$\frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}.$$

Harum itaque transformationum ope expedite integrantur formul\u00e6 $dx \sin \alpha x. \sin \beta x$, vel $dx \cos \alpha x. \cos \beta x$.

Usum quoque in hoc integrationis negotio nonnunquam habent ist\u00e6 sinuum et cosinuum transformationes, quibus ut exponentiales imaginariae repr\u00e6sentantur. (§. 359.). Sic loco formul\u00e6 $dx \cos \alpha x. \sin \beta x$ scribi potest

$$dx \left(\frac{e^{\alpha x} r^{-1} + e^{-\alpha x} r^{-1}}{2} \right)$$

$$\times \left(\frac{e^{\beta x} r^{-1} - e^{-\beta x} r^{-1}}{2 r^{-1}} \right)$$

$$= dx \frac{e^{a+\beta x r-1} - e^{(-a-\beta)x r-1} - e^{(a-\beta)x r-1} + e^{(\beta-a)x r-1}}{4 r - 1}.$$

Atque hac transformatione differentiale reducitur ad integrationem functionis hujus formæ $dze g^z$.

§. 409.

Tangentis arcus cujusvis differentiale est quotus differentialis arcus per quadratum cosinus ejusdem arcus divisi; et cotangentis ejusmodi arcus differentiale æquatur differentiali arcus negative sumto per quadratum sinus ejusdem arcus diviso (§. 348.). Ergo si proponatur differentiale arcus circularis per quadratum cosinus divisum; ejus integrale est ejusdem arcus tangens, seu

$$\int \frac{dx}{\cos. x^2} = \text{tang. } x + C. \quad \text{Atque si proponatur differen-}$$

tiale arcus per quadratum sinus sui divisum; ejus integrale est cotangens illius arcus cum signo contrario, id est $\int$

$$\frac{dx}{\sin x^2} = - \cot. x + C. \quad \text{Denique cosecantis differen-}$$

tiale est productum ex differentiali arcus in rectangulum ex tangente in secantem; cosecantis vero differentiale est productum ex differentiali arcus in rectangulum ex cotangente in cosecantem, unde inversa regula pro integratione ejusmodi differentialium facile deducitur. Erit nimirum $\int dx \text{ tang. } x \sec. x = \sec. x$, et $\int dx \cot. x \csc. x = \csc. x$.

§. 410.

His bene perspectis integratio quoque succedet, si una plures operationes transcendentes in formula differentiali proposita deprehendantur.

$$\text{Sit } dy = \frac{dx}{x} \sin. l \frac{1}{x}; \text{ pono } l \frac{1}{x} = z, \text{ erit } dz \\ = - \frac{x^{-2} dx}{x^{-1}} = - \frac{dx}{x}, \text{ et proinde } dy = - dz \sin. z.$$

$$\text{Ergo } y = \cos. z = \cos. l \frac{1}{x},$$

Sit

Sit $dy = e^{\sin. x} dx \cos. x$; pono $\sin. x = z$, erit $dz = dx \cos. x$, et proinde $dy = e^z dz$. Ergo $y = e^z = e^{\sin. x}$.

Si fit $dy = \frac{-n e^{\cos. x} dx \sin. x}{\cos. x^2}$; pono $-\frac{n}{\cos. x} = z$, erit $dz = \frac{-n dx \sin. x}{\cos. x^2}$, quo substituto erit $dy = e^z dz$, et proinde $y = e^z = e^{\frac{-n}{\cos. x}}$.

Si fit $dy = \frac{-n e^{\frac{-n}{\sin. x}} dx \cos. x}{2 \sin. x^2 (1 - r(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})) r(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}})}$;

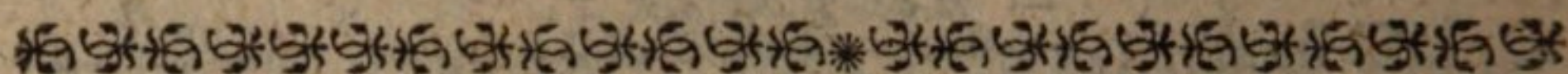
ad inveniendum integrale y , pono $e^{\frac{-n}{\sin. x}} = z$, erit $dz = \frac{-n e^{\frac{-n}{\sin. x}} ndx \cos. x}{\sin. x^2}$. Hoc valore substituto invenitur $dy =$

$\frac{-dz}{2(1 - r(1 - z)) r(1 - z)}$. Pono præterea $1 - r(-z) = u$, erit $-\frac{1}{2}(1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz = du$, unde fit $dy = \frac{du}{u}$, et $y = lu = l(1 - r(1 - z)) = l(1 - r(1 - e^{\frac{-n}{\sin. x}}))$.

Sit $dy = e^{\tan. x} \frac{dx \cos. x}{\sin. x} + l \sin. x \frac{e^{\tan. x} dx}{\cos. x^2}$; at-

que posito $e^{\tan. x} = u$, erit $\frac{e^{\tan. x} dx}{\cos. x^2} = du$. Posito præ-

terea $l \sin. x = z$, erit $\frac{dx \cos. x}{\sin. x} = dz$. Proinde $dy =$
 $udz + zdu$, et $y = uz = e^{\text{tang. } x} l \sin. x$.



SECTIO XXVI.

DE

CALCULO DIFFERENTIALI FUN- TIONVM, QVAE VNA PLVRES IN- VOLVUNT VARIABILES.

§. 4II.

Quodsi generatim V denotet functionem plurium va-
riabilium z, y, x, u , etc; incrementum quod fun-
 V capit, si singulae variables z, y, x, u , etc, differen-
tiis suis $\Delta z, \Delta y, \Delta x, \Delta u$, etc, augeantur, hic vocatur *dif-*
ferentia functionis V . Indicet V functionem duarum
variabilium x et y quamcunque, sive algebraicam, sive
transcendentem, isque valor, in quem transit V , si
in eadem simul $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y ponat-
tur, exprimatur per V^1 , erit $\Delta V = V^1 - V$. Deinde iste
ipsius V valor, in quem transit, si tantum loco x ponat-
tur $x + \Delta x$, per $[x + \Delta x]V$; is vero, in quem V tran-
sit, si in eadem tantum loco y ponatur $y + \Delta y$, per $[y +$
 $\Delta y]V$ indicetur. Jam manifestum est, quod eadem ori-
ri debeat quantitas, si primum pro solo x statuatur $x +$
 Δx , et deinde in quantitate resultante $y + \Delta y$ loco y ;
vel quod eodem redit, primum $y + \Delta y$ loco y et dein-
de in quantitate resultante $x + \Delta x$ loco x ; ac si simul y
 $+ \Delta y$ loco y et $x + \Delta x$ loco x statuatur. Valor itaque
 $[x + \Delta x]V$ abit in V^1 si loco y ponatur $y + \Delta y$; atque
valor

valor $[y + \Delta y] V$ abit in V^1 , si loco x ponatur $x + \Delta x$. Incrementum functionis V , quod capit, si tantum ponatur $x + \Delta x$ loco x , quantitas y vero tanquam

constans spectetur, denotabimus per ΔV . Pari ratione incrementum ipsius V , quod capit, si tantum $y + \Delta y$ loco y scribatur, x vero pro constante habeatur, indicabimus per ΔV . Eodem modo incre-

mentum ΔV , si in hac functione loco y ponatur $y + \Delta y$

signo $\Delta \Delta V$; et incrementum, quod capit ΔV , si loco x

ponatur $x + \Delta x$ signo $\Delta \Delta V$ exprimendum erit. Quod si jam in functione V ponatur $x + \Delta x$ loco x , ut V abeat

in $[x + \Delta x] V$, fiet $[x + \Delta x] V = V + \Delta V$. Si præterea in valore sic invento $[x + \Delta x] V$ ponatur $y + \Delta y$ loco y ,

$[x + \Delta x] V$ abit in V^1 , V mutatur in $V + \Delta V$, et ΔV tran-

sit in $\Delta V + \Delta \Delta V$. Proinde habemus $V^1 = V + \Delta V +$

$\Delta V + \Delta \Delta V$. Est vero $\Delta V = V^1 - V$; ergo est $\Delta V =$

$\Delta V + \Delta V + \Delta \Delta V$, vel quod idem est, $\Delta V = \Delta V + \Delta V$

$+ \Delta \Delta V$, quia $\Delta \Delta V = \Delta \Delta V$, quod sequenti ratione de-

monstrari potest. Quando ex functione V quaeritur V^1 ,

eadem prodit quantitas si primo in eadem ponatur $x + \Delta x$ loco x , et $y + \Delta y$ in quantitate resultante $[x + \Delta x] V$

loco y ; ac si in V primo $y + \Delta y$ loco y et deinde in quantitate resultante $[y + \Delta y] V$ loco x scribatur $x + \Delta x$.

Priori vero casu habemus $V^1 = V + \Delta V + \Delta V + \Delta \Delta V$,

et posteriori casu $V^1 = V + \Delta V + \Delta V + \Delta \Delta V$. Proinde

de est $V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V = V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V$, et
 æqualibus utrinque subtractis $\overset{yx}{\Delta\Delta}V = \overset{xy}{\Delta\Delta}V$.

§. 412.

Sit V functio trium variabilium x, y, z ; atque ori-
 tur V^1 , si variables x, y, z , suis differentiis $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,
 simul augeantur. Potest vero quoque primo una earum
 variabilium ut x sola augeri sua differentia Δx , atque
 hoc facto in quantitate resultante poni $y + \Delta y$ loco y ,
 tumque demum in functione sic orta scribi $z + \Delta z$ loco
 z , ut producat V^1 , ubi perinde est, quo ordine hi
 variabilium x, y , et z valores substituuntur. Posito $x +$
 Δx loco x functio V transeat in $[x + \Delta x]V$; posito deinde
 in hac quantitate $y + \Delta y$ loco y , eadem abeat in $[y + \Delta y;$
 $x + \Delta x]V$; atque ex hac ultima functione fiet V^1 si in ea-
 dem $z + \Delta z$ loco z ponatur. Similibus itaque, ut in §.

praec. adhibitis signis patet, fieri $[x + \Delta x]V = V + \overset{x}{\Delta}V$,
 si primo sola x variabilis assumatur. Deinde si utrin-
 que loco y ponatur $y + \Delta y$, fiet $[y + \Delta y; x + \Delta x]V = V$

$+ \overset{y}{\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V$. Denique si utrinque etiam $z +$

Δz loco z ponatur, habemus $V^1 = V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V +$
 $\overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{zx}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$, et proinde $\Delta V =$

$V^1 - V = \overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{zx}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$.

Simili ratione quoque pergere licet ad eum casum, quo
 V est functio quatuor variabilium x, y, z, u . Positis

enim successive ipsis x, y, z, u , solis variabilibus, ut ante
 concluditur, esse $[z + \Delta z; y + \Delta y; x + \Delta x]V = V +$

$\overset{z}{\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V + \overset{x}{\Delta}V + \overset{xz}{\Delta\Delta}V + \overset{yx}{\Delta\Delta}V + \overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta}V$.

Scripto itaque nunc utrinque $u + \Delta u$ loco u , invenitur

$V^1 = V + \overset{u}{\Delta}V + \overset{z}{\Delta}V + \overset{uz}{\Delta\Delta}V + \overset{y}{\Delta}V + \overset{uy}{\Delta\Delta}V + \overset{zy}{\Delta\Delta}V +$
 $\overset{|uzy}{\Delta\Delta\Delta}V$

$$\overset{xyz}{\Delta\Delta\Delta V} + \overset{x}{\Delta V} + \overset{ux}{\Delta\Delta V} + \overset{zx}{\Delta\Delta V} + \overset{uzx}{\Delta\Delta\Delta V} + \overset{yx}{\Delta\Delta V} + \overset{uyx}{\Delta\Delta\Delta V}$$

$$\overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta V} + \overset{xyz}{\Delta\Delta\Delta\Delta V}.$$

Ex his concludi potest formula generalis pro differentia functionis V quotcunque variabilium.

Continet enim ista differentia primo summam omnium differentiarum ejusdem functionis V , quæ prodeunt, si primo quævis variabilis seorsim sua differentia augeatur; deinde summam omnium differentiarum, quæ prodeunt, si singulæ binæ solæ spectentur ut variabiles, ita quidem ut hic iterum primo pro quavis sola variabili quæraturs differentia ipsius V , et deinde hujus differentia capiaturs differentia, posita altera variabili; præterea summam omnium differentiarum, quæ descripto modo prodeunt, positis singulis ternis variabilibus, donec perveniatur ad differentiam ipsius V , quæ prodit, si omnes sed successive spectentur ut variabiles, ita quidem, ut primo quæraturs ipsius V differentia posita una sola variabili, deinde hujus differentia differentia, posita secunda variabili, sicque pergendo usque ad ultimam. Si enim ista lex valet pro functione n variabilium, eadem quoque lex valere debet pro functione $n+1$ variabilium, quod ex antecedentibus ultro patet. Præterea, prouti pro functione duarum variabilium x et

y est $\overset{yx}{\Delta\Delta V} = \overset{xy}{\Delta\Delta V}$; ita quoque pro functione trium va-

riabilium est $\overset{zyx}{\Delta\Delta\Delta V} = \overset{yxz}{\Delta\Delta\Delta V} = \overset{xzy}{\Delta\Delta\Delta V} = \overset{zxy}{\Delta\Delta\Delta V}$. Similis proprietas de functionibus quatuor et plurium variabilium demonstrari potest.

§. 413.

Quando problema aliquod mathematicum ad functionem quandam plurium variabilium perducit; istæ variabiles omnes ab una quadam variabili determinata, cujus differentia constantes assumuntur, sic pendent, ut hac variata, illæ omnes differentiis suis augeantur.

Potest hæc variabilis, a qua reliquæ pendent, una earum esse, quas ipsa functio V involvit, qui casus obtinet, si ipsa V nihilo vel quantitati constanti vel quoque functioni cuidam earundam variabilium æqualis sit: potest quoque hæc variabilis ab iis, quas functio V continet, diversa esse. Prior casus in doctrina linearum curvarum in eodem plano descriptarum usu venit, quarum natura exprimitur æquatione inter duas variables x et y , quarum altera abscissam, altera adplicatam denotat. Posterior casus ex mechanicis omnium optime illustrabitur attendendo ad sequentia. Si punctum aliquod moveatur in linea quadam mDM sive recta, sive curva, quam brevitatis gratia in eodem plano descriptam esse hic assumimus; atque ad datum tempus quærat locus mobilis M ; responsio ad quæstionem facilis est, si quavis recta BC pro axe, et in eadem puncto A pro initio abscissarum assumto, præterea vero ex puncto M ad hunc axem ducta adplicata MP , ad tempus datum longitudo abscissæ AP ut et applicatæ PM definiri queat. Spectari itaque debent variables $AP = x$, et $PM = y$, ut functiones temporis, quod littera t denotabitur, et tempore t differentia sua Δt aucto, simul variables x et y differentiis suis Δx et Δy augebuntur. Quodsi jam variabilis t crescere statuatur secundum progressionem arithmeticam, fieri potest, ut nec Δx , nec Δy crescant secundum progressionem arithmeticam, sed aliam quamcunque. Caeterum si hoc casu cognitæ essent duæ æquationes, quarum una variabilem x per t et constantes, altera vero variabilem y per t et constantes definiret, simul ex ipsis illis æquationibus deduci possent rationes $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta t^3}$, etc, ut et rationes $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta t^3}$, etc, earumque limites methodis in antecedentibus expositis. Prior casus sub posteriori comprehendi

di potest, si generaliter ponamus, singulas functionis V plurium variabilium x, y, z , etc, quantitates variables a determinata quadam variabili t sic pendere, ut concipi possint tot æquationes, quot variables ipsa V completitur, quibus earum quævis per variabilem t et constantes definitur, cujus variabilis t differentiae assumuntur constantes. Tum enim prior casus locum inveniet, si fuerit vel $t = x$, vel $t = y$, etc.

§. 414.

His autem attentius perpensis statim patet, quod ipsa functio V spectari possit, ut functio solius variabilis t , in quam enim actu mutaretur, si ex datis æquationibus, quibus singulae variables x, y, z , etc. per t et constantes definiuntur, valores ipsarum x, y, z , etc. per t et constantes dati substituantur. Atque hac sub-

stitutione actu facta, ultimæ rationes $\frac{dV}{dt}$; $\frac{ddV}{dt^2}$;

$\frac{d^3V}{dt^3}$; etc; invenirentur methodis in Sectione XV.

expositis. Verum istae æquationes, quibus variables x, y, z , etc, per variabilem t solam et constantes definiuntur, raro sunt cognitæ. Proinde aliqua ratione mutanda est differentiationis methodus supra exposita, si functio proposita plures una comprehendat variables. *Differentiare functionem V plurium variabilium x, y, z , etc, quæ omnes ab una eademque variabili t , cujus differentiae constantes assumuntur, pendent, hic quoque non aliud est, nisi invenire rationes ultimas, cum*

quibus rationum $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 V}{\Delta t^3}$, - , - , -

$\frac{\Delta^n V}{\Delta t^n}$, termini simul evanescunt. Ad ipsum vero hoc

negotium expediendum consideremus primo functionem
dua-

duarum tantum variabilium, ut methodus generalis postea eo distinctius explicari queat.

§. 415.

Sit itaque V functio duarum variabilium x et y , ambæ vero variabiles x et y pendeant a variabili t , cujus differentia Δt sumitur constans. Ac primo quidem

demonstravimus, esse $\Delta V = \overset{x}{\Delta V} + \overset{y}{\Delta V} + \overset{yx}{\Delta \Delta V}$; ipsa vero quaestio eo redit, ut rationis $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ limes $\frac{dV}{dt}$ assignetur.

Quia jam incrementum Δy functionis y unius variabilis x sequentem habet formam $\Delta y = P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 + \text{etc}$; deducere hinc possumus formulam pro incremento functionis V duarum variabilium x

et y generalem. Habemus enim $\overset{x}{\Delta V} = P\Delta x + Q\Delta x^2 +$

$R\Delta x^3 + S\Delta x^4 \text{ etc}$, $\overset{y}{\Delta V} = \mathfrak{P}\Delta y + \mathfrak{Q}\Delta y^2 + \mathfrak{R}\Delta y^3 + \mathfrak{S}\Delta y^4$

$+ \text{etc}$, $\overset{y}{\Delta P} = p\Delta y + q\Delta y^2 + r\Delta y^3 + s\Delta y^4 + \text{etc}$, $\overset{y}{\Delta Q} =$

$\pi\Delta y + \varrho\Delta y^2 + r\Delta y^3 + s\Delta y^4 + \text{etc}$, $\overset{y}{\Delta R} = \pi\Delta y + \varrho\Delta y^2 +$

$\sigma\Delta y^3 + \tau\Delta y^4 + \text{etc}$, $\overset{y}{\Delta S} = \mathfrak{l}\Delta y + \mathfrak{m}\Delta y^2 + \mathfrak{n}\Delta y^3 + \mathfrak{o}\Delta y^4$

$+ \text{etc}$. Proinde $\overset{yx}{\Delta \Delta V} = p\Delta y\Delta x + p\Delta y^2\Delta x + r\Delta y^3\Delta x$

$+ s\Delta y^4\Delta x + \text{etc}$, $+ p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x^2 + r\Delta y^3\Delta x^2 +$

$s\Delta y^4\Delta x^2 + \text{etc}$, $+ \pi\Delta y\Delta x^3 + \varrho\Delta y^2\Delta x^3 + \sigma\Delta y^3\Delta x^3 +$

$\tau\Delta y^4\Delta x^3 + \text{etc}$, $+ \mathfrak{l}\Delta y\Delta x^4 + \mathfrak{m}\Delta y^2\Delta x^4 + \mathfrak{n}\Delta y^3\Delta x^4 +$

$\mathfrak{o}\Delta y^4\Delta x^4 + \text{etc}$. Omnibus igitur in summam collectis, et terminis secundum dimensiones variabilium Δx et Δy

collocatis fiet $\Delta V = P\Delta x + \mathfrak{P}\Delta y + Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 + S\Delta x^4 +$

$\pi\Delta x^3\Delta y + q\Delta x^2\Delta y^2 + r\Delta x\Delta y^3 + \mathfrak{S}\Delta y^4 + \text{etc}$. Utrin-

que jam per Δt diviso habetur $\frac{\Delta V}{\Delta t} = P\frac{\Delta x}{\Delta t} + \mathfrak{P}\frac{\Delta y}{\Delta t} +$

$$+ Q \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + p \frac{\Delta y \Delta x}{\Delta t} + Q \frac{\Delta y^2}{\Delta t} + \text{etc.} \quad \text{Evanescente}$$

vero Δt , et cum eo simul Δx et Δy , erit limes rationis

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ seu } \frac{dV}{dt} = P \frac{dx}{dt} + \mathfrak{P} \frac{dy}{dt}; \text{ omnes enim termi-}$$

ni sequentes sunt $= 0$. Quodsi itaque ipsa x foret $= t$,

$$\text{seu differentia } \Delta x \text{ constans, esset } \frac{dV}{dx} = P + \mathfrak{P} \frac{dy}{dx}.$$

Utroque casu æquatio sic quoque potest exprimi $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$, atque tum $Pdx + \mathfrak{P}dy$ dicitur differentiale primum ipsius V , ob eandem rationem, quam supra §. 228. allegavimus. Est enim formula $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$

$$\text{eadem cum formula } dV \equiv \left(P \frac{dx}{dt} + \mathfrak{P} \frac{dy}{dt} \right) dt, \text{ ubi}$$

$$\frac{dx}{dt} \text{ atque } \frac{dy}{dt} \text{ sunt quantitates finitae. Si ve-}$$

ro sit z alia ipsarum x et y functio, atque inventum sit

$$dz = \left(F \frac{dx}{dt} + G \frac{dy}{dt} \right) dt; \text{ simul habetur ultima ratio}$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{P \frac{dx}{dt} + \mathfrak{P} \frac{dy}{dt}}{F \frac{dx}{dt} + G \frac{dy}{dt}} = \frac{Pdx + \mathfrak{P}dy}{Fdx + Gdy}, \text{ quæ pariter}$$

fluit ex æquationibus $dV = Pdx + \mathfrak{P}dy$ et $dz = Fdx +$

Gdy . Ex antecedentibus denique patet, esse $Pdx = \overset{x}{d}V$

et $\mathfrak{P}dy = \overset{y}{d}V$, unde concluditur $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V$, quæ

formula sequentem pro differentiandis functionibus dua-

rum variabilium præbet regulam generalem. *Ad fun-*
ctionem duarum variabilium differentiandam, proposita fun-
ctio pro qualibet variabili seorsim differentietur, quasi alte-

ra constans esset; et aggregatum duarum differentialium eo modo inventorum est differentiale quæsitum.

§. 416.

Quod autem nunc adtinet ad functiones trium vel plurium variabilium x, y, z, u , etc, differentiandas sequentem in modum concludo. Generaliter est $\Delta V =$

$$\overset{x}{\Delta V} + \overset{y}{\Delta V} + \overset{z}{\Delta V} + \overset{u}{\Delta V} + \text{etc}, + \overset{xy}{\Delta\Delta V} + \overset{xz}{\Delta\Delta V} + \overset{xu}{\Delta\Delta V} + \overset{yz}{\Delta\Delta V} + \overset{yu}{\Delta\Delta V} + \text{etc. etc.} (\S. 412.).$$

Proinde si omnes istae variables x, y, z, u , etc, a variabili t pendere ponantur, cujus differentia Δt constans est, ac utrinque per Δt dividatur, tum vero Δt , atque cum hac differentia simul $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta u$, etc. evanescere ponantur;

$$\text{invenitur } \frac{dV}{dt} = \frac{\overset{x}{dV}}{dt} + \frac{\overset{y}{dV}}{dt} + \frac{\overset{z}{dV}}{dt} + \frac{\overset{u}{dV}}{dt} + \text{etc},$$

reliquis terminis omnibus, ubi signum Δ plus una vice in numeratore adest, omnibus evanescentibus. Aequatio autem

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\overset{x}{dV}}{dt} + \frac{\overset{y}{dV}}{dt} + \frac{\overset{z}{dV}}{dt} + \frac{\overset{u}{dV}}{dt} +$$

etc, ob allegatam in §. præc. rationem ita quoque scribi

$$\text{potest } dV = \overset{x}{dV} + \overset{y}{dV} + \overset{z}{dV} + \overset{u}{dV} + \text{etc}, \text{ unde}$$

ista pro differentiandis functionibus plurium variabilium fuit regula generalis: In functione proposita consideretur seorsim qualibet quantitas variabilis, et functio proposita pro qualibet differentietur, quasi reliquae omnes essent constantes, tum singula hæc differentialia, quæ ex singulis variabilibus sunt inventa, colligantur, eritque aggregatum differentiale quæsitum functionis propositæ.

Exempla ejusmodi differentiationis erunt sequentia.

$$d. xy = xdy + ydx.$$

$$d. \frac{x}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}.$$

d.

$$d. \frac{y}{r(aa - xx)} = \frac{dy}{r(aa - xx)} + \frac{yxdx}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$d. (ax + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n = m(ax + \beta x + \gamma)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^n (a\delta x + \beta\delta y) \\ + n(ax + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1} (\delta dx + \epsilon dy) = (ax + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \epsilon y + \zeta)^{n-1}$$

$$\times \begin{matrix} m\alpha\delta & + & m\beta\delta & + & m\alpha\epsilon & + & m\beta\epsilon & + & m\alpha\delta \\ na\delta & + & na\epsilon & + & n\beta\delta & + & n\beta\epsilon & + & n\gamma\delta \end{matrix} \begin{matrix} xdx & + & xdy & + & ydx & + & ydy & + & dx \\ & & & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} + & m\beta\zeta & + & n\gamma\epsilon \\ & dy & & \end{matrix}$$

$$d. ylx = dylx + \frac{ydx}{x},$$

$$d. xy = yxy^{-1}dx + xy dylx.$$

$$d. \Lambda \text{ tang } \frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx + yy}.$$

$$d. \sin. x \cos. y = dx \cos. x \cos. y - dy \sin. x \sin. y.$$

$$d. \frac{e^z y}{r(xx + yy)} = \frac{e^z ydz}{r(xx + yy)} + \frac{e^z (xxdy - yxdx)}{(xx + yy)r(xx + yy)}.$$

$$d. e^z \Lambda \sin \frac{x - r(xx - yy)}{x + r(xx - yy)} = e^z dz \Lambda \sin \frac{x - r(xx - yy)}{x + r(xx - yy)}.$$

$$+ e^z \frac{xydy - yydx}{x + r(xx - yy)(xx - yy)^{\frac{3}{4}} r x}.$$

§. 417.

Quoniam itaque differentiale functionis V duarum variabilium x et y sequentem habet formam $dV = Pdx + Qdy$, in qua sunt P et Q functiones a functione V pendentes; sequitur, has duas functiones P et Q certo quodam modo a se invicem pendere, quia utraque ab eadem functione V pendet. Ut ista relatio inter functiones P et Q inveniatur, sequentem in modum potest argumentari. Demonstratum est §. 411, existente

V

V functione duarum variabilium x et y , semper esse

$$\frac{y^x}{\Delta\Delta V} = \frac{x^y}{\Delta\Delta V}, \text{ et proinde ratio } \frac{\frac{y^x}{\Delta\Delta V}}{\frac{x^y}{\Delta\Delta V}} = 1 \text{ ratio}$$

constans, unde patet, etiam ipsius limitem $\frac{\frac{y^x}{ddV}}{\frac{x^y}{ddV}}$ esse =

$$1, \text{ seu } \frac{y^x}{ddV} = \frac{x^y}{ddV}. \text{ Posito nunc } dV = Pdx + Qdy$$

fit $dP = pdx + rdy$ et $dQ = qdx + sdy$. Ergo fit $\frac{x}{dV} =$

$$Pdx \text{ et } \frac{y^x}{ddV} = rdydx. \text{ Deinde } \frac{y}{dV} = Qdy \text{ et } \frac{x^y}{ddV} =$$

$$qdx dy. \text{ Proinde } \frac{rdydx}{qdydx} = \frac{r}{q} = 1, \text{ et } r = q. \text{ Est}$$

$$\text{vero } r = \frac{\frac{y}{dP}}{dy} \text{ et } q = \frac{\frac{x}{dQ}}{dx}; \text{ proinde } \frac{\frac{y}{dP}}{dy} = \frac{\frac{x}{dQ}}{dx}, \text{ at-}$$

que hæc ipsa est æquatio relationem functionum P et Q erga se invicem definiens.

Quoties functio quædam V trium variabilium x , y et z induit naturam functionis duarum tantum variabilium, toties proprietates hujus etiam illi competunt. Evenit autem hoc perpetuo, si una ex tribus variabilibus, quas functio y involvit, sumatur constans. Triplici igitur modo hoc fieri potest, quia unaquæque ex tribus variabilibus x , y et z , figillatim sumpta poni potest constans. Ponamus primo z constantem, et $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ induet for-

$$\text{mam } dV = Pdx + Qdy; \text{ proinde erit } \frac{\frac{y}{dP}}{dy} = \frac{\frac{x}{dQ}}{dx}.$$

Ponatur y constans, et ob $dV = Pdx + Rdz$, evadit

$$\frac{\frac{z}{dP}}{dz} = \frac{\frac{x}{dR}}{dx}. \text{ Denique posita } x \text{ constante fit } dV =$$

Qdy

$Qdy + Rdz$, ideoque $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Functiones itaque, P , Q et R in differentiali $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ ejusmodi ad se invicem habent relationem, ut sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$; $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$; $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$. Eadem hæc ad functiones quatuor et plurium variabilium extendi posse, facile patet. *Conf. § 433, et § 440.*

§. 418.

Inventa sic regula pro inveniendis differentiis functionis V plurium variabilium simul via patet ad differentiale secundum et altiora ejusmodi functionum inveniendæ. Quem in finem adtendi debet ad sequentia.

Si y est functio variabilis t , expressio $\frac{dy}{dt}$, vel ge-

neraliter $\frac{d^n y}{dt^n}$, denotat functionem quandam variabilis t , nisi sit y functio ipsius t rationalis integra, cujus exponents ordinis numero n minor est, quem casum hic quidem seponere possumus, quippe quo $\frac{d^n y}{dt^n}$ constanti vel nihilo æqualis esse potest, licet revera universalitati

methodi exponendæ non noceat. Sit itaque $\frac{d^n y}{dt^n}$ functio variabilis t , cujus differentia Δt constans ponitur: ac hujus functionis $\frac{d^n y}{dt^n}$ differentiale erit $\frac{d^{n+1} y}{dt^{n+1}}$

quod ex §. 241. ultro patet. Deinde si fuerit $\frac{d^n y}{dt^n} =$

T , ita ut T sit functio ipsius t , erit $\left(\frac{d^n y}{dt^n}\right)^m = T^m$

T^m (§. 254.), proinde $d. \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^m = m T^{m-1} dT$.

Quia vero est $T^{m-1} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^{m-1}$ (§. cit.), atque $dT = \frac{d^{n+1} y}{dt^n}$; concluditur esse $d. \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^m = m$

$$\left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^{m-1} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dt^n} = \frac{m (d^n y)^{m-1} d^{n+1} y}{(dt^n)^m} \quad \text{Functiones}$$

itaque per hujusmodi expressiones $\frac{d^n y}{dt^n}$, $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m}$ datae, si ipsius t differentia sit constans, non alia ratione differentiantur, ac si $d^n y$ esset quantitas variabilis, dt^n vero constans.

§. 419.

Est vero non tantum $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = T^m$, si $\frac{d^n y}{dt^n} = T$, ea sub hypothese, qua Δt assumitur constans; sed quoque, si fuerit $\frac{d^n y}{dx^n} = P$, existente P functione ip-

sarum y et x , y vero et x functionibus ipsius t , [et Δt constans: erit $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m$. Sit enim $\frac{d^n y}{dt^n} = F$,

$\frac{dx}{dt} = G$, erit $\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, atque proinde $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{F}{G^n}$

$= P$. Praeterea est $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = F^m$ et $\frac{(dx^n)^m}{(dt^n)^m} =$

G^{nm} , ideo $\frac{(d^n y)^m}{(dt^n)^m} = \frac{F^n}{G^{nm}} = P^m$. Idem proinde

etiam obtinet propositis formulis hujusmodi $\frac{d^n x}{dx^n}$,

$\frac{d^n y}{dy^n}$, si sit x vel y ipsius t functio et Δt constans. Si enim

enim fuerit $\frac{d^n x}{dt^n} = F$, $\frac{dx}{dt} = G$, erit $\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, et pro-

inde $\frac{d^n x}{dx^n} = \frac{F}{G^n} = P$. Sed $\frac{(d^n x)^m}{(dt^n)^m} = F^m$, et
 $\frac{(dx^n)^m}{(dt^n)^m} = G^{nm}$, ideo $\frac{(d^n x)^m}{(dx^n)^m} = \frac{F^m}{G^{nm}} = P^m$. His

innititur methodus differentiandi functiones, quæ dantur
 per hujusmodi expressiones $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n x}{dx^n}$, $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m}$, si y
 et x a variabili quadam t pendent, et Δt constans sit.

Sit itaque primo $\frac{d^n y}{dx^n} = P$, sit præterea $\frac{d^n y}{dt^n} = F$,
 $\frac{dx^n}{dt^n} = G^n$, erit $P = \frac{F}{G^n}$, atque $dP = \frac{G^n dF - F dG}{G^{n+1}}$.

Est vero $dF = \frac{d^{n+1} y}{dt^n}$, atque $dG = nG^{n-1} dG =$
 $\frac{ndx^{n-1} ddx}{dt^n}$, proinde $dP = \left(\frac{dx^n}{dt^n} \cdot \frac{d^{n+1} y}{dt^n} - \frac{d^n y}{dt^n} \cdot \frac{ndx^{n-1} ddx}{dt^n} \right) : \frac{dx^{2n}}{dt^{2n}} = \frac{dx^n d^{n+1} y - nd^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Eo-

dem modo invenitur $d \cdot \frac{d^n x}{dx^n} = \frac{dx^n d^{n+1} x - nd^n x dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$.

Jam secundo proposita sit functio $\frac{(d^n y)^m}{(dx^n)^m} = P^m$, erit-

que $dP^m = mP^{m-1} dP$. At $P^{m-1} = \frac{(d^n y)^{m-1}}{(dx^n)^{m-1}}$, et $dP =$
 $\frac{dx^n d^{n+1} y - nd^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Proinde $dP^m = \frac{m(dx^n)^{m-1} (dx^n d^{n+1} y - nd^n y dx^{n-1} ddx)}{(dx^n)^{2m-1}}$.

$\frac{dx^n d^{n+1} y - nd^n y dx^{n-1} ddx}{dx^{2n}}$. Patet vero, quod hæc quo-

que differentialia ex ipsis propositis formulis differentialibus immediate inveniantur, si signa dx , et $d^n y$ ut quanta variabilia considerentur.

§. 420.

His positis proposita sit functio V duarum variabilium x et y , ac differentiale ipsius V sequentem habet formam $dV = Pdx + Qdy$, ubi P et Q sunt functiones variabilium x et y . Proprie autem hæc æquatio sic exprimenda esset $\frac{dV}{dt} = P \frac{dx}{dt}$

+ $Q \frac{dy}{dt}$. Hinc nullo negotio patet, esse $\frac{ddV}{dt} = P$

$\frac{ddx}{dt} + dP \frac{dx}{dt} + Q \frac{ddy}{dt} + dQ \frac{dy}{dt}$, et proinde $\frac{ddV}{dt^2} =$

$P \frac{ddx}{dt^2} + \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + Q \frac{ddy}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$; unde por-

ro fluit $\frac{d^3 V}{dt^2} = P \frac{d^3 x}{dt^2} + dP \frac{ddx}{dt^2} + \frac{dP}{dt} \cdot \frac{ddx}{dt} + \frac{ddP}{dt} \cdot$

$\frac{dx}{dt} + Q \frac{d^3 y}{dt^2} + dQ \frac{ddy}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{ddy}{dt} + \frac{ddQ}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Ex quibus simul via patet ad differentialia ipsius V sequentium ordinum invenienda. Quodsi Δx fuerit con-

stans, invenitur $\frac{ddV}{dx} = dP + Q \frac{ddy}{dx} + dQ \frac{dy}{dx}$; $\frac{d^3 V}{dx^2} =$

$\frac{ddP}{dx} + Q \frac{d^3 y}{dx^2} + dQ \frac{ddy}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{ddy}{dx} + \frac{ddQ}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Hæ autem æquationes differentiales ob rationes sæpe jam allegatas sic scribi solent $ddV = Pddx + dP \cdot dx + Qddy + dQ \cdot dy$, $d^3 V = Pd^3 x + 2dP \cdot ddx + ddP \cdot dx + Qd^3 y + 2dQddy + ddQ \cdot dy$. Unde patet, ista quoque differentialia ex ipsa forma differentiali proposita $dV = Pdx + Qdy$ inveniri, si $d^n x$ et $d^n y$ ut variabiles spectentur. Vel sub hypothese Δx constantis ipsum dx pro con-

stante

stante habeatur. Tum enim fit $ddV = dP \cdot dx + Qddy + dQ \cdot dy$, $d^3V = ddP \cdot dx + Qd^3y + 2dQddy + ddQ \cdot dy$. Quodsi jam fuerit $dP = pdx + rdy$, et $dQ = rdx +$

qdy ; (debet enim esse $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dx} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy} = r$) erit $ddV = Pddx$

$+ pdx^2 + 2r dx dy + Qddy + qdy^2$, atque si dx constans, fit $ddV = pdx^2 + 2r dx dy + Qddy + qdy^2$. Genera-

tim itaque differentiale secundum ipsius V eam habet formam, ut fit $ddV = Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdy^2 + Tdx dy$. Coefficientes vero P, Q, R, S, T , ita a se

invicem pendent, ut fit $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dx} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy}$ $R = \frac{x}{dx} \frac{dP}{dy}$; $S =$

$$\frac{y}{dy} \frac{dQ}{dx}, T = 2 \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy} = 2 \frac{y}{dy} \frac{dP}{dx}.$$

§. 421.

Ex iis omnibus, quae §§. 418-420. exposita sunt, generatim concludimus, quod *methodus differentiandi generatim expositus non solum ad functiones finitas adstricta sit, sed etiam eodem negotio cujusvis expressionis, quae jam differentialia in se continet, differentiale inveniri possit.* Semper enim dabitur differentiale aliquod constans, ut dt^n , per quod dividi possunt singuli æquationis proposita termini, ut æquatio sub forma finita repræsentetur. Tum autem ipsa differentiatio nulla laborat difficultatæ. Denominator autem constans dt^n ipsa differentiatione non variabitur, quare si peracta differentiatione omnia per dt^n iterum multiplicentur; habebitur formula differentialis ex proposita forma secundum consuetam differentiationis methodum. Exemplo res clara erit. Sit proposita æquatio $ddV = Pddx + pdx^2 + 2r dx dy + Qddy + qdy^2$, atque supponi potest, tam x , quam y pendere a variabili quadam t , cujus differentia

Δt constans est. Poni itaque potest $ddx = qdt^2$, $dx = pdt$, $ddy = \varrho dt^2$, $dy = \pi dt$, quibus valoribus substitutis fit $ddV = Pqdt^2 + pp^2dt^2 + 2rpd\pi dt + Q\varrho dt^2 + q\pi^2dt^2$; atque $\frac{ddV}{dt^2} = Pq + pp^2 + 2rp\pi + Q\varrho + q\pi^2 =$

$$P \frac{ddx}{dt^2} + P \frac{dx^2}{dt^2} + 2r \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + Q \frac{ddy}{dt^2} + q \frac{dy^2}{dt^2}.$$

Unde generaliter patet, quod ex iisdem rationibus, si proposita sit formula pro $d^n V$, singuli hujus formulæ termini divisi per dt^n possint intelligi, atque similimodo formula pro $d^{n+1}V$ inveniri. Cæterum hæc omnia ad functiones trium vel plurium variabilium facili extendi possunt negotio.

§. 422.

Quia differentialia altiora functionis V , quae duas involvit variables x et y , aliam habent formam, si vel dx vel dy constans statuatur, ac eo casu, quo neque dx neque dy constans est; utile interdum est, eam hujusmodi differentialis formam nosse, qua nullum eorum differentialium constans ponitur, si in forma proposita vel dx vel dy sit constans assumtum. Potest vero quævis formula differentialis, in qua differentiale quoddam constans et assumtum, transformari in aliam, quæ nullum differentiale constans supponit, sic ratiocinando. Si differentialia ipsius y altiora et primum tantum differentiale ipsius x , quod constans ponitur, in formula differentiali proposita occurrant; erunt functiones $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc, finitæ. Unde posito } \frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q, \frac{dq}{dx} = r, \text{ etc, erit } \frac{ddy}{dx^2} = q, \frac{d^3y}{dx^3} = r, \text{ etc. At-}$$

que his valoribus introductis, differentialia secunda et altiora prorsus ex calculo eliminantur. Dantur autem valo-

valores ipsarum p, q, r , etc, pro dy variabili et dx constante. Sumto itaque dx cum dy variabili in æquatione

$\frac{dy}{dx} = p$, ex eadem deduci poterunt valores differentialium dp, dq, dr , etc, pro utroque dy et dx variabili.

Fiet enim $dp = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$, et proinde $\frac{dp}{dx} = q$

$= \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, unde fluit $dq =$

$\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dx dy d^3x}{dx^4}$, unde

$\frac{dq}{dx} = r = \frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dx dy d^3x}{dx^5}$,

etc. His itaque valoribus loco quantitatum p, q, r , etc, substitutis formula proposita in aliam mutatur, quæ nulum differentiale constans involvit, ac iterum positis $ddx = 0$, $d^3x = 0$, etc, in priorem mutatur; positis vero $ddy = 0$, $dy = 0$, etc, in talem, ubi dx variabile et dy constans est,

Sit proposita formula $x \frac{ddy}{dx^2}$, ubi dx constans est.

Posito $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, fit $x \frac{ddy}{dx^2} = xq$. Substituto

itaque valore $q = \frac{dxddy - dyddx}{dx^3}$, invenitur

$\frac{xdxddy - xdyddx}{dx^3}$.

Data fit formula $\frac{dx^2 + dy^2}{ddx^3}$, in qua dy est con-

stans. Ponatur $\frac{dx}{dy} = p$, $\frac{dp}{dy} = q$, erit $\frac{ddx}{dy^2} = q$, ddx

$= qdy^2$, $dx^2 = ppy$, quibus valoribus substitutis habetur $\frac{1+pp}{q}$ loco $\frac{dx^2+dy^2}{ddx}$. Est vero $pp = \frac{dx^2}{dy^2}$

et $q = \frac{dyddx - dxddy}{dy^3}$, quibus valoribus substitutis

habetur $\frac{dy^2+dx^2}{dy^2} : \frac{dyddx - dxddy}{dx^3} = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{dyddx - dxddy}$.

§. 423.

Idem negotium succedit, si in formula differentiali constans assumtum sit differentiale quodpiam ejusmodi functionis, quæ ab x vel y pendet, ut v. g. differentiale areæ cujusdam curvilineæ ydx , cujus curvæ applicata est y et x abscissa, vel differentiale arcus ejusmodi curvæ $r(dx^2 + dy^2)$. Sic si proposita sit formula, quædam, in qua differentiale ydx est constans assumtum; primo quidem ob ydx constans, erit $yddx + dydx = 0$, unde est $ddx = -\frac{dx dy}{y}$. Sit $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}$

$= q$, $\frac{dq}{dx} = r$, etc, eritque $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$, quæ

formula differentiatâ dat $d^3x = -\frac{qdx^2}{y} + \frac{ppdx^3}{yy} - \frac{2pdxddx}{y}$, quæ expressio valore $-\frac{pdx^2}{y}$ loco ddx substituto

abit in sequentem $d^3x = -\frac{qdx^3}{y} + \frac{3ppdx^3}{yy}$, quæ

denuo differentiatâ dat $d^4x = -\frac{rdx^4}{y} + \frac{pydx^4}{yy} +$

$\frac{6pqdx^4}{yy} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3pp}{yy} - \frac{q}{y}\right)3dx^2ddx$, et sub-

stituto $-\frac{pdx^2}{y}$ loco ddx fit $d^4x = \left(-\frac{r}{y} + \frac{10pq}{yy} -$

$-\frac{15p^3}{y^3})dx^4$, etc. Deinde est $dy = p dx$, unde ddy
 $= q dx^2 + p ddx = (q - \frac{pp}{q}) dx^2$, ficque porro conti-
 nuo valore $-\frac{p dx^2}{y}$ substituendo loco ddx , invenitur

$$d^3y = (r - \frac{4pq}{y} + \frac{3p^3}{yy}) dx^3, \text{ et}$$

$$d^4y = (s - \frac{7pr}{y} - \frac{4qq}{y} + \frac{25ppq}{lyy} - \frac{15p^4}{y^3}) dx^4$$

etc. Isti valores loco differentialium altiorum variabi-
 lium x et y substituti mutabunt formulam propositam in
 talem, quæ nulla amplius differentialia altiora continet.

Proposita igitur sit formula $\frac{y ddx - x ddy}{dx dy}$, in
 qua differentiale $y dx$ constans est. Ac posito $dy = p dx$,
 et $dp = q dx$, erit $ddx = -\frac{p dx^2}{y}$, et $ddy = q dx^2 + \frac{pp dx^2}{y}$.

His substitutis formula proposita in sequentem mutatur:

$$-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}, \text{ quæ nullo differentiali constante}$$

$$\text{assumpto in istam transformatur } -1 - \frac{x dx ddy + x dy ddx}{dx^2 dy} \\ + \frac{x dy}{y dx} = \frac{x dx dy^2 - y dx^2 dy - y x dx ddy + y x dy ddx}{y dx^2 dy}.$$

§. 424.

Proposita denique formula differentiali, in qua
 $r(dx^2 + dy^2)$ est constans assumtum; ponatur $dy = p dx$,
 $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$, etc. Atque differen-
 tiale $r(dx^2 + dy^2)$ induit hanc formam $dx r(1 + pp)$,
 quod differentiale cum constans sit, esse debet ddx

Ddd §

$r(1 +$

$$r(1+pp) + \frac{pqdx^2}{r(1+pp)} = 0, \text{ unde } ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}.$$

$$\text{Ergo præterea est } d^3x = -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{2ppqqdx^3}{(1+pp)^2} - \frac{2pqdxddx}{1+pp}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} - \frac{qqdx^3}{1+pp} + \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2}$$

$$= -\frac{prdx^3}{1+pp} + \frac{(3pp-1)qqdx^3}{(1+pp)^2}.$$

$$\text{Ex his erit } d^4x = -\frac{psdx^4}{1+pp} + \frac{(10pp-3)qrdx^4}{(1+pp)^2}$$

$$- \frac{(15pp-13)pq^3dx^4}{(1+pp)^3}, \text{ etc. Ex æquatione denique}$$

$$dy = pdx \text{ differentiando fiet } ddy = qdx^2 + pddx =$$

$$qdx^2 - \frac{ppqdx^2}{1+pp} = \frac{qdx^2}{1+pp}, \quad d^3y = \frac{rdx^3}{1+pp} -$$

$$\frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2} + \frac{2qdxddx}{1+pp} = \frac{rdx^3}{1+pp} - \frac{4ppqqdx^3}{(1+pp)^2},$$

$$d^4y = \frac{sdx^4}{1+pp} - \frac{13pqr dx^4}{(1+pp)^2} + \frac{4(6pp-1)q^3dx^4}{(1+pp)^3} \text{ etc.}$$

$$\text{Data jam fit formula } \frac{dx^2+dy^2}{ddy}, \text{ in qua } r(dx^2+dy^2)$$

$$\text{est constans positum, ac posito } dy = pdx, dp = qdx,$$

$$\text{erit } ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}, \text{ unde hæc formula sic transmuta-}$$

$$\text{tur: } \frac{(1+pp)^2}{q}. \text{ Quia igitur } p = \frac{dy}{dx} \text{ et } q = \frac{dxddy-dyddx}{dx^3},$$

$$\text{nullo differentiali constante assumpto habetur}$$

$$\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2ddy-dyddx}$$

§. 425.

His transformationibus paullo attentius perpenſis patebit, easdem expeditius inveniri poſſe, ita ut non opus ſit quantitates p, q, r , etc, in formulas propoſitas introducere, atque tum demum valores earundem poſito nullo differentiali conſtante reſtituere. Sit itaque primum in formula propoſita dx conſtans, et quia loco

dy poſitum eſt pdx , iterumque $\frac{dy}{dx}$ loco p , differen-

tialia prima dx et dy ubicunque in formula propoſita occurrunt, immutata relinquuntur. Ubi autem occurrit ddy , quia ejus loco ponitur qdx^2 , tumque iterum loco

q valor $\frac{ddxddy - dyddx}{dx^3}$; eadem transmutatio abſol-

vetur, ſi ubique loco ddy ſtatim ponatur $\frac{dxddy - dyddx}{dx}$

vel $ddy = \frac{dyddx}{dx}$. Si inſuper in expreſſione pro-

poſita occurrat d^3y , quia ejus loco poſitum eſt rdx^3 , tumque denuo $r =$

$\frac{dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3dyddx^2 - dx dy d^3x}{dx^5}$ ſtatim

loco d^3y poni poteſt $d^3y = \frac{3ddxddy}{ddx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} -$

$\frac{dyd^3x}{dx}$. Quodſi itaque dy fuerit conſtans aſſumentum,

loco ddx ſcribi debet $ddx = \frac{dxddy}{dy}$, et $d^3x =$

$\frac{3ddxddy}{dy} + \frac{3dxddy^2}{dy^2} - \frac{dx d^3y}{dy}$ loco d^3x . Sin vero ydx

fuerit

fuerit constans, quia $ddx = -\frac{pdx^2}{y}$ et $ddy = qdx^2 - \frac{ppdx^2}{y}$; loco ddx ubique ponendum est $-\frac{dx dy}{y}$, et ddy $-\frac{dy ddx}{dx} - \frac{dy^2}{y}$ loco ddy . Si denique $r(dx^2 + dy^2)$ constans fuerit, ob $ddx = -\frac{pqdx^2}{1+pp}$ et $ddy = \frac{qdx^2}{1+pp}$, ponendum est $\frac{dy^2 ddx - dx dy ddy}{dx^2 + dy^2}$ loco ddx et $\frac{dx^2 ddy - dx dy ddx}{dx^2 + dy^2}$ loco ddy . Formulæ pro d^3x , d^4x , etc, d^3y , d^4y , etc, his casibus substituendæ eadem facilitate ex antecedentibus colliguntur.

§. 426.

Completa differentiae functionis V duarum variabilium x et y forma §. 415. inventa hæc erat: $\Delta V = P\Delta x + \mathfrak{P}\Delta y + Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + q\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 + \text{etc}$; unde, si $0 = P = \mathfrak{P}$, habetur $\Delta V = Q\Delta x^2 + p\Delta y\Delta x + q\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + \mathfrak{R}\Delta y^3 + \text{etc}$, ac $\frac{\Delta V}{\Delta t^2} = Q\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + p\frac{\Delta y\Delta x}{\Delta t^2} + q\frac{\Delta y^2}{\Delta t^2} + \text{etc}$. Ergo hujus rationis ultima $\frac{dV}{dt^2} = Q\frac{dx^2}{dt^2} + p\frac{dydx}{dt^2} + q\frac{dy^2}{dt^2}$. Similibus ratiociniis invenitur, casu $0 = P = \mathfrak{P} = Q = p = q$ esse $\frac{dV}{dt^3} = R\frac{dx^3}{dt^3} + p\frac{dydx^2}{dt^3} + q\frac{dy^2dx}{dt^3} + \mathfrak{R}\frac{dy^3}{dt^3}$, et casu $0 =$

$P =$

$$P = \mathfrak{P} \quad . \quad . \quad . \quad = \mathfrak{R}, \text{ esse } \frac{dV}{dt^4} = S \frac{dx^4}{dt^4} +$$

$$\pi \frac{dx^3 dy}{dt^4} + q \frac{dx^2 dy^2}{dt^4} + r \frac{dx dy^3}{dt^4} + \mathfrak{S} \frac{dy^4}{dt^4}$$

Unde concluduntur simul valores pro $\frac{dV}{dt^5}$, $\frac{dV}{dt^6}$, etc,

si consequentium quoque terminorum coefficientes evanescant. Eadem æquationes sic quoque scribi possunt $dV = Qdx^2 + pdydx + qdy^2$; $dV = Rdx^3 + pdydx^2 + qdy^2dx + \mathfrak{R}dy^3$; etc. Quia eo in casu, quo $0 = P =$

$\mathfrak{P}$, est $Qdx^2 = \overset{x}{d}V$, $\mathfrak{R}dy^2 = \overset{y}{d}V$, et $pdydx = \overset{xy}{dd}V$,

erit nunc $dV = \overset{x}{d}V + \overset{y}{d}V + \overset{yx}{dd}V$. Manifestum igitur est, regulam pro differentiandis functionibus duarum variabilium §. 415. expositam eo solum in casu locum habere, quo non est utraque functio P et $\mathfrak{P} = 0$. Qui enim hoc casu regulam istam sequeretur, is differentia-

le completum non obtineret, quia terminus $\overset{yx}{dd}V$ neglectus esset, qui tamen hoc casu negligi non debet. Regula ergo, quæ sequitur, hoc casu observanda est. Ponatur primum sola quantitas x variabilis, altera y vero tanquam constans tractetur, et quaeratur ipsius V differentiale posita y constante.

Deinde ponatur sola quantitas y variabilis, et quaeratur ipsius V differentiale, quantitate x habita pro constante. Denique tertio, cum jam inventum

sit $\overset{x}{d}V$, quaeratur ipsius $\overset{x}{d}V$ differentiale posita sola y variabili et x habita pro constante, vel quod eodem redit, quae-

ratur ipsius $\overset{x}{d}V$ differentiale posita y constante (§. 417.). Tria hæc differentialia in unam colligantur summam, quæ erit ipsius V differentiale quæsitum.

Eadem regula observanda quoque est, si $0 = P = \mathfrak{P} \quad . \quad . \quad = \mathfrak{Q}$, vel $0 = P \quad . \quad . \quad = \mathfrak{R}$, vel $0 = P$

$0 = P \dots = S$. etc, dummodo singula differentialia partialia capiantur secundum ea, quæ §. 247. sunt exposita.

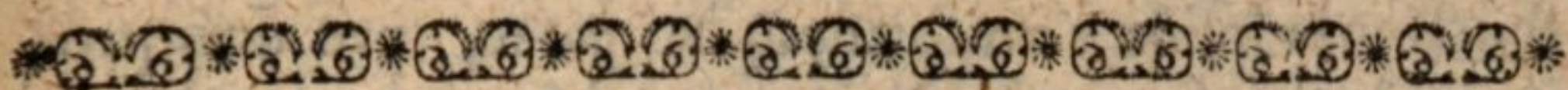
§. 427.

Ea quæ de inveniendi valore functionis unius variabilis maximo vel minimo Sect. XVII. exposita sunt, in usum quoque vocari possunt, quando functionis duarum vel plurium variabilium maximus vel minimus valor reperiendus proponitur. Quodsi enim sit V functio duarum variabilium x et y ; quæstio eo redit, ut isti variabilium x et y valores reperiantur, quibus substitutis habeat V vel maximum valorem, vel minimum. Ad hoc efficiendum, ponamus y jam eum habere valorem, qui requiritur ad functionem V maximam vel minimam reddendam; atque hoc posito opus tantum erit, ut pro altera variabili x idoneus quoque valor investigetur, quod

fiet ponendo $\frac{dV}{dx} = 0$. Simili modo si variabilis x jam eum habeat valorem, qui requiritur ad functionem V maximam vel minimam efficiendam, valor pro y substi-

tuendus invenitur ponendo $\frac{dV}{dy} = 0$. Si itaque sit $dV = Pdx + Qdy = 0$, esse debet $P = 0$ et $Q = 0$, ex quibus duabus æquationibus convenientes variabilium x et y valores deducuntur. Inventis ex hisce æquationibus utriusque variabilis valoribus inquirendum est, utrum ambo simul functioni V vel maximum vel minimum valorem inducant. Omnes enim eos casus rejici debere, quibus altera functioni V maximum, altera minimum valorem inducit, manifestum est. Utrum vero valores pro x et y reperti maximum efficiant vel minimum valorem, eodem modo, quo §. 259. dijudicandum est.

SECT.



SECTIO XXVII.

D E

AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS.

§. 428.

Si fuerit $V = 0$, existente V functione duarum variabilium quacunque; hac aequatione $V = 0$ certa quædam exprimitur relatio inter variables x et y , quæ una fit alterius functio, vel uniformis vel multiformis. Atque eodem casu functione V differentiata fit $Pdx + Qdy = 0$, atque $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ et $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$ quæ æquatio differentialis eandem inter variables x et y exprimit relationem, quam æquatio $V = 0$ (§.240.) eaque eo præcise casu, quo functio $-\frac{P}{Q}$ utramque variabilem involvit, æquatio differentialis implicita, vel simpliciter æquatio differentialis vocatur. Quando æquatio $V = 0$ est quadratica, vel cubica, vel altioris quoque gradus, hæc ultima ratio cognosci non potest, nisi ipsa functio y sit cognita. Est enim una variabilis y hoc casu alterius x functio multiformis, ita ut pro quovis valore ipsius x determinato functio y uno plures obtineat valores, et proinde quivis eorum valorum peculiari augeatur differentia si x differentia sua Δx augetur. Haec causa est, cur ratio ultima $\frac{dy}{dx}$ invenietur alia atque alia, prouti hic vel ille valor ipsius y substituatur. Sit y ejusmodi ipsius x functio, quæ datur per æquationem quadraticam $yy + Py + Q = 0$, in qua sunt P et Q fun-

functiones ipsius x uniformes, ac patet, pro unoquoque valore ipsius x functionem y habere valorem duplicem. Differentiando autem ex hac æquatione deducitur $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$. Si itaque fit $dP = pdx$ et $dQ = qdx$, erit $2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0$, unde fit $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp - p}{2y + P}$, quæ functio non potest non duplicem habere valorem, prouti unus vel alter ipsius y valor ex æquatione $yy + Py + Q = 0$ eidem conveniens substituatur. Simili modo, si functio y per æquationem cubicam definitur, valor functionis $\frac{dy}{dx}$ erit triplex, triplici scilicet ipsius y valori respondens. Atque si in æquatione proposita finita y quatuor vel plures habeat dimensiones, necesse est, ut $\frac{dy}{dx}$ pariter totidem valores fortiatur. Potest quoque ipsa functio y ex æquatione eliminari, quia duæ habentur æquationes y continentes, finita scilicet, et differentialis. Tum autem dy et dx ad totidem dimensiones assurgent, quod ante habuerat y , ficque ista æquatio omnes diversos ipsius $\frac{dy}{dx}$ valores simul complectetur. Sic ex æquatione differentiali $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$ habetur $y = -\frac{Pdy + dQ}{2dy + dP}$, qui valor in æquatione $yy + Py + Q = 0$ substitutus dabit $(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)dPdy + QdP^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0$, vel substitutis pdx loco dP et qdx loco dQ erit $(4Q - PP)dy^2 + (4Q - PP)pdxdy + (Qpp - Ppq + qq)dx^2 = 0$, unde fit $\frac{dy^2}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + \frac{Qpp - Ppq + qq}{4Q - PP} = 0$, ex qua æquatione duplex ipsius $\frac{dy}{dx}$ valor invenitur.

§. 429.

Quodsi igitur proposita sit æquatio indeterminata inter duas variables quæcunque x et y , quae sit $V = 0$, ex eadem per differentiationem semper obtinebitur

$$Pdx + Qdy = 0, \text{ atque } \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}, \text{ vel } \frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}.$$

Si vero y in æquatione $V = 0$ habeat n dimensiones, etiam pro quolibet valore ipsius x functio y recipit n valores, quibus successive loco y in functione $-\frac{P}{Q}$

substitutis, totidem diversi pro $\frac{dy}{dx}$ obtinentur valores.

Præterea autem notari meretur, quod ipsa hæc

functio $\frac{dy}{dx}$ vel $\frac{dx}{dy}$ nonnunquam multiplicem pro eodem ipsius y valore recipiat valorem.

Si posito $x = f$, valores functionis y fuerint $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta$, substitu-

to $y = \alpha$ in functione $-\frac{P}{Q}$ obtinetur valor ipsius

$\frac{dy}{dx}$ pro $y = \alpha$. Sed completa differentia ipsius V

forma ex §. 415. est $P\Delta x + P\Delta y + Qdx^2 + pdydx + Q\Delta y^2 + R\Delta x^3 + p\Delta y\Delta x^2 + q\Delta y^2\Delta x + R\Delta y^3 + S\Delta x^4 + \pi\Delta x^3\Delta y + q\Delta x^2\Delta y^2 + r\Delta x\Delta y^3 + S\Delta y^4 + \text{etc.} = 0$.

Quodsi itaque a substituto α loco y fit $0 = P = P$, exin-

de concludendum est, fore $Q\frac{dx^2}{dy^2} + p\frac{dx}{dy} + Q = 0$,

vel $Q + p\frac{dy}{dx} + Q\frac{dy^2}{dx^2} = 0$, ex quibus æquationibus

ultimæ rationes $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dy}{dx}$ hoc casu duplices inveniuntur.

Quodsi itaque a substituto $y = \alpha$, non tan-

tum P et $\mathfrak{P}$, sed etiam Q , p , et $\mathfrak{Q}$ evanescant; habentur æquationes $R \frac{dx^3}{dy^3} + p \frac{dx^2}{dy^2} + q \frac{dx}{dy} + \mathfrak{R} = 0$, vel $R + p \frac{dy}{dx} + q \frac{dy^2}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{dy^3}{dx^3} = 0$, unde triplex pro $\frac{dx}{dy}$ vel $\frac{dy}{dx}$ eruitur valor, qui valor quadruplex invenitur si insuper fuerit $0 = R = p = q = \mathfrak{R}$, sicque porro.

§. 430.

Invento valore $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, vel $Pdy + Qdx = 0$ ex æquatione $V = 0$ per continuatam differentiationem inveniuntur $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc, posito dx con-

stante, vel $\frac{ddx}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$, $\frac{d^4x}{dy^4}$ etc, posito dy constante;

vel denique $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^4y}{dt^4}$ etc, si tam x quam y

pendeant a valore cujusdam variabilis t , cujus differentia Δt sumitur constans. Prouti hoc modo æquationes differentiales sive *primi* sive *altioris gradus*, quæ duas variables x et y continent, ex æquationibus finitis oriuntur; iis etiam relatio inter binas istas variables exprimitur, qua y fit functio ipsius x . Atque natura æquationis differentialis perspicitur, si loco y ea ipsius x functio assignari potest, quæ per illam æquationem indicatur. In hujus autem functionis investigatione versatur *calculus integralis*, cujus finis eo tendit, ut proposita æquatione differentiali quacunque functio illa ipsius x , cui altera variabilis y æqualis est, definiatur; seu quod eodem redit, ut æquatio finita inveniatur, qua relatio inter x et y exprimitur.

§. 431.

§. 431.

Si fit V functio trium variabilium x, y, z ; æquatio $V = 0$ exprimit, qualis functio sit una harum variabilium z reliquarum x et y , atque eandem relationem inter tres variables æquatio differentialis $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ exprimere censenda est. Quemadmodum igitur æquatio $V = 0$ resolvitur, si inveniatur qualis functio ipsarum x et y loco z substitui debeat, ut æquationi satisfiat; ita quoque æquatio differentialis tres variables complectens resolvetur ab eo, qui determinabit eam binarum variabilium x et y functionem, quæ loco tertiæ z substituta efficit, ut V evanescat, seu quod eodem redit, qui indicare poterit æquationem finitam, qua idem debitus ipsius z valor exprimitur. Licet vero omnis æquatio differentialis duas tantum variables involvens semper determinatam inter easdem exprimat relationem; hoc tamen non semper evenit in æquationibus trium variabilium. Dantur enim ejusmodi æquationes, quibus nullo modo satisfieri potest, quæcunque functio variabilium x et y loco z substituatur. Primo enim patet, omnes æquationes differentiales trium variabilium x, y, z , in quibus tantum binarum differentialia ut dx et dy occurrunt, esse impossibiles. Nulla enim exhiberi potest functio ipsarum x et y , quæ loco z substituta, functionem V evanescere faciat, quia differentialia dx et dy nullo modo tolli poterunt. His itaque casibus nulla omnino datur æquatio finita eidem satisfaciens, nisi forte ejusmodi relatio inter x et y assignari queat, quæ quidquid sit z subsistere possit, uti fit in æquatione $zdy - zdx = ydy - xdx$, cui satisfacit æquatio $y = x$, Quibus vero casibus hoc eveniat facile investigatur, quærendo relationem inter x et y primo si $z = 0$, tumque investigando, an ista relatio pro quocunque ipsius z valore satisfaciat.

§. 432.

Potest vero æquatio differentialis trium variabilium

eo quoque casu impossibilis esse, si in ea omnia tria differentialia occurrunt. Ad quos casus evolvendos ponamus primo, propositam esse æquationem hujus formæ $dz = Pdx + Qdy$, atque P et Q esse functiones tantum variabilium x et y , tertiam z non involventes. Atque si hæc æquatio possibilis sit, erit z functio quædam variabilium x et y , cujus differentiale sit $dz = pdx + qdy$, eritque $P = p$ et $Q = q$. Sed $pdx + qdy$ esse non potest differentiale cujusdam functionis variabilium x et y , ni-

si sit $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$. Proinde æquatio $dz = Pdx + Qdy$

realis esse nequit, nisi sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Similis erit ra-

tio hujus æquationis $dZ = Pdx + Qdy$, si Z sit functio ipsius z , P vero et Q sint functiones ipsarum x et y non involventes z . Ut enim Z æqualis fieri possit functioni

ipsarum x et y , necesse est, ut sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Potest

vero criterium ad omnes ejusmodi æquationis formas æque patens investigari. Forma generalis æquationis differentialis trium variabilium est $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, ubi sunt P, Q, R , functiones trium variabilium, x, y , et z quæcunque. Quoties hæc æquatio est realis, z æqualis erit functioni cuidam variabilium x et y , et proinde ejus differentiale erit hujus formæ $dz = pdx + qdy$. Quare si in æquatione proposita ista functio ipsarum x et y loco z , atque $pdx + qdy$ loco dz substituatur, necesse est, ut oriatur æquatio identica $0 = 0$. Cum præterea ex æquatione proposita $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ fiat

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy, \text{ si in } P, Q \text{ et } R \text{ valor ille loco}$$

z substituatur, fieri debet $p = -\frac{P}{R}$ et $q = -\frac{Q}{R}$.

Ast ob $dz = pdx + qdy$, esse debet $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, unde substituto loco z ipsius valore per x et y , esse debet

$$\left(\frac{y}{d} - \frac{P}{R}\right) : dy = \left(\frac{x}{d} - \frac{Q}{R}\right) : dx, \text{ id est } -$$

$$\frac{R \frac{y}{d} P + P \frac{y}{d} R}{RR dy} = - \frac{R \frac{x}{d} Q + Q \frac{x}{d} R}{RR dx}, \text{ unde per } RR \text{ mul-}$$

tiplicando deducitur $P \frac{y}{d} R - R \frac{y}{d} P = Q \frac{x}{d} R - R \frac{x}{d} Q$.

Sed hæc differentialia $\frac{y}{d} P$, $\frac{x}{d} R$, $\frac{y}{d} R$, $\frac{x}{d} Q$, ante cognosci non possunt, quia in P , Q et R debitus pro z valor fuerit substitutus, qui cum sit incognitus, sequenti modo erit concludendum,

§. 43².

Quia P , Q , R , sunt functiones ipsarum x , y , z , earum differentialia erunt hujus formæ

$$dP = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

$$dQ = \delta dx + \epsilon dy + \zeta dz$$

$$dR = \eta dx + \vartheta dy + \iota dz$$

Concipiatur nunc loco z ubique valor ipsius in x et y substitui et loco dz valor $pdx + qdy$; eritque

$$dP = (\alpha + \gamma p) dx + (\beta + \gamma q) dy$$

$$dQ = (\delta + \zeta p) dx + (\epsilon + \zeta q) dy$$

$$dR = (\eta + \iota p) dx + (\vartheta + \iota q) dy$$

Ergo habetur $\frac{y}{d} R = \vartheta + \iota q$, $\frac{x}{d} R = \eta + \iota p$, $\frac{y}{d} P = \beta +$

γp , et $\frac{d^x Q}{dx} = \delta + \zeta p$. Sed ad realitatem æquationis

requiritur, ut sit $P \frac{d^y R}{dy} - R \frac{d^y P}{dy} = Q \frac{d^x R}{dx} - R \frac{d^x Q}{dx}$, in

qua æquatione si inventi valores substituantur, esse debet $P(\vartheta + \gamma p) - R(\beta + \gamma q) = Q(\eta + \gamma p) - R(\delta + \zeta p)$,

vel $P\vartheta - \frac{PQ\gamma}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\gamma}{R} - R\delta +$

$P\zeta$, vel denique $0 = P(\zeta - \vartheta) + Q(\eta - \gamma) + R(\beta - \delta)$,

ob $p = -\frac{P}{R}$ et $q = -\frac{Q}{R}$. Quantitatibus igitur β ,

δ , γ , η , ζ , ϑ , more consueto denotatis, esse debet $0 = P$

$\left(\frac{d^z Q}{dz} - \frac{d^y R}{dy} \right) + Q \left(\frac{d^x R}{dx} - \frac{d^z P}{dz} \right) + R \left(\frac{d^y P}{dy} -$

$\frac{d^x Q}{dx} \right)$. Aequatio $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ quoque

per divisionem semper ad hujusmodi formam reduci potest $Pdx + Qdy + dz = 0$, in quam cum prior abeat, si fiat $R = 1$, criterium hoc modo simplicius exprime-

tur $P \frac{d^z Q}{dz} - Q \frac{d^z P}{dz} + \frac{d^y P}{dy} - \frac{d^x Q}{dx} = 0$.



SECT.

SECTIO XXVIII.

DE

INTEGRATIONE FUNCTIONVM PLVRIVM VARIABILIVM ET AEQVA- TIONVM DIFFERENTIALIVM.

§. 434.

Cujusvis functionis V duarum variabilium x et y differentiale sequentem habet formam $dV = Pdx + Qdy$, ubi P et Q sunt functiones variabilium x et y ,

quæ ita a se invicem pendent, ut sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Pro-

posita igitur formula differentiali duarum variabilium integranda præ omnibus eo dispiciendum est, utrum eadem habeat descriptam proprietatem; nec ne. Quodsi prius sit, integratio peragetur secundum regulam sequentem. *Integretur primo una pars ut Pdx , variabili y , si ea in P deprehendatur habita pro constante. Integrale*

inventum $\int Pdx$ differentietur habita nunc x pro constante et sola y pro variabili, atque differentiale inventum $d\int Pdx$ subtrahatur ab altera parte Qdy . Quodsi jam differentia inveniatur $= 0$, id indicio est, integrale jam inventum esse. Si differentia non est $= 0$, ea erit formula differentialis solam y involvens. Qua integrata, et hoc integrali ad prius inventum addito, habetur integrale quod queritur; cui vero addenda est constans ex conditionibus problematis propositi determinanda. Ratio hujus regulæ manifesta erit ei,

qui attendit ad modum, quo differentiale $Pdx + Qdy$ ex suo integrali V oritur. Ponitur nimirum primo in

V sola x variabilis atque tum quæritur ejus differentiale dV , quod est Pdx . Deinde in V ponitur sola y variabilis, et quæritur dV , quod est Qdy . Quodsi igitur in omnibus terminis functionis V tam x quam y deprehendatur, etiam y tanquam constans in omnibus terminis ipsius dV invenitur. Integrato igitur dV seu Pdx , integrum V invenitur. Si igitur hoc integrale inventum differentietur posita sola y variabili, inveniri debet dV seu Qdy , et proinde $Qdy - d(Pdx)$ erit $= 0$. Quodsi vero non in omnibus terminis ipsius V tam x quam y , sed in quibusdam sola y deprehendatur; denotabimus eam ipsius V partem, in qua sola y invenitur, per v alteram per u erit $V = u + v$, et patet priora ratiocinia jam ad partem u adplicari posse. Habebit enim nunc differentiale ipsius V hanc formam $dV = du + dv$ et cum u sit functio ipsarum x et y , v vero functio solius y , erit $dV = Pdx + Qdy + Ydy$, existentibus P et Q functionibus ipsarum x et y , Y vero functione solius y . Proinde $d(Pdx) = Qdy$, et ideo $Qdy + Ydy - d(Pdx) = Ydy$, quæ est formula differentialis solam y involvens.

§. 435.

Adplicemus regulam ad exempla quædam. Datur $ydx + xdy$, et quæritur hujus integrale. Cum sit $d(yx) = yx$, et $d(yx) = xdy + ydx$, porro $x dy - y dx = 0$; erit integrale quæsitum $= xy + C$.

Si fuerit $dV = \frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{yy}$; habetur $\int \frac{dx}{y} = \frac{x}{y} d \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} - \frac{xdy}{yy}$, quod differentiale

a — $\frac{xdy}{yy}$ subtractum relinquit 0, proinde $V = \frac{x}{y} + C$.

Si fuerit $dV = \frac{dy}{r(aa-xx)} + \frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}$, fiet $\int$.

$$\frac{yxdx}{(aa-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}}, \text{ et } d \frac{y}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{dy}{(aa-xx)^{\frac{1}{2}}}, \text{ quod ab } \frac{dy}{r(aa-xx)} \text{ subtractum relin-}$$

quit 0, proinde est $V = \frac{y}{r(aa-xx)} + C$.

Si fuerit $dV = dylx + \frac{ydx}{x}$, erit $\int \frac{ydx}{x} = ylx$,

præterea $d. ylx = dylx$, quod a $dylx$ subtractum 0 relinquit: ideo est $V = ylx + C$.

Si sit $dV = yxy^{-1}dx + xy dylx$; erit $\int yxy^{-1}dx = xy$, porro $d. xy = xy dylx$, quod differentiale cum altera parte dati coincidit, proinde est $V = xy + C$.

Si fuerit $dV = dxry + \frac{xdy}{2ry} - adyry^3x - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}}$:

quæro $\int (dxry - \frac{aydx}{3x^{\frac{2}{3}}})$ quod erit $xry - ayx^{\frac{1}{3}}$. Est

vero $d (xry - ayx^{\frac{1}{3}}) = \frac{xdy}{2ry} - ax^{\frac{1}{3}}dy$; proinde $V =$

$xry - ayx^{\frac{1}{3}} + C$.

Sit $dV = \frac{xdy-ydx}{xx+yy} = \frac{xdy}{xx+yy} - \frac{ydx}{xx+yy}$.

Quæro $\int \frac{y x dy}{xx - yy}$, quod erit $= A \text{ tang. } y$, existente radio $= x$, proinde $\int \frac{y x dy}{xx - yy} = A \text{ tang. } \frac{y}{x}$. Est vero $d A \text{ tang. } \frac{y}{x} = - \frac{y dx}{xx + yy}$, quod cum altera ipsius dV parte idem est; proinde est $V = A \text{ tang. } \frac{y}{x} + C$.

Sit $dV = (dx + dy) \sqrt{x + y}$. Quæro $\int dx \sqrt{x + y}$, quod est $\frac{2}{3} (x + y)^{\frac{3}{2}}$ deinde quæro $\int dy \frac{2}{3} (x + y)^{\frac{3}{2}}$, quod est $dy (x + y)^{\frac{3}{2}}$, ex quo patet esse $V = \frac{2}{3} (x + y)^{\frac{3}{2}} + C$.

Si sit $dV = \frac{dx + dy}{x + y}$, quæro $\int \frac{dx}{x + y}$, quod erit $l(x + y)$ et cum sit $\int \frac{dy}{x + y} = \frac{dy}{x + y}$ fiet $V = l(x + y) + C$.

§. 436.

Potest methodus inveniendi hujusmodi integralia in casibus quibusdam specialibus abbreviari, et integrale inveniri, secundum ea præcepta, quæ supra pro inveniendis integrali formulæ differentialis unius variabilis sunt tradita. Novimus enim quod generaliter sit $\int a X^p$

$$dX = \frac{a}{p+1} X^{p+1}, \text{ quancunque variabilem denotet } X:$$

proinde quoque x potest esse functio duarum vel adeo plurium variabilium. Quodsi igitur alicujus formulæ differentialis plurium variabilium integrale inveniendum sit, explorari debet, utrum formula differentialis proposita constet ex duobus factoribus, quorum unus sit functio quæcunque variabilium x, y , etc, ad certam

tam quandam dignitatem elevata, alter vero differentiale hujus functionis per constantem quandam multiplicatum. Quod si ita se habeat, integrale quæsitum hic quoque per regulam fundamentalem totius calculi integralis haberi potest, eo quidem modo, quo supra § 365. usi sumus. Sit igitur iterum proposita formula $(dx + dy) r(x+y) = dV$ atque statim patet, conditionem memoratam hic locum habere. Pono igitur $x+y = z$, ut sit $dx + dy = dz$, et fiet $dV = z^{\frac{1}{2}} dz$, cujus integrale

$$\text{est } V = \frac{z^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x+y)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Pari ratione, si proponatur $dV = (2adx + 2bdy) (ax+by)^{-\frac{1}{2}}$, pono $ax+by = z$, ex quo fit $adx + bdy = dz$, et $2abx + 2bdy = 2dz$, $dV = 2z^{-\frac{1}{2}} dz$, proinde

$$V = \frac{2z^{-\frac{1}{2} + 1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C, = 4z^{\frac{1}{2}} + C = 4(ax+by)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Præterea novimus ex præcedentibus, quod omnis fractio rationalis, in qua numerator est denominatoris differentiale, sit differentiale logarithmi denominatoris,

erit proinde generaliter $\int \frac{dX}{X} = lX$ quidquid X signifi-

cet. Quodsi igitur ejusmodi fractionis denominator sit functio duarum vel plurium variabilium, ejus integrale absque ambagibus habetur. Sic proposito differentiali

$$dV = \frac{dx + dy}{x+y} \text{ statim patet, esse } V = l(x+y) + C. \text{ Pa-}$$

$$\text{ri ratione si fuerit } dV = \frac{xdy + ydx}{xy}, \text{ erit } V = lxy + C.$$

$$\text{Si vero fit } dV = \frac{xdy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy}, \text{ habetur } V = \frac{1}{2}$$

$$l(xy - yy) + C = l(xy - yy)^{\frac{1}{2}} + C.$$

§. 437.

Quando problema aliquod mathematicum solvendum proponitur, atque ex conditionibus problematis deducitur æquatio vel una vel plures; sæpe numero istæ æquationes problematis fundamentales sunt differentiales duas vel plures variables involventes. Tum vero ad problema solvendum opus est, ut loco cujushibet quæ-
ratur æquatio, quæ nullis differentialibus implicatur eandem tamen relationem variabilium exprimit, quam exponit æquatio differentialis; atque hoc ipsum negotium non aliud est, nisi integratio æquationis differentialis propositæ. Eum in finem omnes æquationis differen-
tialis termini mutatis signis ad eandem signi æqualita-
tis partem sunt transponendi, ut ipsa æquatio $= 0$ eva-
dat. Quodsi igitur æquatio duas tantum involvat quan-
titates variables x et y , eadem sequentem habebit for-
mam $Pdx + Qdy = 0$, atque tum modus ejusmodi æ-
quationes differentiales ad hanc formam reductas in-
tegrandi non differt ab eo, quem descripsimus. Propo-

sita sit æquatio differentialis integranda sequens $\frac{2xdx}{x}$
 $= \frac{xxdy}{yy}$, et fiet $\frac{2xdx}{y} - \frac{xxdy}{yy} = 0$. Quæro $\int \frac{2xdx}{x}$,
 quod est $\frac{xx}{y}$, quæro $d\frac{xx}{y}$, quod est $-\frac{xxdy}{yy}$, hinc-
 que fit $\frac{xx}{y} + C = A$ vel $\frac{xx}{y} = A - C$, vel $xx =$
 $(A - C)y$. Constans $A - C$ ex conditionibus problema-
 tis est determinanda proinde non opus est, ut ad utram-
 que partem addatur constans. Ipsum integrale inven-
 tum æquale erit constanti cuidam, quæ hic una littera
 ad alteram signi æqualitatis partem posita potest indica-
 ri, ut fiat $\frac{xx}{y} = C$, vel $xx = Cy$, quæ est æquatio

inte-

integralis quæ sita. Facile quidem et hic patet, præ omnibus explorandum esse, utrum data æquatione differentiali eaque ad formam $Pdx + Qdy = 0$ redacta, cri-

terium integrabilitatis adsit $\frac{\frac{y}{d}P}{dy} = \frac{\frac{x}{d}Q}{dx}$, ne frustra tentetur integratio.

§. 438.

Proposita jam sit formula differentialis trium variabilium integranda, quæ semper habebit sequentem formam $dV = Pdx + Qdy + Rdz$, atque si integratio succedere debet, ea formula hac gaudere debet proprie-

tate, ut sit $\frac{\frac{y}{d}P}{dy} = \frac{\frac{x}{d}Q}{dx}$, $\frac{\frac{z}{d}Q}{dz} = \frac{\frac{y}{d}R}{dy}$, $\frac{\frac{x}{d}P}{dx} = \frac{\frac{z}{d}R}{dz}$.

Præ omnibus igitur eo inquirendum est, utrum differentiale propositum hanc habeat proprietatem, nec ne. Si prius sit, ipsa integratio nititur regula sequente. *Integretur primus terminus Pdx posita sola x variabili. Integrale inventum differentietur posita x constante reliquis y et z positis variabilibus. Hoc differentiale subtrahatur a reliqua integralis dati parte $Qdx + Rdz$. Si differentia sit $= 0$, erit integrale inventum id quod queritur. Si differentia non sit $= 0$, ea erit formula differentialis duarum tantum variabilium y et z , quæ integranda est secundum præcepta præcedentia, ejusque integrale ante invento addendum.* Regulae ratio iterum manifesta est, ex mo-

do quo dV ex ipsa V invenitur: est enim $dV = \frac{x}{d}dV + \frac{y}{d}dV + \frac{z}{d}dV$. Quodsi igitur in omnibus ipsius V terminis omnes quoque variabiles x, y, z , deprehendantur, etiam y et z tanquam constantes in omnibus ipsius $\frac{x}{d}dV$ terminis manent. Integrato igitur $\frac{x}{d}dV$ posita x sola variabili integrum V invenitur. Quare si hoc integrale inven-

inventum differentietur positis y et z variabilibus, x vero constante, prodire debet $Qdy + Rdz$, atque ideo

erit $Qdy + Rdz - d \int Pdx = 0$, Quodsi vero non in omnibus terminis ipsius V omnes tres deprehendantur variabiles, sed in quibusdam tantum: denotabimus eam functionis V partem, quæ non omnes tres involvit variabiles littera v et alteram litteram, ut sit $V = u + v$, ac patet ratiocinia ante allata jam ad partem u adplicari posse. Erit enim $dV = du + dv$: cum autem sit u functio trium x, y, z , et v functio duarum variabilium y et z , vel adeo unius tantum y , vel z , erit $du = Pdx + Qdy + Rdz$, et $dv = pdy + qdz$, vel tantum $= pdy$, vel $= qdz$. Sit primum, et erit $dV = Pdx + Qdy + Rdz + pdy + qdz$, existentibus p , et q functionibus duarum variabilium y et z , vel unius tantum earum. Est vero

$d \int Pdx = Qdy + Rdz$ per demonstrata, et adeo Qdy

$+ Rdz + pdy + qdz - d \int Pdx = pdy + qdz$, quæ est formula differentialis tantum y et z , involvens. Simul ex his patet, in eo casu, quo v est functio unius tantum variabilium y vel z , hanc differentiam quoque unam tantum variabilem involvere. Eadem prorsus via incedendum est, si detur æquatio differentialis trium variabilium reducibilis ad formam $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, eo tantum discrimine, ut integrale inventum æquale ponendum sit quantitati cuidam constanti, prouti hoc antea jam factum est, cum de æquationibus differentialibus duarum variabilium sermo erat.

§. 439.

Proposita sit æquatio $\frac{1}{2} abz^2 y^{-1} x^{-\frac{1}{2}} dx + 2abx^{\frac{1}{2}} y^{-1} z dz - abx^{\frac{1}{2}} z^2 y^{-2} dy = 0$, et primi termini integrale posita sola x variabili est $abz^2 y^{-1} x^{\frac{1}{2}}$ cujus differen-

ferentiale positis y et z variabilibus est aequale reliquae differentialis propositi parti. Proinde quaesita aequatio

integralis est $abz^2y^{-1}x^{\frac{1}{2}} = C$. Si fuerit $abx^{-1}dz +$

$$\frac{bxydy - by^2dx}{x^2r(xx+yy)} - \frac{abzdx}{xx} = 0, \text{ instituto examine,}$$

utrum criterium integrabilitatis adsit, quod adesse repe-

rietur; quaero $\int abx^{-1}dx$, quod est $= \frac{abz}{x}$. Differen-

tiato hoc integrali et posita z constante, invenitur $-$

$$\frac{abzdx}{xx}, \text{ quod differentiale subtractum a reliqua diffe-}$$

rentialis propositi parte relinquit $\frac{bxydy - by^2dx}{xxr(xx+yy)} =$

$$\frac{bydy}{xr(xx+yy)} - \frac{byydx}{xxr(xx+yy)}. \text{ Quaero igitur}$$

$$y \frac{bydy}{\int xr(xx+yy)}, \text{ quod est } \frac{br(xx+yy)}{x}, \text{ hujus diffe-}$$

$$\text{rentiale posita sola } x \text{ variabili est } \frac{-byydx}{xxr(xx-yy)}, \text{ quod}$$

cum ultima parte propositae idem est. Integrale igi-

$$\text{tur quaesitum erit } \frac{abz + br(xx+yy)}{x} = C.$$

§. 440.

Ea quae haecenus sunt exposita ostendunt, quod aequationes differentiales duarum variabilium quas semper ad hanc formam reductas esse suppono $Pdx + Qdy = 0$, ad duas revocari possint classes, quarum primam constitu-

unt, quae eam habent proprietatem, ut sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$,

alteram, quae hac proprietate destituuntur. Prioris generis aequationum non difficulter reperiuntur integra-

lia.

lia. Sed majoris negotii est integratio aequationum, quae pertinent ad alteram classem. Videri hic posset, rite concludi, si in aequatione differentiali non fit

$$\frac{\frac{y}{dP}}{\frac{dy}{dy}} = \frac{\frac{x}{dQ}}{\frac{dx}{dx}}, \text{ eam non fore functionis cujusdam diffe-}$$

rentialem, et proinde integrale ipsius per nullam functionem explicabile, atque problema ipsum esse impossibile. Non autem probavimus, cujusvis functionis duarum variabilium differentiale gaudere eadem proprietate necessario, sed tantum hanc proprietatem locum habere; si differentiale ita capiatur, uti per differentiationem immediate prodit, nulla accedente alia mutatione. Possibiles autem sunt mutationes ejusmodi, quae licet aequalitatem differentialis cum 0 non tollant, adductam tamen tollunt proprietatem. Fit nempe hoc semper, si tota aequatio differentialis per functionem quandam variabilium x et y multiplicari vel dividi intelligatur. Si enim aequatio memoratam habens proprietatem ducatur in factorem μ qui est functio variabilium x et y , erit ob $Pdx + Qdy = 0$, etiam $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$. Quodsi igitur quis assumere velit, in posteriori hac aequatione proprietatem eandem adhuc lo-

$$\text{cum habere, foret } \frac{\frac{y}{\mu dP} + P d\mu}{dy} = \frac{\frac{x}{\mu dQ} + Q d\mu}{dx}; \text{ pro-}$$

$$\text{inde ob } \frac{\frac{y}{dP}}{\frac{dy}{dy}} = \frac{\frac{x}{dQ}}{\frac{dx}{dx}}, \text{ et ideo } \frac{\frac{y}{\mu dP}}{\frac{dy}{dy}} = \frac{\frac{x}{\mu dQ}}{\frac{dx}{dx}}, \text{ fiet } \frac{\frac{y}{P d\mu}}{\frac{dx}{dx}} =$$

$$\frac{\frac{x}{Q d\mu}}{\frac{dx}{dx}} \text{ et } R d\mu dx = Q d\mu dy. \quad \text{Quia vero } Pdx = -Qdy$$

utrinquo divise fit $d\mu = -\frac{x}{y} d\mu$, et $d\mu + d\mu = d\mu = 0$; quare μ esset quantitas constans non pendens a variabilibus

bus x et y , quod est contra hypothefin. Idem locum habere, si æquatio per functionem quandam variabilium x et y , quæ fit $=v$, dividatur ex eo liquet, quia dividere per v idem est, ac per $\frac{1}{v}$ multiplicare. Quanquam itaque æquationes differentiales non habeant eam for-

mam, ut sit $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, tamen integrale earum est

possibile. Erunt vero hujus generis istae, in quibus proprietas hæc ob æquationis per functionem quandam variabilium x et y factam multiplicationem aut divisionem, aut generaliter, quia multiplicare per μ sit idem, quod dividere per $\frac{1}{\mu}$, per divisionem sublata est. Restitui

itaque poterit in quavis earum hæc proprietas, si ipsa per functionem, per quam divisa erat, denuo multiplicetur, quo facto hic casus ad priorem reducitur et integrale æquationis per regulas supra traditas sine negotio investigatur. Proinde absolvi poterit ejusmodi æquationum integratio, si in potestate fuerit functionis istius, cujus divisione proprietas sæpius dicta sublata est, investigatio. Hujus rei adferamus primo exempla aliquot specialia: deinde tentabimus, quousque in hoc problemate generaliter solvendo pertingat analysis.

§. 441.

Quando proposita est æquatio differentialis duarum variabilium hujus formæ $nxyn^{-1}dy + y^n dx = 0$ proprie-

tas ista $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ adesse deprehenditur. Quod si

vero hæc æquatio dividatur per y^{n-1} ut prodeat $nxdy + ydx = 0$, ea sublata est. Hinc vice versa sequitur, quod si æquatio quædam differentialis formæ $nxdy + ydx$

$= 0$ sit proposita, ad integrale inveniendum ea multiplicanda sit per y^{n-1} , ut ista proprietas restitatur. Pari ratione si æquatio differentialis hanc habeat formam

$$\frac{nx y^{n-1} dy - y^n dx}{xx} = 0, \text{ proprietas ista } \frac{y}{dy} = \frac{x}{dx}$$

locum habere invenitur, atque integrale ejus æquationis

est $\frac{y^n}{x} = C$. Quodsi vero hæc æquatio differentialis

dividatur per $\frac{y^{n-1}}{xx}$, ut prodeat $nx dy - y dx = 0$ tollitur

eadem proprietas. Ex his vice versa sequitur, quod, si æquatio differentialis quaedam formæ $nx dy - y dx = 0$ proponatur, ad inveniendum illius integrale ipsa multi-

plicanda sit per $\frac{y^{n-1}}{xx}$, quo facto ista proprietas erit re-

stituta. Quia inter problemata geometrica, quæ calculi integralis ope solvuntur, præcipue notari merentur ea, quibus ex datis tangentium, vel arearum curvilinearum, vel aliis curvarum proprietatibus, æquationes naturam curvae definientes quaeruntur; etiam hujusmodi quaedam problemata adferamus ad ea quæ dicta sunt illustranda. Cum ipse calculus differentialis primam suam originem debeat illis problematibus, quæ positionem rectæ curvæ dato puncto tangentis spectant, et ob hanc ipsam rationem *methodus tangentium* vocata sit: vice versa ea methodus, qua ex data positione tangentis ipsa curva quaeritur, *methodus tangentium inversa* vocata est. Et cum invento demum calculo integrali ad hujusmodi problemata hic calculus potissimum applicatus fuerit; universus hic calculus a quibusdam *methodus tangentium inversa* vocata est, licet usum habeat multo latius patentem. Generaliter hic iterum monenda sunt ea, quæ supra §. II. ratione universæ Analyseos sunt moni.

monita. Calculus integralis proprie non docet, quomodo æquatio problematis fundamentalis inveniri queat. Iste modus hauriri debet ex disciplina, ad quam problema propositum pertinet. Docet tantum iste calculus, quomodo data problematis propositi æquatione fundamentali ad perfectam problematis solutionem pervenire queamus. Cujus rei ratio ut eo melius perspiciatur, problemata geometrica, quae sequuntur, sunt adposita.

§. 442.

Quaeritur curva, cujus subtangens PT semper æ-F.275. qualis est duplae abscissae AP. Quando x abscissam AP et y applicatam PM denotat, ratio subtangentis ad ordinatam y semper æqualis est limiti rationis $\Delta x : \Delta y$, seu rationi $dx : dy$, uti ex praecedentibus constat; seu quod

idem est, subtangens curvae semper est $= \frac{y dx}{dy}$. Data

igitur functione ipsius x , vel ipsius y , vel utriusque, cui semper æqualis est subtangens, datur curvae æquatio differentialis, qua integrata, habetur æquatio curvae quaesitae. Erit igitur ex conditionibus problematis

propositi $\frac{y dx}{dy} = 2x$, ex qua reducta fit $2x dy - y dx = 0$.

Continetur haec æquatio sub forma $nxdy - ydx = 0$,

posito $n=2$, quare multiplicanda est per $\frac{y}{xx}$, ut pro-

deat $\frac{2yxdy - yydx}{xx} = 0$, cujus integrale invenitur

$\frac{yy}{x} = b$, seu $yy = bx$, ex quo patet, curvam qua-

sitam esse parabolam apollonianam, cujus parameter æqualis est cuilibet assumtae b .

§. 443.

F.276. Accidit interdum, ut aequatio problematis fundamentalis pluribus quam duobus constet terminis. Tum vero saepius ope substitutionis idoneae in talem transformari potest aequationem, quae duobus tantum terminis constat, et quae sub forma §. 441. comprehenditur. Quaeritur curva AM, in qua abscissa $AP = x$, $PM = y$, $E =$ constanti a , cujus subtangens ubique est $= \frac{2ax + xx}{a + x}$; erit ex conditionibus problematis $\frac{2ax + xx}{a + x} = \frac{ydx}{dy}$, quae reducta dat $2axdy + xxdy - aydx - xydx = 0$. In hac aequatione non deprehenditur $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$. Posito vero $2ax + xx = zz$, ut fiat $2adx + 2xdx = 2zdz$, habetur facta substitutione $x = \frac{zz - xx}{2a}$ et $dx = \frac{zdz}{a + x}$ sequens aequatio $zdy - ydz = 0$, quae multiplicata per $\frac{1}{zz}$ dabit $\frac{zdy - ydz}{zz} = 0$, cujus integralis est $\frac{y}{z} = b$, vel $y = bz$ et substituto pro z valore ipsius $\sqrt{2ax + xx}$ erit $y = b\sqrt{2ax + xx}$, vel $yy = 2abbx + bbxx$, quae est aequatio pro hyperbola.

§. 444.

F.280. Pronti hic ex data expressione subtangentis eruitur aequatio pro curva, cujus est subtangens, ita quoque ex data expressione pro area curvae APM quaeri potest aequatio naturam curvae definiens. Requiritur hunc in finem, ut expressio pro area APM data sit functio abscissae $x = AP$ et applicatae $y = PM$. Differentianda enim est functio, quae pro area datur, et cum generaliter differentiale areae APM in qualibet curva sit ydx ; differentiale inventum huic expressioni ydx aequandum erit, qua

qua aequatione integrata habetur aequatio naturam curvae definiens, quae quaerebatur. Sit igitur invenienda aequatio pro curva, cujus area $AMN = s$ sit semper subtriplum rectanguli circumscripti $APMN$; erit posita $AN = x$, et $NM = y$, ex conditionibus problematis $3s = xy$, proinde $3ds = xdy + ydx$. Cum vero generaliter sit $ds = ydx$, ponendum erit $3ydx = xdy + ydx$, ex qua deducitur $2ydx - xdy = 0$. Continetur haec aequatio differentialis sub forma $nydx - xdy = 0$, multiplicanda igitur erit per $\frac{x}{yy}$, ut prodeat $\frac{2yx dx - xx dy}{yy} = 0$, cujus integralis est $\frac{xx}{y} = b$, vel $xx = by$; curva igitur quaesita parabola est.

§. 445.

Cum generaliter formulae differentialis duarum variabilium hujus formae $Pdy + Qdx$ integrale per haec praece-

pta haberi possit, si modo fuerit $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dy} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dx}$; earum quo-

que aequationum differentialium integralia haberi possunt, quae ita reduci possunt, ut vel utrumque ejus membrum sit formula differentialis duarum variabilium

formae $Pdx + Qdy$, in qua est $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dy} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dx}$, vel unum

saltem, alterum vero formula differentialis unius tantum variabilis formae pdx , cujus integrale per antecedentia haberi potest: id quod iterum in casibus aliquot specialibus tantum locum habet. Ad ejusmodi aequationem deducunt duo, quae sequuntur, problemata.

Invenire qualis sit curva AM , in qua est $E^2 : PM^2 = PM : AT$, ubi est E constant quaedam data. Posito $AP = x$, $PM = y$, $E = a$, ex conditionibus pro-

blematis est $AT = \frac{y^3}{aa}$, et proinde $PT = \frac{y^3}{aa} + x =$

$\frac{y^3 + aax}{aa}$ = subtangenti. Ex his sequens deducitur aequa-

tio: $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^3 + aax}{aa}$, et exinde fit $y^3 dy = aaydx -$

$aaxdy$, quae aequatio utrinque per yy divisa in hanc trans-

formatur $ydy = \frac{aaydx - aaxdy}{yy}$. Sumto igitur in-

tegrali ex utroque membro habetur $\frac{1}{2}yy = \frac{aax}{y}$ vel y^3

$= 2aax$, quare curva quaesita est ordinis tertii.

Quodsi invenienda sit natura curvae AC, cujus

subtangens est $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$; ex conditionibus pro-

blematis habetur $\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx} = \frac{ydx}{dy}$, et reducta aequa-

tione fit $3xx y dx + 3x^3 dy = 2axy dy - ayy dx$. Quodsi

hæc æquatio dividatur per xx habetur $3y dx + 3x dy$

$= \frac{2axy dy - ayy dx}{xx}$, ex qua sumtis utrinque integra-

libus deducitur $3xy = \frac{ayy}{x}$, vel $xx = \frac{1}{3}ay$, quod ostendit,

curvam esse parabolam, cujus parameter est $\frac{1}{3}a$.

§. 446.

Casus isti speciales eum in finem adducti sunt, ut pateat quomodo methodis sæpe specialibus via admodum brevi ad optatum perveniri potest scopum. Sat multa problemata, quæ ad æquationes differentiales duarum variabilium deducunt, suam propriam habent methodum specialem, qua æquationi ejusmodi indui potest forma, ut ejus integralis per regulas fundamendales sat expedite capi

capi possit, cujus autem investigatio relinquenda est sagacitati illius, qui problema resolvere suscipit. Cæterum illud manifestum est, quod methodis istis specialibus non egeremus, si generalis extaret methodus inveniendi factorem, per quem multiplicari debeat æquatio differentialis formæ $Pdx + Qdy = 0$, ad quam formam omnes æquationes differentiales duarum variabilium reduci pos-

sunt, ut fiat $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dx} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy}$, si eadem, prouti proponitur, hac proprietate sit destituta. Tentandum itaque erit, quousque analysis hic pertingere valeat.

§. 447.

Data sit æquatio differentialis $Pdx + Qdy = 0$, proprietate hac destituta, sitque μ functio, per cujus divisionem ipsa sublata est. Si ergo æquatio hæc denuo per μ multiplicetur, in producto $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$, pro-

prietas hæc restituta erit. Atque proinde fiet $\frac{y}{dy} \frac{d\mu}{dx} + \frac{x}{dx} \frac{dP}{dy} = \frac{y}{dy} \frac{d\mu}{dx} + \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy}$

$= \frac{Qd\mu + \mu dQ}{dx} = \Phi$. Ex his concluditur $\frac{y}{\mu} \frac{d\mu}{dx} = \frac{\Phi dy}{\mu P}$

$-\frac{y}{P} \frac{dP}{dx}$ et $\frac{x}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{\Phi dx}{\mu Q} - \frac{x}{Q} \frac{dQ}{dy}$. Addantur istæ æ-

quationes et prodit summa $\frac{y}{\mu} \frac{d\mu}{dx} + \frac{x}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\Phi dy}{\mu P}$

$+ \frac{\Phi dx}{\mu Q} - \frac{y}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{x}{Q} \frac{dQ}{dy}$. Ex æquatione vero $Pdx +$

$Qdy = 0$ concluditur $Q = -\frac{Pdx}{dy}$; quo valore pro Q

in repertae æquationis termino secundo substituto fiet

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{y}{P} \frac{dP}{P} - \frac{x}{Q} \frac{dQ}{Q}.$$

Quodsi igitur hæc æquatio fuerit integrabilis, ex eadem obtinetur $\log. \mu$, et capiendo numeros ipsa functio μ , quae quærebatur.

Insignis vero difficultatis in quovis fere casu esse solet hæc integratio. Dantur interim casus aliquot speciales, in quibus hoc negotium facilius succedit.

Simplicissimus eorum est is, in quo æquatio hæc differentialis non pendet nisi a sola x , aut sola y , quorum casuum perfecte identicorum unicum attentius scrutari sufficit. Cum sit $Pdx +$

$$Qdy = 0, \text{ fiet } P = -\frac{Qdy}{dx}, \text{ et substituto hoc valore ha-}$$

$$\text{beamus } \frac{d\mu}{\mu} = \frac{y}{Qdy} \frac{dPdx}{P} - \frac{x}{Q} \frac{dQ}{Q},$$

quæ forma in quibusdam casibus non nisi solum x involvit. Distinguendi itaque erunt casus, in quibus hoc evenit. Ut formula non contineat, nisi x , functiones P et Q ejus formae

$$\text{esse debent, ut } \frac{x}{G} \text{ et } \frac{y}{Qdy} \frac{dPdx}{P} \text{ debite reductae ab } y \text{ omni-}$$

no non pendeant. Indicemus in posterum littera Y functionem ipsius y et minusculis r, s, t , functiones ipsius x quascunque. Q itaque primo loco ejusmodi esse debet functio ipsius y , quae si sola x in eadem variabilis ponatur, tale producit differentiale, quod per eandem functionem ipsius y divisibile sit, per quam Q ipsum dividi potest. Hoc vero evenire prorsus nequit, nisi Q sit factum functionis cujusdam ipsius y per aliam quamcunque ipsius x , unde generaliter erit $G = Yr$. For-

ma ipsius P ejusmodi requiritur, ut $\frac{y}{P} \frac{dP}{P}$ et Q per eandem functionem ipsius y sint divisibilia. Cum itaque jam

jam antea functionem ipsius y , per quam Q dividi potest, assumserimus Y , hoc Y ipsius dP divisor existere debet: unde forma ipsius dP esse debet $Ytdy$, et forma ipsius P esse debet $t\int Ydy + s$. Quare si $\int Ydy$ ponatur $= Y^x$, erit $P = tY^x + s$. Aequationes itaque hac methodo integrabiles erunt, quae habent formam $(tY^x + s)dx + Yr dy = 0$, aut quae ad hanc formam sunt reducibiles. Solutum sic habemus propositi problematis generalis casum particularem, sed restat adhuc potior pars, quo pertinent casus, in quibus valor ipsius μ generaliter evolutus eo reduci nequit, ut solum a variabili unica pendeat, qui multo maiorem habent difficultatem, ita ut generalis hujus problematis solutio nondum sit in potestate.

§. 448.

Hæc causa est cur in methodis specialibus investigandis et emendandis magis occupati fuerint Analystae, quam in invenienda generali, cum generalis hunc in finem adhibenda methodus vix speranda sit. Inter varias vero methodos speciales ab iisdem excogitatas potissimum notanda est ea, qua æquationi $Pdx + Qdy = 0$ seu $Pdx = Qdy$ ea tribuitur forma, ut P sit functio unius tantum variabilis x et Q functio solius y . Patet enim, quod in hoc casu integratio æquationis differentialis propositæ non pendeat, nisi a methodis, quibus æquationum, non nisi unicam variabilem continentium, reperiuntur integralia, atque ad hunc ipsum casum saepe reducuntur æquationes propositæ ope methodi generalis §. praec. expositæ. Ista vero methodus, qua æquationi differentiali duarum variabilium ea tribuitur forma ut sit $Pdx = Qdy$, P vero non nisi functio ipsius x , et Q functio solius y , vocatur *Separatio variabilium* x et y . Quædam occurrunt problemata, in quibus hæc separatio indeterminatarum sponte se offert; in aliis autem

major et in hoc negotio deprehenditur difficultas. Adferamus igitur primo quædam problemata, in quibus forma æquationis, ubi variabiles sunt separatæ, absque omni transformatione statim se offert, cujusmodi erunt sequentia.

F.275. Quæritur, qualis sit curva AP, cujus applicata PM semper est media proportionalis inter datam constantem E et subtangentem PT. Sit $AP = x$ et $PM = y$, $E = a$, erit $PT = \frac{yy}{a}$, proinde ex conditionibus proble-

matis fit $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, ex qua reducta habetur $aydx = yydy$, et dividendo per y fit $adx = ydy$, in qua variabiles sunt separatæ. Sumentis igitur utrobique integralibus invenitur $ax = \frac{1}{2}yy + C$. Quia initium abscissarum sumitur in puncto, A, ubi curva axem secat, patet posito $x = 0$, esse $y = 0$, et proinde $C = 0$; æquatio igitur pro curva quæsita est $ax = \frac{1}{2}yy$, vel $2ax = yy$, quod ostendit, curvam quæsitam esse parabolam, cujus parameter $= 2a$.

F.281. Quaeritur curva, cujus applicata PN est media proportionalis inter subtangentem PT et datam constantem E demta abscissa AP. Pono $E = a$, $AP = x$, $PN = y$,

erit $a - x : y = y : PT$, et proinde $PT = \frac{yy}{a - x}$, unde

fit æquatio $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a - x}$, ex qua reducta obtinetur $aydx$

$- yx dx = yy dy$, quæ divisa per y dat $adx - x dx = y dy$, in qua iterum variabiles separatæ sunt, et cujus integralis est $ax - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}yy$, constans iterum nulla adjicitur, quia posito $x = 0$ fit $y = 0$. Aequatio vero inventa $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, seu $2ax - xx = yy$ indicat, quæsitam curvam esse circulum, cujus radius $= a$.

Quæritur curva, quae hanc habet proprietatem, ut quadratum applicatae PM ubique sit medium proportionale inter quadratum datæ constantis E et aream curvilineam APM. Pono $AP = x$, $PM = y$, $E = a$, erit

area APM $= \frac{y^4}{aa}$, et proinde $d. APM = ydx =$

$\frac{4y^3 dy}{aa}$, ex qua reducta fit $4y^3 dy = aaydx$, et diviso

per y habetur $4yydy = aadx$, et sumtis integralibus obtinetur $\frac{4}{3}y^3 = aax$, vel $y^3 = \frac{3}{4}aax$. Curva igitur quæ sita est ordinis tertii.

§. 449.

Permuli occurrunt casus, in quibus integralia etiam post separationem variabilium vel transcendentia sunt, vel plane sumi nequeunt; ob defectum methodus calculi integralis functionum unius variabilis, cum nihilominus curva quæ sita possit esse algebraica. In his itaque et aliis ejusmodi occasionibus recurrendum est ad alia media, quorum unum erit, ut æquationi differentiali tribuatur forma $Pdx + Qdy = 0$, ita ut P involvat y , et Q contineat x , et integratio tentetur secundum præcepta §§. 437. sqq. Alterum medium est, ut quidem æquationi differentiali ea relinquatur forma, in quibus variabiles sint separatæ $Xdx = Ydy$, tum vero duo formantur spatia, quorum unum sit $= \int Xdx$, alterum $= \int Ydy$; et si ratio inveniri potest inter duo ista spatia, id est, si parti unius haberi potest pars alterius æqualis, signum est, quod curva quæ sita sit geometrica, illiusque natura inveniri queat; si vero unum spatium alteri æquare non possit, erit curva quæ sita transcendens. Prioris modi exemplum est problema §phi 442., ubi quærebatur curva, cujus subtangens PT æqualis sit duplæ abscissæ 2AP. Hinc erat ex conditionibus problematis

$\frac{ydx}{dy} = 2x$, et proinde $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, ubi indeterminatae

quidem sunt separatae, sed integrale utriusque membri æquationis transcendens est. Tribuendo autem æquationi hanc formam $2xdy - ydx = 0$ supra jam §. 442. ejus integrale inventum est.

§. 450.

Alter modus generalis est, tam pro curvis transcendentibus, quam geometricis, quotiescunque variables in data æquatione differentiali sunt separatae. Adpli-

cemus eundem ad idem exemplum $\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}$, et patet

$\frac{dy}{y}$ esse differentiale areae ejusmodi curvae, in qua si

y fit abscissa, sit $\frac{1}{y} =$ applicatae, quae si ponatur $= u$,

erit $1 = uy$ æquatio pro hac curva, quam hyperbolam esse ad asymptotum relatam, cognitum est. Pari ratione

$\frac{dx}{x}$ est differentiale areae ejusmodi curvae, in qua si

applicata ponitur $= z$, fiet $\frac{1}{x} = z$, seu $1 = xz$, quæ

iterum est pro hyperbola ad asymptotam relata. Ad

F.295. inveniendam per hæc naturam curvae quaesitæ, ducatur recta AB, et per punctum A ducatur perpendicularis EF.

Ad AE tanquam axem construatur curva, cujus æquatio est $2 = uy$, ita ut quævis applicata GH $= u$

fiat $= \frac{2}{y}$, et habebitur exinde hyperbola IKH ad asymptotas AD, AG, cujus potentia est $= 2$. Infra AB vero

construatur curva, cujus æquatio est $1 = xz$, ita ut

quævis applicata BL fiat $= \frac{1}{x}$, formabitur inde hyperbola ad asymptotas AF et AB, cujus potentia est $= 1$.

Suntis igitur abscissis AO et AG ut et AP et AB, erit

KG

$KG = \int \frac{2}{y} dy$, et $MB = \int \frac{1}{x} dx$. Cum igitur esse
 debeat $\frac{2}{y} dy = \frac{1}{x} dx$, erit $\int \frac{2}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$, id est
 summi debet $KG = MB$. Tum enim productis LB et HG
 erit punctum occurfus C in curva quaesita. Talis enim
 erit $BC = AG = y$ functio ipsius $AB = x$, ut sit $\int \frac{2dy}{y}$
 $= \int \frac{x}{dx}$. Restat igitur ad naturam curvae AC deter-
 minandam, ut spatio hyperbolico KG sumatur aliud
 MB aequale. Quodsi autem sumatur $AO^2 : AG^2 = AP$
 $: AB$, erit area $KG =$ areae MB (§. 332.). Proinde
 curva construenda AC est geometrica et quidem talis, ut
 quadrata adplicatarum PS , BC , sint ut abscissae AP et
 AB , id est ratio $\frac{yy}{x}$ est = constanti a , ex quo ha-
 betur aequatio $yy = ax$ pro parabola, quae jam supra
 §. 442. inventa est.

§. 451.

Problema, quod in §. praecedente solutum dedi-
 mus, licet casum tantum exhibeat specialem; haud diffi-
 culter tamen ex eo abstrahuntur regulae generales in
 quovis alio casu adhibendae. Omnia enim eo redeunt,
 ut proposita aequatione differentiali hujus formae Xdx
 $= Ydy$, in qua variables sunt separatae, construantur
 duae curvae, in quarum una quaevis applicata z ad ab-
 scissam x fit $= X$, in altera vero quaevis applicata u ad
 abscissam y fit $= Y$. Quarum curvarum si cuivis areae
 unius abscissae x respondentis reperiri potest aequalis area
 alterius, quae abscissae y respondebit; ad quamvis x
 habebitur functio ei respondens y ; et hoc quidem est id,
 quod requiritur ad cognoscendam naturam curvae, cu-
 jus aequatio est $\int Xdx = \int Ydy$, quae proponebatur.
 Quodsi

Quodsi hic constans quaedam addenda sit, illa ex conditionibus problematis specialibus determinanda est. In problemate praecedentis § illud opus non est, quia posito $x = 0$, evadit $y = 0$. Prouti vero concessis quadraturis construitur aequatio differentialis $Xdx = Ydy$; eodem quoque modo construi potest, haec aequatio concessis rectificationibus curvarum. Exprimit enim formula Xdx differentiale arcus curvae cujus applicata ad quamvis abscissam x est $= \int dx \sqrt{X^2 - 1}$. Pari ratione Ydy exprimit differentiale arcus curvae cujus applicata ad quamvis abscissam y est $= \int dy \sqrt{Y^2 - 1}$. Construendae igitur sunt duae curvae, in quarum una quaevis applicata z ad abscissam x fit $= \int dx \sqrt{X^2 - 1}$, in altera vero quaevis applicata u ad abscissam y fit $= \int dy \sqrt{Y^2 - 1}$. Quo facto, si cuivis arcui unius curvae abscissae x respondentis reperiri potest aequalis arcus alterius curvae, qui abscissae y respondebit; ad quamvis x habebitur functio ei respondens y , et proinde construi poterit aequatio $\int Xdx = \int Ydy$, quae proponebatur.

§. 452.

Caeterum methodus eadem manet, si unius membri integrale haberi queat per regulam hujus calculi fundamentalem, et alterum membrum pendeat a rectificatione, vel quadratura cujusdam curvae. Ex quo simul perspicitur methodus construendi, si in data aequationis uno membro dx vel dy solitarium consistat. Sic si in solutione alicujus problematis perventum sit ad hujusmodi

aequationem differentialem $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ curva, quam haec aequatio exprimit, concessa rectificatione curvae, cujus differentiale arcus est $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ habetur

F.297. sequentem in modum. Radio $DA = a$ describatur semicirculus AHL , ductaque ordinata HBC sumatur $BC =$ arcui AH , et erit punctum C in curva quaesita. Nam diffe-

differentiale arcus AH est $= \frac{adx}{r(2ax - xx)} =$ differen-
 tiali ipsius BC, et proinde aequatio ad curvam BC est y
 $= \int \frac{adx}{r(2ax - xx)}$. Quodsi vero ejusmodi aequatio
 differentialis, in cuius uno membro dx vel dy solum
 consistat, construere velimus concessa quadratura cujus-
 dam curvae, multiplicanda est æquatio per constantem
 quandam ut a , ut ex una parte habeatur differentiale
 adx vel ady rectanguli, cuius basis vel altitudo constans
 est, atque tum constructio ea est, quae in §. praece-
 dente fuit tradita. Exemplum hujus rei suppeditat se-
 quens problema.

Quæritur curva, cuius subtangens semper æqualis
 sit constanti a : et erit ex conditionibus problematis $\frac{ydx}{dy}$
 $= a$, proinde $ydx = a dy$ et $dx = \frac{ady}{y}$. Multiplico hanc
 æquationem per constantem a , ut fiet $adx = \frac{aady}{y}$.
 Posita abscissa cujusdam curvæ $= y$, cuius applicata est
 $u = \frac{aa}{y}$, ut habeatur $uy = aa$, quæ est æquatio pro
 hyperbola, cuius potentia est $= aa$. Ducatur itaque ad F. 298.
 rectam indefinitam LH normalis OI. Sumatur A pro
 initio abscissarum, atque in LH capiantur abscissæ AG,
 AH $= x$, facta AI $= a$ per I ducatur recta IQ ipsi AH
 parallela, erunt rectangula AP, AQ, etc $= \int adx = ax$.
 In axe AO vero capiantur abscissæ AB, AN, AO, etc,
 $= y$, et fiant applicatae BK, NE, OF, etc, $=$
 $\frac{aa}{y}$ $= u$, fiet curva KF hyperbola æquilatera, cuius
 potentia est $= aa$. Sumto igitur rectangulo AP, eidem
 æqua-

æquale fieri debet spatium hyperbolicum BE, ut sit $\int adx = \int \frac{aady}{y}$, et ideo productis EN et PG usque ad concurrsum in D, erit punctum D in curva quæsitæ. Tum enim est $GD = y$ talis functio ipsius x , quam æquatio $\int adx = \int \frac{aady}{y}$ poscit. Sed ex proprietatibus hyperbolæ notum est, quod suntis areis BE, NF, etc æqualibus, seu in proportionem arithmetica; AB, AN, AO, fiant geometricè proportionales. Sumtis vero rectangulis AP, GQ, etc, æqualibus, fiunt non tantum abscissæ AG, AH, etc, sed et areæ BE, NF, etc, æquales. Curva igitur BDC hanc habet proprietatem, ut suntis AG $= a$, GD $= b$, fiat $a : x = lb : ly$, seu $xb = al \frac{y}{b}$, et posito $lb = 1$, $x = al \frac{y}{b}$, quod ostendit, curvam quæsitam esse logarithmicam.

§. 453.

Ex omnibus hisce adparet, quod unicum potissimum sit, quod desiderari queat ad perficiendam methodum tangentium inversam, seu methodum integrandi æquationes differentiales duarum variabilium primi ordinis, separatio nempe variabilium in ejusmodi æquationibus differentialibus, si problema conducat ad talem, in qua variabiles non sunt separatae. Haec causa est, cur permultae ab Analystis excogitatae sunt methodi hunc in finem adhibendae, quarum quaedam in casibus tantum specialibus succedunt: aliae vero usum habent generaliore, Quod ad primas attinet methodos; notandum est, quod saepe æquatio jam per se sit ejus conditionis, ut vulgaribus Algebrae operationibus omnes istae partes, quae x et dx involvunt ad unam, reliquae vero, quae y et dy involvunt, ad alteram partem disponi possint

sint. In aliis casibus ope idoneae substitutionis et transformationis separantur variables. Atque in his per plures occurrunt, pro quibus certæ regulæ adhibendæ tradi nequeunt, cum quodlibet exemplum peculiarem habeat regulam, quæ illi qui in calculo versatus est, raro effugiet. Adferamus tamen et hujus negotii specimina quædam, qualia erunt sequentia.

Si æquatio proposita sit $axdx + yx dx = ydy \sqrt{xx + ff}$ fiet $(aa + yy)xdx = ydy \sqrt{xx + ff}$, ex qua deducitur

$$\frac{xdx}{\sqrt{xx + ff}} = \frac{ydy}{aa + yy}.$$

Æquatio $\frac{xdx}{\sqrt{a^5 + y^5}} = \frac{ydy}{\sqrt{b^4 - x^4}}$ transfor-

matur in eam $xdx (b^4 - x^4)^{\frac{1}{4}} = ydy (a^5 + y^5)^{\frac{1}{5}}$.

Æquationis $xxdx^2 + xydx dy = aady^2$ membrum primum esset quadratum, si eidem adderetur $\frac{1}{4}yydy^2$. Hac igitur quantitate utrinque addita fit $xxdx^2 + xydx dy + \frac{1}{4}yydy^2 = aady^2 + \frac{1}{4}yydy^2$, proinde radice quadratica utrinque extracta, habetur $xdx + \frac{1}{2}ydy = \pm dy (\frac{1}{4}yy + aa)^{\frac{1}{2}}$.

In æquatione $aadx = x^2dy + 2xydy + yydy$, quæ cum hac coincidit $aadx = (x^2 + 2xy + yy)dy$, coefficientis ipsius dy est quadratum ipsius $x + y$. Posito igitur $x + y = z$ habetur $dx + dy = dz$, et $dx = dz - dy$, unde fit $aadz - aady = z^2dy$, et $aadz = (aa + zz)dy$, proinde

$$dy = \frac{aadz}{aa + zz}.$$

Quodsi sequens proposita sit æquatio $(xdy + ydx) (a^4 - xx yy)^{\frac{1}{2}} = \frac{xdx + ydy}{(xx + yy)^{\frac{1}{2}}}$, observo, quod primi

membri factor $xdy + ydx$ sit differentiale facti xy , et quod hujus facti quadratum existat sub vinculo exponen-

tis in altero factore. Pono igitur $xy = z$, ut prius membrum fiat $dz (a^4 - zz)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in secundi membri numeratore invenitur differentiale ipsius $xx + yy$ per 2 divisum, quæ quantitas est sub vinculo exponentis in numeratore. Quare pono $\frac{xx + yy}{2} = t$, ut fiat dz

$$(a^4 - zz)^{\frac{1}{2}} = \frac{dt}{r_{2t}}.$$

§. 454.

Licet in ejusmodi casibus specialibus separatio indeterminatarum ingenio illius, qui problema solvere cupit, relinquenda sit; habentur tamen regulæ quædam generales pro separatione variabilium per substitutionem faciendam. Atque inter has primaria est ea, quæ ad omnes æquationes differentiales homogeneas se extendit. Cum omnis æquatio differentialis primi ordinis hanc habeat formam $Pdx + Qdy = 0$, ea in sequentem formam facile transformatur

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}, \text{ ubi } p \text{ et } q \text{ esse possunt}$$

functiones homogeneæ variabilium x et y . Posito in hoc casu $x = yz$, et substituto hoc valore tam in p , quam q ; ultro patet, quod in casu, quo p et q sunt functiones homogeneæ, singuli termini tam ipsius p quam q , per eandem ipsius y potestatem sint multiplicati §. 123. Numeratore igitur et denominatore per

hanc ipsius y potestatem diviso, valor fractionis $\frac{p}{q}$

non mutatur, quæ tum non erit, nisi functio ipsius z . Ex hypothese $x = yz$, porro sequitur $dx = ydz + zdy$,

et proinde $\frac{dx}{dy} = \frac{ydz}{dy} + z$. Ex æquatione igitur

pro-

proposita $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$ fiet $\frac{ydz}{dy} + z = \frac{p}{q}$, et hinc
 concluditur $\frac{ydz}{dy} = \frac{p}{q} - z$, et poro $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{p}{q} - z}$.

§. 455.

Eadem methodus separandi variables extenditur quoque ad æquationes differentiales trium variabilium x, y, z , quarum forma generalis est $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, si P, Q, R . sint functiones variabilium x, y, z , homogeneæ m dimensionum. Ponitur enim $y = xu$, et $z = xt$, atque hac substitutione facta functiones P, Q, R , transmutabuntur in functiones duarum variabilium u et t , multiplicatas per potestatem x^m . Sint itaque F, G, H , functiones istæ variabilium u et t , ut fit $P = Fx^m$, $Q = Gx^m$, $R = Hx^m$; erit præterea $dy = xdu + udx$, atque $dz = xdt + tdx$. Quibus valoribus substitutis habetur æquatio hujus formæ $x^m dx (F + Gu + Ht) + x^{m+1} Gdu + x^{m+1} Hdt = 0$, unde per $x^{m+1} (F + Gu + Ht)$ utrinque diviso concluditur $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$, ubi variabilis x a reliquis u et t separata est. Quare nunc eo tantum dispiciendum est, utrum formulæ $\frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht}$ integrale capi possit modo §. 434. exposito. Quod eadem methodus ad æquationes differentialis plurium quam trium variabilium pariter extendi queat, facile patet.

§. 456.

Quia hæc methodus separandi variables iterum ad functiones homogeneas tantum adstricta est; Analystæ quæsiwerunt methodos, æquationes differentiales non homogeneas ita transformandi, ut evadant homogeneæ. Atque hoc iterum casu methodi generales non sunt co-

gnitæ. Palmaria methodus iterum circa idoneas substitutiones versatur, quarum primo quaedam tantum in casibus specialibus adhibendæ hic proponendæ; erunt sequentibus exemplis.

Si sit $dx\sqrt{aaxx + ay^3} = yydy$, poni debet $y^3 = azz$, ac fiet $dx\sqrt{aaxx + aazz} = \frac{2}{3}azdz$. Vel ponatur $\sqrt{aaxx + ay^3} = az$, erit $azdx = \frac{2}{3}azdz - \frac{2}{3}axdx$.

Si sit $z^3dz + \frac{zzdx}{\sqrt{a+x}} = dx$; pono $\sqrt{a+x} = t$, et proinde $a+x = tt$, et $z^3dz + 2zzdt = 2tdt$. Sit præterea $zz = y$, erit $\frac{1}{2}ydy + 2ydt = 2tdt$.

Si sit $(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \text{etc.}) dx + (kx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \text{etc.}) dy = 0$, vel $(ay + bxy^2 + cx^2y^3) dx + (kx + mx^2y + nx^3y^2 + \text{etc.}) dy = 0$, ubi dimensiones terminorum sunt in progressionem arithmetica;

poni debet $y = \frac{1}{z}$, quo facto habetur $(a + \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{z^2} + \frac{ex^3}{z^3} + \text{etc.}) dx - kx^2 + \frac{mx^3}{z} + \frac{nx^4}{z^2} + \text{etc.}) \frac{dz}{z^2} = 0$, et $(\frac{a}{z} + \frac{bx}{z^2} + \frac{cx^2}{z^3} + \text{etc.}) dx - (kx + \frac{mx^2}{z} + \frac{nx^3}{z^2} + \text{etc.}) \frac{dz}{z^2} = 0$. Atque si fuerit generatim $(ax^k + bz^r x^{k-1} + \text{etc.}) dx + (mx^k z^{r-1} + (nx^{k-1} z^{2r-1} + px^{k-2} z^{3r-1} + \text{etc.}) = 0$, ad obtinendam homogeneitatem poni debet $z = y^{\frac{1}{r}}$.

§. 457.

Possunt deinde quoque a priori istae functiones quaeri, quae loco x vel y substitutae æquationem reddunt homogeneam. Proposita sit æquatio hujusmodi $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^s dy = 0$; atque patet, æquationem homogeneam fore, si sit $n+m = q+p = r+s$. Sed hanc aequalitatem jam non supponimus. Sit

Sit itaque $y = z^t$, erit $dy = tz^{t-1}dz$; praeterea $y^r = z^{rt}$, $y^q = z^{qt}$, et facta substitutione habetur $az^{nt}x^m dx + bz^{qt}x^p dx + ctzx^{st+t-1}dz = 0$. Jam ad obtinendam homogeneitatem esse debet $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$. Ex harum aequationum priori fit $t = \frac{p-m}{n-q}$, quo valore in altera substituto fit $(s-q+1)(p-m) = p-r + 1)(n-q)$, quae ultima aequatio exprimit conditionem exponentium, sub qua possibile est, ut aequatio fiat homogenea. Si aequatio proposita quatuor constaret terminis, eodem modo concludendo invenirentur duae conditiones, sub quibus homogeneitas restitui possit. Pro quinque terminis invenirentur tres conditiones et sic porro.

§. 458.

Unicus casus particularis restat, nimirum iste, quo variables earumque differentialia primam dimensionem non excedunt, quique repraesentari potest sequente aequatione $axdx + bydx + cdx + gxdy + fdy + bdy = 0$, five $(ax + by + c)dx + (gx + fy + b)dy = 0$. Atque statim observo, in casu $b = g$, aequationem integrabilem esse. Tum enim eadem ad sequentem reducitur $\pm b(ydx + xdy) = -axdx - fdy - cdy - bdy$, cujus integralis est $\pm bxy + \frac{1}{2}axx + \frac{1}{2}fyy + cx + by + C = 0$. Ponamus itaque b in $= g$, atque hoc casu sit $x = z + r$, $y = u + s$, ubi r et s constantes denotent, erit $dx = dz$, atque $dy = du$. Substitutis his valoribus evadit

$$\begin{array}{ccc} az + ar & + & gz + gr \\ bu + bs & dz + & fu + fs du = 0 \\ + c & & + b \end{array}$$

quae aequatio esset homogenea, si $ar + bs + c = 0$, atque $gr + fs + b = 0$, ex quibus aequationibus, pro r et

s sequentes deducuntur valores $r = \frac{cf - bb}{gb - af}$, atque s

$= \frac{ab - cg}{gb - af}$. Si foret $cf = bh$, vel $ab = cg$; una tantum substitutione loco x vel y faciendae opus esset. Si vero simul $cf = bh$ et $ab = cg$, foret $g = \frac{ab}{c}$ et $f = \frac{bh}{c}$, unde ex æquatione proposita fit $(ax + by + c)dx + \left(\frac{ab}{c}x + \frac{bh}{c}y + b\right)dy = 0$ vel $(ax + by + c)dx + (ax + by + c)\frac{bdy}{c} = 0$, vel denique $(ax + by + c)\left(dx + \frac{bdy}{c}\right) = 0$. Unde concluditur $ax + by + c = 0$, vel $x + \frac{by}{c} + C = 0$, quae æquationes problemati satisfaciunt.

Quodsi denique foret $bg = af$, quo casu fiunt $r = \infty$ et $s = \infty$; esset $f = \frac{bg}{a}$, et proinde $(ax + bx + c)$

$dx + \left(gx + \frac{gby}{a} + b\right)dy = 0$. Ponatur $ax + by = z$,

erit $g = \frac{z - ax}{b}$, $dy = \frac{dz - adx}{b}$, quibus substitutis

habetur $z\left(dx + \frac{gdz}{ab} - \frac{gdx}{b}\right) + cdx + \frac{bdz}{b} -$

$\frac{abdx}{b} = 0$, vel $dx\left(z - \frac{g}{b}z + c - \frac{ab}{b}\right) + dz\left(\frac{g}{ab}$

$$z + \frac{b}{b} = 0, \text{ unde concluditur } dx =$$

$$\frac{dz \left(\frac{b}{b} + \frac{g}{ab} z \right)}{\frac{g}{b} z - z + \frac{ab}{b} - c}$$

§. 459.

Explicatae itaque sunt methodi ex conditionibus exponentium earum, ad quas variables in æquatione proposita elevatae sunt, dignitatum deducendi criteria integrabilitatis. Quia autem æquatio differentialis duarum variabilium quaecunque reduci potest ad formam $Pdx + Qdy = 0$; ex conditionibus quoque coefficientium P et Q criteria integrabilitatis concludi poterunt. Palmarium integrabilitatis criterium supra §. 434. jam demon-

stratum est. Ostendimus enim, si fuerit $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dx} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy}$;

propositæ æquationis integram in potestate esse. Præterea §. 440. occupati jam sumus in investigando factore μ , per quem multiplicari debet æquatio differentialis formæ

$Pdx + Qdy = 0$, ut fiat $\frac{y}{dy} \frac{dP}{dx} = \frac{x}{dx} \frac{dQ}{dy}$, si eadem prouti

proponitur hac proprietate destituta sit. Inventum porro est, quod resolutio hujus problematis generalis

pendeat ab integratione hujus æquationis $\frac{d\mu}{\mu} = - \frac{y}{P} \frac{dP}{dx}$

$- \frac{x}{Q} \frac{dQ}{dy}$, vel $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{y}{Qdy} \frac{dP}{dx} - \frac{x}{Q} \frac{dQ}{dy}$, quæ integratio

licet non semper in potestate sit, tamen eo casu tanta

non laborat difficultate, quo formula $\frac{\frac{y}{dPdx}}{Qdy} - \frac{\frac{x}{dQ}}{dQ}$ non nisi variabilem x involvit. Demonstravimus denique hanc conditionem locum habere, si P et Q ejusmodi habeant formas, ut sit $P = tY^r + s$, atque $Q = Yr$, ubi est Y functio ipsius y , $Y^r = \int Ydy$, t vero r et s sunt functiones ipsius x .

§. 460.

Secundum hæc integrabilis erit æquatio differentialis quæcunque duarum variabilium x et y , quæ tribus constat terminis, atque sub forma generali sequente comprehenditur: $AXy^n dy + BX^r y^{n+1} dx + Cyq X^{r+1} dx = 0$. Dividatur enim hæc æquatio primo per yq , ut fiat $AXy^{n-q} dy + BX^r y^{n+1-q} dx + CX^{r+1} dx = 0$. Ulterius per AX diviso æquatio sic reducitur $y^{n-q} dy + \frac{BX^r y^{n+1-q} dx}{AX}$

$+ \frac{CX^{r+1} dx}{AX} = 0$, ubi coefficientes ipsarum dx et y debitam habent formam. Quæraturn itaque μ ex formula

$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{y}{dPdx}}{Qdy} - \frac{\frac{x}{dQ}}{Q}$, quæ formula hoc casu a sola x

pendebit, ac invenietur $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(n-q+1) BX^r dx}{AX}$.

Est itaque $\mu = \int \frac{(n-q+1) BX^r dx}{AX}$, et capiendo nu-

meros habetur $\mu = e^{\int \frac{(n-q+1) BX^r dx}{AX}}$, posita e basi

logarithmica. Multiplicetur nunc æquatio proposita per

factorem μ , erit $\mu y^{n-q} dy + \left(\frac{\mu BX^r y^{n+1-q}}{AX} + \frac{\mu CX^{r+1}}{AX} \right) dx$

$dx = 0$. Integretur hæc æquatio secundum præcepta

§. 434 et invenitur primo $\int \mu y^{n-q+1} dy = \frac{\mu y^{n-q+1}}{n-q+1}$; deinde

$$\text{est } d\int \mu y^{n-q+1} dy = \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} d\mu = \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} \cdot \frac{\mu(n-q+1)BX^1 dx}{AX} \\ = \frac{\mu BX^1 y^{n-q+1}}{AX} dx, \text{ quod subtractum a termino}$$

$$\left(\frac{\mu BX^1 y^{n-q+1}}{AX} + \frac{\mu CX^{11}}{AX} \right) dx \text{ relinquit } \frac{\mu CX^{11} dx}{AX}.$$

$$\text{Est itaque integrale quæsitum } \frac{\mu y^{n-q+1}}{n-q+1} + \int \frac{C\mu X^{11} dx}{AX}$$

$\pm E = 0$. Quodsi valorem ipsius μ in hac æquatione

$$\text{integrata substituamus, fiet } \frac{y^{n-q+1}}{n-q+1} e^{\int \frac{(n-q+1)BX^1 dx}{AX}}$$

$$+ \int \frac{CX^{11} dx}{AX} e^{\int \frac{(n-q+1)BX^1 dx}{AX}} = \mp E, \text{ unde con-}$$

$$\text{cluditur } y^{n-q+1} = (n-q+1) \left(\mp E - \int \frac{CX^{11} dx}{AX} \right) \times$$

$$e^{\int (n-q+1) \frac{BX^1 dx}{AX}} e^{\int (-n+q-1) \frac{BX^1 dx}{AX}}, \text{ vel}$$

$$\text{denique } y = (n-q+1) \left(\mp E - \int \frac{CX^{11} dx}{AX} \right) e^{\int (n-q+1) \frac{BX^1 dx}{AX}}$$

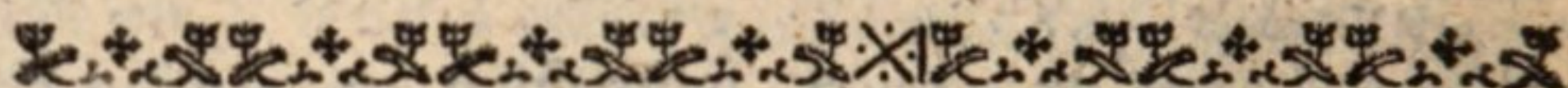
$$\frac{BX^1 dx}{AX} e^{\int (-n+q-1) \frac{BX^1 dx}{AX}} \Big)^{\frac{1}{n-q+1}}. \text{ Possunt igitur}$$

hac methodo semper variables a se invicem separari. Hoc unum præterea notari meretur, quod in casu quo $n-q+1=0$, methodus generalis adplicari posse non

videatur; sed hoc casu ob $n - q = -1$, æquatio pro-

posita sic mutatur $\Lambda \frac{dy}{y} + \frac{BX^1 dx}{X} + \frac{CX^{11} dx}{X} = 0$,

ubi variables per se jam separatae sunt.



SECTIO XXIX.

DE

INTEGRATIONE ÆQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SECVNDI ET ALTIO- RVM ORDINVM.

§. 461.

Formulas differentiales quae differentialia secunda involvunt, varias esse generis ex 418. lq. constat. Quædam tantum unam variabilem x cum suis differentialibus dx et ddx , quædam præterea aliam vel alias variables ut y , dy , ddy , z , dz , ddz , etc. involvunt. Si formula proposita præter constantes non contineat nisi y , dy , dx et ddx , atque variabilis x in eadem non insit, illud indicio est, hanc formulam ortam esse ex differentiatione ejusdam formulæ, quæ y et dx tanquam duas variables continet. Scripto igitur z loco dx et dz loco ddx , omnia hic adplicanda sunt, quæ supra de integratione functionum duas variables involventium sunt exposita. Hujus rei exemplum hoc erit. Sit $ddV = dydx + yddx$. Ponendo z loco dx et dz loco ddx habetur $zdy + ydz$, ejus integrale invenitur yz , proinde restituto valore dx pro z , habetur $dV = ydx$.

Pari ratione, si in formula quadam differentiali secundi ordinis tam ddx quam ddy inveniantur cum suis diffc.

differentialibus primis dx et dy ; ex illo concluditur, quod formula orta fit ex differentiatione cujusdam functionis, quæ dx et dy tanquam duas continet variables.

Talis formula est $dV = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$. Pono igitur

t loco dx , dt loco ddx , z loco dy , dz loco ddy , ut fiat $dV = \frac{zdt - tdz}{zz}$ cujus integrale invenitur $\frac{t}{z}$, et

restitutis dx et dy loco t et z , habetur $V = \frac{dx}{dy}$.

Ex his patet, quod in formulis quæ componuntur ex dx , ddx et constantibus solis, scripto t loco dx et dt loco ddx , formula convertatur in talem, cujus integratio pendet a methodis, quibus functionum unam tantum variabilem involventium reperiuntur integralia. Sic si proposita fuerit hujusmodi formula $ndx^{n-1}ddx$, scripto t loco dx et dt loco ddx habetur ejus integrale t^n , et restituto dx loco t , fit integrale quæsitum $= dx^n$.

§. 462.

Quando igitur in solutione problematis cujusdam pervenitur ad æquationem differentialem, quæ differentialibus secundis implicata est, ante omnia dispiciendum est, utrumne et in hisce casibus æquatio ita transformari queat, ut unum ejus membrum sit functio, quæ præter dx et ddx non nisi quantitates constantes; vel quoque præter constantes quoque y et dy ; vel denique præter constantes, dx et ddx , quoque dy et ddy complectatur; quo casu alterum membrum vel similem habere poterit formam, vel etiam functio solius x per dx , vel solius y per dy multiplicata esse potest, vel quoque formula differentialis utramque variabilem x et y involvens forma $Pdx + Qdy$. In omnibus hisce casibus integrale æquationis in potestate est: ubi tamen id præterea notandum

dum venit, quod in ejusmodi æquationibus differentia-
libus secundi ordinis quovis fere casu habeatur differen-
tiale primum quoddam constans, quod igitur in integra-
tionis negotio non nisi alia constans finita consideran-
dum est.

Sit igitur proposita hæc æquatio differentio-diffe-
rentialis $\frac{by^m dy du}{cm} = 2ayddx + adxdy$, ubi du est $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et $d du = 0$, seu du constans. Quodsi hic membrum
secundum separatim considero, quia prius per se integrabi-
le est, observo hanc formulam $2ayddx + adxdy$, scripto t
loco dx et dt loco ddx fieri $2aydtdt + atdy$, quae quidem
functio per se non est integrabilis. Inveniretur quidem
factor t ex §. 441. per quem multiplicata integrale sumi
posset, sed ad æqualitatem conservandam etiam prius
membrum per t esset multiplicandum, tum vero inte-
grale non posset capi. Divisa autem formula $2aydtdt + atdy$
per 2, ut prodeat $aydtdt + \frac{1}{2}atdy$, factor, per quem
multiplicata integrabilis evadit ex §. 441. invenitur $y^{-\frac{1}{2}}$,
per quem si quoque prius membrum multiplicetur et si-
mul per 2 ad æqualitatem conservandam dividatur; in-
tegrabilitas non tollitur. Proinde multiplico integram
æquationem propositam per $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, ut prodeat

$$\frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy du}{2cm} = ay^{\frac{1}{2}} ddx + \frac{1}{2}adxy^{-\frac{1}{2}} dy, \text{ cujus inte-}$$

$$\text{gralis igitur erit } \frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{2(m+\frac{1}{2})cm} = ay^{\frac{1}{2}} dx + Cdu.$$

Proposita jam sit hæc æquatio $Y = \frac{dx^2 - yddy}{y^3 dx^2}$,
in qua Y repræsentat functionem quamcunque ipsius y ,
differentiale vero ydx constans est. Observo hanc æqua-
tio-

tionem ita quoque exprimi posse $Y = \frac{dx^2}{y^3 dx^2} - \frac{y ddy}{y^3 dx^2} = \frac{1}{y^3} - \frac{ddy}{yy dx^2}$. Primum hujus æquationis membrum Y , ut et primum secundi membri terminum $\frac{1}{y^3}$ observo fieri differentiale unius variabilis y , si per dy multiplicetur. Tum vero ad aequalitatem conservandam etiam secundus posterioris membri terminus per dy multiplicandus erit, qui tum evadit $dy ddy$, et simul ob denominatorem $yy dx^2$ constantem fit integrabilis. Multiplicatione igitur per dy instituta fit $Y dy = \frac{dy}{y^3} - \frac{dy ddy}{yy dx^2}$, cujus integrale est $\int Y dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yy dx^2} + C$. Poterat quoque æquatio differentialis per $2dy$ multiplicari atque tum integrale sumi, quod eodem redit.

§. 463.

Quodsi praeter differentiale primum et secundum variabilis cujusdam ut dx et $d dx$, non vero x , occurrat alterius variabilis y quadratum yy , vel cubus y^3 vel alia potestas quaecunque y^n , dispiciendum est, utrumne et hujus potestatis differentiale ut $2y dy$, $3y^2 dy$, vel generaliter $ny^{n-1} dy$ in eadem habeatur. Tum enim posito z loco y^2 vel y^3 , vel generaliter loco y^n , et dz loco $2y dy$, vel $3y^2 dy$, vel $ny^{n-1} dy$, reliquis ut ante peractis; integrale quaesitum invenietur. Idem observandum est, si dx^n cum suo differentiali $n dx^{n-1} d dx$ in formula adsit. Sic

proposita formula differentiali $\frac{2yy dxd dx - 2y ddy dx^2}{y^4}$ scripto z loco yy , dz loco $2y dy$, et loco dx^2 et dz loco $2dxd dx$, forma-

formula sic mutatur $\frac{zdt - tdz}{zz}$, cujus integrale est $\frac{t}{z}$,
et restitutis valoribus dx^2 pro t et yy pro z habetur in-
tegrale quæsitum $\frac{dx^2}{yy}$. Pari ratione, si fuerit propo-
sita formula $\frac{2ydydx^2 - 2yydxddx}{y^4}$, ejus integrale in-
veniretur $= -\frac{dx^2}{yy}$. Quoties igitur proposita sit æ-
quatio differentialis, quadratum, cubum, vel potesta-
tem quamcunque unius variabilis ut y^n et præterea dy
involvens, vel solum ddy eo dispiciendum est, ut talis
æquationi induatur forma, qua si pro y^n ponatur z , et
 dz pro $n y^{n-1} dy$, et si ddy occurrat, posito t pro dy^n et dt
pro $n dy^{n-1} ddy$ æquatio mutetur in differentialem primi
ordinis, quam integrare novimus.

Sit proposita æquatio $Y = \frac{du^2 - yddy}{y^3 dx^2}$, in qua Y
est functio quaecunque ipsius y , du differentiale arcus
curvae $= r(dx^2 + dy^2)$, et dx differentiale constans.
Substituto igitur pro du valore $r(dx^2 + dy^2)$ fiet $Y =$
 $\frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^3 dx^2}$. Quodsi haec æquatio multipli-
cetur per $2ydy$, ut habeatur $2yYdy =$
 $\frac{2ydy(dx^2 + dy^2) - 2yydyddy}{y^3 dx^2}$; quodsi deinde, quia
 $dx^2 + dy^2 = du^2$ et dx constans, ponatur $2dyddy = 2duddu$,
fiet $2yYdy = \frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^4 dx^2}$, cujus integrale in-
venitur $\int 2yYdy = \frac{du^2}{yydx^2} + C.$

§. 464.

Possunt quoque ejusmodi propositae esse formulae differentio-differentiales, quae naturam differentialium trium vel plurium induunt variabilium, si loco differentialis cujusdam littera quaedam ut z , et loco differentio-differentialis ejusdem dz ponatur, quae tum, si integrabiles sint, integrantur secundum §. 434. Talis est haec

formula
$$\frac{2ydydx^2du^2 + 2y^2du^2dxddx - 2yydx^2duddu}{y^4dx^4}.$$

Observo hic primo quadratum yy et ejus differentiale $2ydy$, deinde quadratum dx^2 et differentiale ipsius $2dxddx$, tandem et quadratum du^2 et ejus differentiale $2duddu$. Pono igitur $yy = s$, $2ydy = ds$, $dx^2 = t$, $2dxddx = dt$, $du^2 = z$, et $2duddu = dz$, quibus substitutis formula sic

mutatur
$$\frac{t z ds + s z dt - s t dz}{s s t t}.$$
 Integratione igitur secun-

dum §. cit. peracta fit integrale $= - \frac{z}{s t} + C$, et restitutis valoribus pro z , s , t , fit integrale quaesitum $= - \frac{du^2}{y^2 dx^2} + C$. Similibus igitur substitutionibus factis,

postquam aequationes differentio-differentiales, ad quas problemata solvenda deducunt, ita sunt transformata ut ejusmodi substitutiones patiantur, aliis regulis integrandi aequationes differentio-differentiales non opus est, nisi iis, quae supra pro integrandis aequationibus differentialibus primi gradus sunt explicatae. Proinde hic quoque ea sunt applicanda, quae supra de criteriis integrabilitatis sunt exposita, et de methodis inveniendi factorem, per quem multiplicari debet functio proposita, ut integrabilis evadat, si prouti proposita est integrabilis esse non inveniatur. Omnia igitur in hoc negotio eo redeunt, ut proposita aequatio differentio-differentialis per idoneam transformationem eo reducatur, ut regulae supra expo-

expositae ad eandem possint applicari; quae ipsae transformationes quoad magnam partem ingenio illius sunt relinquendae, qui problema solvere suscipit, cum certae regulae hic quoque tradi nequeant. Adponamus adhuc unicum exemplum, in quo transformatio instituenta aliqua ratione differt ab iis, quae in praecedentibus exemplis fuerunt susceptae. Aequatio proposita sit se-

quens $\frac{ydx - xdy}{dt} = 0$, in qua dt ponitur constans.

Observo, quod scripto ds loco ddx , primus terminus numeratoris ydx fiat yds , cui si addatur sdy , fiet $yds + sdy$ differentiale ipsius ys , seu restitutis valoribus dx et ddx pro s et ds fiet $ydx + dydx$ differentiale ipsius

ydx . Tribuo igitur aequationi hanc formam $\frac{ydx}{dt} =$

$\frac{xddy}{dt}$, et addo utrinque $\frac{dydx}{dt}$, ut fiat $\frac{ydx + dydx}{dt} =$
 $\frac{xddy + dydx}{dt}$, atque utrumque membrum simul inte-

grabile redditur. Fiet enim $\frac{ydx}{dt} = \frac{x dy}{dt}$, seu

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = C.$$

§. 456.

Supra §. 425. explicavimus modum, quo expressio differentialis quaecunque, in qua differentiale quodpiam constans est positum, transmutari possit in aliam formam, in qua aliud differentiale constans assumitur. Insignem haec methodus habet usum in integrandis aequationibus differentio-differentialibus. Saepe enim aequationis propositae integrale inveniri fere nequit, nisi eadem transformetur in aliam formam, in qua aliud quoddam differentiale constans assumtum est. Generale quidem criterium indicari nequit, ut in quovis casu illud

illud differentiale distinguatur a reliquis, quod constans assumi debet, ut integrationis negotium facilius absolvi queat. Interim complures occurrunt casus, in quibus haud parum utilitatis habet observatio, quae sequitur. Aequatione ad eam formam reducta, qua nullum differentiale ponitur constans inquiratur, utrumne in aequatione proposita duo, vel tres, vel plures occurrant termini, qui si per communem factorem, vel divisorem, multiplicentur, vel dividantur, evadant integrabiles. Quaeratur hoc integrale, quod erit differentiale constans assumendum. Proposita sit æquatio $X =$

$$\frac{dy^3 + dx^2dy - xdyddx + xdxddy}{2x^3dy^3} \text{ reducta ad formam}$$

in qua nullum differentiale constans est. Observo, quod duo termini $dx^2dy + xdxddy$, si per dx dividantur, ut habeatur $xdy + xddy$, integrale habeant xdy . Pono igitur xdy constans, ut sit $xddy + dxdy = 0$, et proinde quoque $xdxddy + dydx^2 = 0$, ex quo supposito fiet $X =$

$$\frac{dy^3 - xdyddx}{2x^3dy^3} = \frac{1}{2x^3} - \frac{ddx}{2xxdy^2}.$$

Singuli hujus aequationis termini integrabiles evadunt, multiplicatione

per dx facta. Tum enim habetur $Xdx = \frac{dx}{2x^3} -$

$$\frac{dxddx}{2xxdy^2}, \text{ cujus integralis est } \int Xdx = \frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2}$$

+ C, quia xdy est constans. Ad idem integrale etiam sic pervenitur. Observo, quod termini $dx^2dy - xdyddx$ divisi per

$$-xxdy \text{ transformentur in } \frac{-dx^2 + xddx}{xx}, \text{ cujus formulæ}$$

$$\text{integrale est } \frac{dx}{x}. \text{ Posito igitur } \frac{dx}{x} \text{ constante fiet } \frac{xddx - dx^2}{xx}$$

$$= 0, \text{ et multiplicando per } -xxdy, \text{ evadit } -xdyddx + dx^2dy = 0.$$

Sublatis igitur terminis hisce ex æquatione

proposita ea in hanc transformatur $X = \frac{dy^3 + xdxddy}{2x^3dy^3}$

$= \frac{1}{2x^3} + \frac{dxddy}{2x^2dy^3}$. Quodsi hæc æquatio multiplicetur

per dx , ut fiat $Xdx = \frac{dx}{2x^3} + \frac{dx^2ddy}{2x^2dy^3}$, quia $\frac{dx}{x}$, et

proinde quoque $\frac{dx^2}{xx}$ est quantitas constans, fiet $\int Xdx$

$= -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4x^2dy^2} + C$, prorsus ut ante.

Si integranda proposita sit hæc æquatio $xy(dxddy - dyddx) = ydydx^2 - yydYdy^2 - xdx dy^2$, ubi Y repræsentat functionem quamcunque ipsius y , et nullum differentiale constans est; in hac æquatione adsunt tres termini $yx dyddx + ydydx^2 - xdx dy^2$, qui divisi per $yydy$, dabunt differentiale completum $\frac{yxddx + ydx^2 - xdx dy}{yy}$,

eius integrale est $\frac{xdx}{y}$. Statuo igitur $\frac{xdx}{y}$ constans, ex

quo fit $\frac{xyddx + ydx^2 - xdx dy}{yy} = 0$, et proinde æ-

quatio data transformatur in sequentem $xydxddy = -yydYdy^2$, ex quo concluditur $dY = \frac{xdxddy}{ydy^2}$. Quia

igitur $\frac{xdx}{y}$ est constans, fiet $Y = \frac{xdx}{ydy} + C$.

§. 466.

Ad ejusmodi æquationes differentiales deducit solutio problematum sequentium, quae adjungenda esse arbitramur, quo ea quæ de ejusmodi æquationibus exposita atque adhuc exponenda sunt, eo melius intelligantur.

Quae-

Quaeritur natura curvae AM ejus proprietatis, ut F.296. quadratum subtangentis PT fit ad quadratum applicatae PM ut constans E ad arcum AM. Positis AP = x, PM = y, AM = s, quia est PT = $\frac{ydx}{dy}$, erit $\frac{yydx^2}{dy^2} : yy = a : s$, proinde $dx^2 : dy^2 = a : s$, et $s = \frac{ady^2}{dx^2}$. Po-

sito nunc dx constante habetur $ds = \frac{2adyddy}{dx^2} = r(dx^2$

+ dy²), proinde $\frac{2adyddy}{r(dx^2 + dy^2)} = dx^2$, cujus æquatio-

nis differentio differentialis integrale cum dx fit constans facile haberi potest. Est enim primo $\int dx^2 = xdx$. Deinde posito $(dx^2 + dy^2) = z$ fiet $2dyddy = dz$, et $2adyddy =$

adz. His valoribus substitutis ex formula $\frac{2adyddy}{r(dx^2 + dy^2)}$

= $2adyddy (dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$ fiet $az^{-\frac{1}{2}}dz$, cujus inte-

grale erit $\frac{1}{2} az^{\frac{1}{2}}$, proinde restituto valore ipsius z, in-

venitur $2ar(dx^2 + dy^2) = xdx$. Ut construi possit hæc æquatio, separandæ sunt variables, quod in hac æqua-

tione facile succedit. Fiet enim $4aa dx^2 + 4aady^2 =$

$xxdx^2$, et $4aady^2 = xxdx^2 - 4aadx^2 = (xx - 4aa)dx^2$,

tandemque $2ady = dxr(xx - 4aa)$, ex qua æquatione

curva sic construitur. Ductis normalibus FB, AC, sum-

toque BA = 2a, centro A et vertice B describatur hy-

perbola æquilatera BD, ducaturque AG ipsi BF paralle-

la, erit, sumto rectangulo AH æquali spatio hyperbo-

lico BDI, punctum occurfus E in curva quæsitæ.

Quæritur curva AC ejus proprietatis, ut fit appli- F.296.

cata BC ad subtangentem, ut quadratum constantis E

ad aream ACFD, ita ut sit AD = E. Pono AB = x,

BC = y, ACFD = s E = AD = a, erit per conditiones

problematis $y : \frac{ydx}{dy} = aa : s$, vel $dy : dx = aa : s$, proinde $sdy = aadx$, et sumtis differentialibus, posito dy constante, $dsdy = aaddx$. Est vero $s = ACB + (a - x)y = ACB + ay - xy$, proinde $ds = ydx + ady - xdy - ydx = ady - xdy$; quo valore pro ds substituto fit $ady^2 - xdy^2 = aaddx$. Quia in hac æquatione dy^2 est quantitas constans, singuli termini integrabiles evadunt, si per dx multiplicentur, quo facto habetur $adx dy^2 - xdx dy^2 = aadx dx$, et sumtis integralibus $ax dy^2 - \frac{1}{2}xx dy^2 = \frac{1}{2}aadx^2$, vel $2ax dy^2 - xx dy^2 = aadx^2$; atque hæc æquatio mutatur in sequentem: $dy^2 = \frac{aadx^2}{2ax - xx}$.

vel $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, cujus æquationis constructionem dedimus in §. 452.

§. 467.

F.296. Quaerenda jam sit natura curvae AC, in qua positis $AB = x$, $BC = y$, $AC = s$, $E = a$, fit $adsddx = dy^3$, et differentiale ds constans. Quia $ds^2 = dx^2 + dy^2$, et

proinde $dx = \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$, erit $ddx = -\frac{dyddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$,

et substituto hoc valore pro ddx , habetur $dy^3 = -$

$\frac{adsdyddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$, vel $dy^2 = -\frac{adsddy}{\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$. Neutrius

membri in hac æquatione sumi potest integrale; quod si vero utrumque per dy^2 dividatur, tumque per ds

multiplicetur, ut prodeat $ds = -\frac{ads^2ddy}{dy^2 \sqrt{(ds^2 - dy^2)}}$,

integrale in potestate est. Posito enim z loco dy , ha-

bemus $ds = -\frac{ads^2dz}{z\sqrt{(ds^2 - zz)}}$, cujus integrale per re-

gulam

gulam §. 375. traditam invenitur $s = \frac{ads^2 \sqrt{(ds^2 - 2z)}}{ds^2 z}$,

et restituto dy pro z habetur $s = \frac{ads^2 \sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds^2 dy} =$

$\frac{a \sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{dy}$, proinde $sdy = a \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$, $ssdy^2$

$= aa(ds^2 - dy^2)$, $ssdy^2 + aady^2 = aads^2$, $ssdy^2 + aady^2$

$= aadx^2 + aady^2$, hincque $ssdy^2 = aadx^2$. Quo hic

littera s tolli possit, id quod semper necesse est, ad cur-

vae naturam determinandam, quæro valorem ipsius ds^2 ,

qui est $= dx^2 + dy^2$. Cum igitur ex æquatione inven-

ta fit $dy^2 = \frac{aady^2}{ss}$, hoc valore pro dy^2 substituto ha-

betur $ds^2 = dx^2 + \frac{aadx^2}{ss}$, et $ssds^2 = ssdx^2 + aadx^2$,

hincque $ds = \frac{dx \sqrt{(ss + aa)}}{s}$, et $dx = \frac{sds}{\sqrt{(ss + aa)}}$, hu-

jus æquationis integralis est $x = \sqrt{(ss + aa)}$, ex qua fit

$s = \sqrt{(xx - aa)}$, et hinc iterum $ds = \frac{xdx}{\sqrt{(xx - aa)}} =$

$\frac{xxdx^2}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Ex hac æquatione concluditur $\frac{xxdx^2}{xx - aa}$

$= dx^2 + dy^2$, $xxdx^2 = xxdx^2 = xxdx^2 + xxdy^2 - aadx^2$

$- aady^2$, proinde $xxdy^2 - aady^2 = aadx^2$ et $dy =$

$\frac{adxx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Eadem hæc æquatio etiam aliter et bre-

vius ex æquatione $ssdy^2 = aadx^2$ inveniri potest hoc

modo. Ex æquatione $ssdy^2 = aadx^2$ habetur $s =$

$\frac{adxx}{dy}$. Differentietur hæc æquatio posito dy constante,

et habetur $ds = \frac{adxx}{dy} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, hincque dy

$= \frac{adx}{r(dx^2 + dy^2)}$. Aequatio hæc ob dy constans integrabilis evadit, si multiplicetur per dx , quo facto fit

$dx dy = \frac{adx dx}{r(dx^2 + dy^2)}$, et sumtis integrabilibus $xdy =$

$ar(dx^2 + dy^2)$. Ex hac vero concluditur $xxdy^2 = aadx^2 + aady^2$, $(xx - aa)dy^2 = aadx^2$, et proinde $dy =$

$\frac{adx}{r(xx - aa)}$, ut ante. Construitur hæc æquatio supposita quadratura hyperbolæ. Multiplicata enim æquatione

per constantem a , ut prodeat $ady = \frac{aadx}{r(xx - aa)}$, primo

observandum est, quod, cum x inventum sit $= r(ss + aa)$, et ideo $x > s$, initium abscissarum non cadat in tale axis punctum, ubi idem a curva secatur. Posito enim

$s = 0$, fit $x = a$. Si itaque velimus, ut initium abscissarum sit tale axis punctum, ubi a curva secatur, loco x ponendum est $x + a$, et mutabitur æquatio $ady =$

r.300. $\frac{aadx}{r(xx - aa)}$ in hanc $ady = \frac{aadx}{r(2ax + xx)}$. Ductis

nunc normalibus AK, GH, sese secantibus in B, sumatur $BA = a$, et vertice B centroque A describatur hyperbola æquilatera BC. Ducatur recta AC et duplæ areae hyperbolicae ABC sumatur rectangulum AG æquale: erit productis CK et FG, punctum E in curva quæsitæ.

§. 468.

Prouti formularum differentialium, quæ differentialia secunda involvunt, integratio pendet a methodis, quibus differentialia prima integrantur: ita quoque formularum differentialium, quæ differentialia tertia et altiora involvunt, integrationem ab iisdem methodis pendere facile ostenditur. Ratiociniis enim hic opus est similibus iis, quibus initio hujus Sectionis usi sumus.

Ad-

Adplicemus eadem ad ejusmodi formulas, quæ differentialia tertia involvunt, cum in resolutionibus problematum mathematicorum nunquam fere perveniatur ad æquationes differentiales, quæ differentialibus quartis vel altioribus implicantur; atque si ejusmodi æquationes occurrerent, a similibus principiis earundem integratio penderet. Primo igitur patet, quod proposita functione ipsius ddx per d^3x multiplicata, in qua differentiale ddx cum meris constantibus quomodocunque combinatum est, scripto t loco ddx et dt loco d^3x , formula differentialis proposita induat formam differentialis unius variabilis, cujus integratio proinde a methodis pendeat, quibus formulæ differentiales unius variabilis integrantur. Sic si proposita fuerit formula $addx^n d^3x$, scripto t loco ddx et dt loco d^3x habetur $a^n dt$, cujus integrale est $\frac{at^{n+1}}{n+1}$ et restituto ddx loco

x , fit $\frac{addx^{n+1}}{n+1}$ integrale ipsius $addx^n d^3x$. Si præter

ddx et d^3x adfuerit x et dx , atque formula proposita reduci queat ad talem formam $Pdx + Qd^3x$, ubi P et Q sunt functiones ipsarum x et ddx , substitutis t loco ddx , dt loco d^3x , formula proposita induit formam differentialis duarum variabilium et proinde integratio peragitur secundum præcepta in §phis 434. sqq. exposita. Quodsi in æquatione quadam differentiali occurrat hæc expressio $xd^3x + ndx ddx$, quæ sub forma $Pdx + Qdy$ comprehenditur scripto dy loco d^3x et y loco ddx , hoc enim facto abit in $xdy + nydx$, ejus integrale per se non invenitur, ut patet ex §. 417. Multiplicata vero eadem formula per x^{n-1} , qui factor ex §. 441. determinatur, ut habeatur $x^n dy + nyx^{n-1}dx$, ejus integrale est $x^n y$. Proinde restituto valore ddx pro y , si æqualitate servata $xd^3x + ndx ddx$ multiplicari possit per x^{n-1} , integrale ipsius $x^n d^3x + nx^{n-1}dx ddx$ fit $x^n ddx$. Per

hæc ideo integrabitur æquatio $Xdx = \frac{xd^3x + ndxd^2x}{du^2}$,

in qua du est constans positum et X est functio ipsius x . Multiplicata enim æquatione per x^{n-1} , ut prodeat

$$x^{n-1}Xdx = \frac{x^n d^3x + nx^{n-1}dxd^2x}{du^2} \text{ habetur } \int x^{n-1}Xdx$$

$$= \frac{x^n ddx}{du^2} + C.$$

§. 469.

Ex his simul patet, quomodo operandum sit, si præter ddx et d^3x etiam y et dy , vel dy et ddy vel ddy et d^3y in formula proposita deprehendatur. Proposita

fit hæc expressio, $\frac{3dyddy\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dxddy} - \frac{d^3y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy^2}$,

in qua dx supponitur constans. Observo quod $2dyddy$ fit differentiale ipsius $dx^2 + dy^2$. Proinde pono $dx^2 + dy^2 = z$, ut fiat $2dyddy = dz$, $dyddy = \frac{1}{2}dz$, et

$$3dyddy = \frac{3}{2}dz. \text{ Hoc substituto habetur } \frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{2dxddy}$$

$$- \frac{d^3y z^{\frac{3}{2}}}{dxddy^2}.$$

Observo præterea, quod in hac expressione inveniatur ddy et d^3y . Quia igitur dx est constans, si poneretur $dxddy = u$, foret $du = dx dy^3$, et $dy^3 =$

$$\frac{du}{dx}.$$

Substitutis hisce, habetur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{zu} - \frac{duz^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$,

$$\text{vel } \frac{3z^{\frac{1}{2}}dz}{2u} - \frac{z^{\frac{3}{2}}du}{uz}, \text{ quia } dxddy = u. \text{ Integrale hujus}$$

$$\text{formulæ ex §. 434. habetur } = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{u}, \text{ et restitutis } dx^2$$

+

+ dy^2 pro z et $dxddy$ pro u , integrale quæsitum est

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxddy}$$

§. 470.

Quando in solutione problematis ad æquationem quandam differentialibus secundis et tertiis implicatam pervenitur, raro integrabilis est æquatio sub ea forma, sub qua eruitur. Tum igitur æquatio transformanda, atque sic ex utraque parte disponenda est, ut simul ex utroque membro haberi possit integrale. Proposita sit

hæc æquatio $\frac{dyd^3x - dx d^3y}{du^3} = 0$, in qua du constans

est, ac primo exinde deduco $\frac{dyd^3x}{du^3} = \frac{dx d^3y}{du^3}$. Deinde

observo, quod posito dz loco dd^3x et s loco dy , primum membrum fiat $\frac{dsdz}{du^3}$, quod integrabile fit, addendo

ipfi $\frac{zds}{du^3}$, seu $\frac{ddxddy}{du^3}$. Potest vero expressio salva manente æquatione priori membro addi, si et posteriori

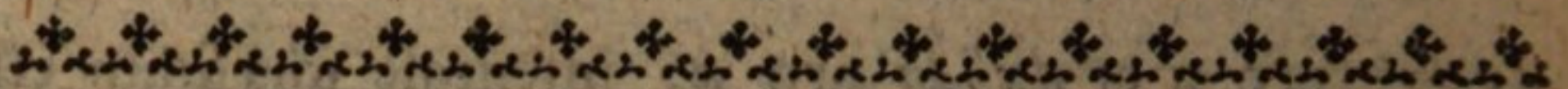
simul addatur, atque tum habetur $\frac{dyd^3x + ddxddy}{du^3}$

$= \frac{dx d^3y + ddxddy}{du^3}$. Statim vero patet, utrumque

membrum simul hoc facto integrabile fieri. Habetur

enim $\frac{dyd^3x}{du^3} = \frac{dxddy}{du^3}$, vel $\frac{dyd^3x - dxddy}{du^3} + C = 0$.

Caterum hic repetenda sunt omnia, quæ supra Sect. XXIV. de transformatione differentialium, et de usu harum transformationum in integrationis negotio sunt exposita, et de modo inveniendi illud differentiale, quod constans assummi debet, ut integratio eo faciliorevadat.



SECTIO XXX.

DE

METHODIS QVIBVSDAM INTEGRANDI,
QVAE AD AEQVATIONES DIFFERENTIA-
LES TAM PRIMI QVAM ALTIORVM
GRADVVM PARI CVM SVCCESSE
ADPLICANTVR.

§. 471.

Omnis æquatio differentialis primi gradus, in qua alterutra variabilium deficit, sequenti methodo integrabitur. Si deficiens variabilis sit x , ponatur $dx = \frac{zdy}{a}$: quo substituto in æquatione proposita loco dx , manifestum est, æquationem inde ortam divisibilem fore per aliquam potestatem ipsius dy , quae in omnibus terminis deprehendetur eadem, ita ut nullum amplius differentiale in æquatione habeatur. Unde inter z et y proveniet æquatio pure algebraica exprimens naturam alicujus curvæ pariter algebraicae, cujus abscissae y et spatia curvæ istis respondentia $\int zdy$ divisa per constantem a dabunt coordinatas curvæ quaesitae pro constructione æquationis differentialis propositae. Data sit æquatio

$$y^3 dx^3 + aaydx^4 dy = a^3 dy^5; \text{ dono } dx = \frac{zdy}{a}, \text{ quo va-}$$

$$\text{lore in æquatione surrogata habetur } \frac{y^3 z^3 dy^5}{a^5} + \frac{yz^4 dy^5}{aa} =$$

$$a^3 dy^5. \text{ Dividatur igitur haec æquatio per } dy^5, \text{ at-}$$

$$\text{que proveniet æquatio algebraica } \frac{y^3 z^3}{a^5} + \frac{yz^4}{aa} =$$

$$a^3,$$

a^3 , vel $y^3 z^5 \neq a^3 y z^4 = a^8$. Constructa igitur huic F.299.
 aequationi convenienter curva algebraica, in qua
 $HM = y$, et $MA = z$ fiat $MG =$ spatium AMH per
 constantem a diviso; vel simpliciter fiat MG ubique in
 ratione spatii AMH , erit punctum G in curva quaesita.
 Potest quoque ex aequatione inter y et z inventa elici
 valor pro dy , isque in aequatione $dx = \frac{zdy}{a}$ substitui,
 quo facto si resultet aequatio integrabilis, habetur non
 tantum aequatio finita inter y et z sed quoque inter x et
 z . Proinde elimina z si fieri potest, vel saltem ad com-
 munem abscissam constructis duabus curvis, quarum
 unius applicatae sint y alterius x , ad quamvis x habe-
 tur valor ipsius y proinde ipsa curva quaesita.

§. 472.

Hujus rei exemplum suppeditat ista aequatio $ydy^3 dx$
 $= adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$. Quia hic deficit variabi-
 lis x , pono $dx = \frac{zdy}{a}$, ex quo fit $\frac{2ydy^2}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^3}$
 $+ \frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, et dividendo per dy^4 habetur
 $\frac{2y}{a} = \frac{z^4}{a^3} + \frac{2zz}{a} + a$. Ex hac aequatione deducitur
 $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, et proinde $dy = \frac{3zzdz}{aa}$
 $+ 2dz - \frac{aadz}{zz}$, quo valore in aequatione $dx =$
 $\frac{zdy}{a}$ substituto habetur $dx = \frac{3z^3 dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$,
 et integrata hac aequatione fit $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - abz$
 $+ C$. Ex duabus hisce aequationibus curva sic constru-
 tur.

F.295. tur, Ducantur rectæ normaliter sese interfecantes AB, CL, atque ad axem AB construatur curva AC cujus æquatio est $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, atque ad alteram axis AB partem curva NLM, ex æquatione $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - alz + C$. Habentur ad quamvis $z = AP$ coordinatae curvae quaesitae $PS = x$, $PM = y$. Ducatur ideo SK ipsi AB parallela, et fiat $OK = PM$, cum ad quamvis $AO = PS = x$ habeatur $OK = PM = y$, erunt puncta K in curva quaesita.

§. 473.

Methodus hæc usum adeo generalem habet, ut applicari quoque possit ad æquationes differentiales altiorum ordinum. Ac primo quidem applicari potest ad æquationes differentiales ordinis secundi, si una variabilis deficiat, atque in æquatione non nisi ejus differentiale primum et secundum habeat locum. Cum in hujusmodi generis æquationibus in regula adsit unum differentiale constans; statim patet, si talis æquatio non continet nisi dy , ddy et dx constans, cum sit $\frac{dy}{dx} =$ variabili cuidam z , vel quod idem est $dy = zdx$, hincque $ddy = zdx$ introducendo hanc ipsam z , differentiale ddy tolli. Substituto enim dxz loco ddy manifestum est, æquationem inde ortam divisibilem fore per aliquam potestatem ipsius dx , quæ in omnibus terminis deprehendetur eadem, ita ut nullum amplius differentiale secundum in eadem deprehendatur, unde inter dz et dy invenietur æquatio differentialis primi ordinis. Sit proposita æquatio $aadxdy^2 = bdx^5 + cdx^2dy^3$, pono $dy = zdx$, atque æquatio transformabitur in hanc $aadz^2dx^2 = bdx^5 + cdx^2z^3dx^3$, vel $aadz^2 = bdx^2 + cz^3dx^2$, quæ est æquatio differentialis gradus primi in qua

x deficit, quæ igitur modo §. præcedente exposito con-
struitur. Posito enim $dx = u dz$, fiet $aa dz^2 = buu dz^2$
 $+ cz^3 u dz^2$, id est $aa = buu + cz^3 uu$, ex qua fit $z =$

$$\sqrt{\frac{3aa - buu}{cuu}} = \frac{(aa - buu)^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}}, \text{ atque } dz = -$$

$$\frac{\frac{2}{3} buu du (aa - buu)^{-\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}} - \frac{\frac{2}{3} c^{\frac{1}{3}} du}{u^{\frac{5}{3}}}, \text{ et } dx = -$$

$$\frac{\frac{2}{3} buu du (aa - buu)^{-\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}} - \frac{\frac{2}{3} c^{\frac{1}{3}} u du}{u^{\frac{5}{2}}}.$$

§. 474.

Succedit hæc methodus et in aliis æquationibus, ubi
quodcunque aliud differentiale est constans assumtum,
qualis est hæc æquatio $Yyy dy dx^2 + du du = 0$, ubi est
 Y functio ipsius y , $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, et differentia-
le $y dx$ constans, variabilis u vero deficit. Pono $du =$
 $z y dx$, ex quo fit $du = y dz dx$, et facta substitutione
data æquatio sic transformatur $Yyy dx^2 dy + z y y dx^2 dz =$
 0 , vel $Y dy = - z dz$. Hujus æquationis integralis est

$$\int Y dy = -\frac{1}{2} z z + C. \text{ Est vero } z z = \frac{du^2}{y y dx^2} =$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y y dx^2} = \frac{1}{y y} + \frac{dy^2}{y y dx^2}, \text{ proinde } \int Y dy = -$$

$$\frac{1}{2 y y} - \frac{dy^2}{2 y y dx^2} + C, \text{ ex qua reducta fit } 2 y y \int Y dy = -$$

$$1 - \frac{dy^2}{dx^2} + 2 C y y, \frac{dy^2}{dx^2} = 2 C y y - 1 - 2 y y \int Y dy \text{ et } \frac{dx^2}{dy^2}$$

$$= \frac{1}{2 C y y - 1 - 2 y y \int Y dy}, \text{ ideo } dx = \frac{dy}{\sqrt{2 C y y - 1 - 2 y y \int Y dy}}.$$

Simili ratione reducetur atque facta reductione integra-
bitur

bitur hæc æquatio $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{dudy}$, in qua
 $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ est constans. Posito $dx = zdu$, ut fiat
 $ddx = dzdu$, æquatio data in hanc transformatur $\frac{by^m}{c^m} =$
 $\frac{2aydzdy + azdudy}{dudy} = \frac{2aydz + azdy}{dy}$, vel $\frac{by^m dy}{-\frac{1}{2} c^m} =$
 $2aydz + azdy$. Multiplicata hac æquatione per $2y^{-\frac{1}{2}}$
 (conf. §. 441.) habemus $\frac{by^{m-\frac{1}{2}} dy}{2c^m} = ay^{-\frac{1}{2}} dz$
 $+ \frac{1}{2} azy^{-\frac{1}{2}} dy$, cujus integralis est $\frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+\frac{1}{2})c^m} = ay^{\frac{1}{2}}$
 $z + C$. Est vero $z = \frac{dx}{du}$, proinde $\frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{2(m+\frac{1}{2})c^m} = ay^{\frac{1}{2}}$
 $dx + Cdu$.

§. 475.

In æquatione $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 + ydu^2 ddx - ydxduddu$ nullum differentiale est constans suppositum, et Y est functio ipsius y . Cum igitur perinde sit, quodnam differentiale constans statuatur, ponamus primo dx esse constans, unde fit $Yy^3 dydx^3 = dxdydu^2 - ydxduddu$, vel $Yy^3 dydx^2 = dydu^2 - yduddu$. Pono jam $du = zdx$, et $ddu = dzdx$, fietque $Yy^3 dydx^2 = zzdydx^2 - yzdzdx^2$ et dividendo per dx^2 habetur $Yy^3 dy = zzdy - yzdz =$
 $\left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right) zzy$. Ad integrandam hanc æquatio-

nem pono $yt = z$, ut fiat $\frac{y}{z} = \frac{1}{t}$, et $l\frac{y}{z} = l\frac{1}{t}$.

Æquatio hæc differentiatâ dabit $\frac{zdy - ydz}{zz} : \frac{y}{z} =$
 $=$

$= -\frac{dt}{t} : \frac{1}{t}$, ex qua reducta habetur $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$
 $= -\frac{dt}{t}$. Surrogatis hisce valoribus in æquatione
 $Yy^3dy = zxdy - yzdz$, ea transmutabitur in sequen-
 tem $Yy^3dy = -\frac{dt}{t} y^3t^2$, vel $Ydy = -tdt$, cujus in-
 tegrale est $\int Ydy = -\frac{tt}{2} + C$, et posito iterum $\frac{du}{dx}$
 pro z , invenitur $\int Ydy = -\frac{du^2}{2yydx^2} + C$.

Quodsi non dx sed du assumpta fuisset constans,
 æquatio proposita transformata fuisset in sequentem:
 $Yy^3dydx^3 = dx dy du^2 + y du^2 ddx$. Posito igitur $dx =$
 zdu , et $ddx = dzdu$ habemus $Yy^3dyz^3du^3 = zdydu^3$
 $+ ydzdu^3$, vel $Ydy = \frac{zdy + ydz}{y^3z^3} = \frac{dy}{y^3z^2} + \frac{dz}{y^2z^3}$, cu-
 jus integrale est $\int Ydy = -\frac{1}{2y^2z^2} + C$, et restituto
 $\frac{dx}{du}$ pro z , quæsitum integrale hoc erit $\int ydy = -$
 $\frac{du^2}{2y^2dx^2} + C$, ut ante.

§. 476.

Quando in æquatione differentio-differentiali pro-
 posita utraque variabilis adsit, sæpenumero tolli possunt
 termini omnes, qui una earum afficiuntur, si æquatio
 reducta sit ad formam, ubi nullum differentiale constans
 ponitur, atque tum omnes termini ipsa x vel ipsa y af-
 fecti multiplicati sint per differentiale quoddam secun-
 dum. Sumta enim hoc casu illiusdifferentiali primo
 constante, termini isti tolluntur, atque isti tantum re-
 manent

manent, in quibus deprehenditur variabilis altera. Huc spectat ista æquatio $dx^2 - dx dy^2 = y dx ddx + 2x dy ddy$. Quod si in eadem dx sumatur constans, tollitur terminus $y dx ddx$, et cum eo variabilis y . Si vero dy statuatur constans, terminus $2x dy ddy$ et cum eo variabilis x tollitur. Sit igitur dx constans, et erit $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy ddy$. Pono $dy = \frac{p dx}{a}$ et proinde $ddy = \frac{dp dx}{a}$,

hisque substitutis habetur $dx^3 - \frac{p^2 dx^3}{aa} = \frac{2x p dp dx^2}{aa}$,

hincque concluditur $aa dx - p p dx = 2x p dp$, vel $\frac{dx}{x} =$

$\frac{2p dp}{aa - pp}$. Hac æquatione integrata reperitur $lx = -$

$l(aa - pp) + lC$, et $x = \frac{C dx^2}{aa dx^2 - aady^2}$, vel $aady^2 = aa dx^2 - \frac{C dx^2}{x}$. Sunt et alii casus, in quibus ex æ-

quatione proposita utramque variabilem involvente una earum tolli potest per idoneam substitutionem. Sic in æquatione $x^m ddx = y ddy + dy^2 + yy dy^2$ posito $y dy = dz$, unde fluit $y ddy + dy^2 = ddz$, et $yy dy^2 = dz^2$, habetur $x^m ddx = ddz + dz$.

§. 477.

Prouti hæc methodus se extendit ad æquationes differentiales secundi ordinis, ita quoque applicari potest ad æquationes differentiales tertii ordinis, si una variabilium x et y deficiat. Quin et accommodari posset ad æquationes differentiales quarti ordinis, si præter unam variabilium x et y , deficiat una differentialium primorum dx vel dy ; ad æquationes differentialis quinti ordinis si utraque x et y cum utroque differentiali dx et dy deficiat, ad æquationes differentiales sexti ordinis, si præter

præter hæc quoque unum differentialium secundorum ddx vel ddy absit, et ita porro. Si fuerit proposita hæc æquatio $dx d^3y + dx^2 ddy = dx^4 + dy^4$, in qua dx est constans. Pono $dy = \frac{pdx}{a}$, et proinde $ddy = \frac{dpdx}{a}$,

$d^3y = \frac{ddpdx}{a}$, quibus valoribus substitutis habetur

$$\frac{dx^2 ddp}{a} + \frac{dx^3 dp}{a} = dx^4 + \frac{p^4 dx^4}{a^4}, \text{ ex qua fit}$$

$$\frac{ddp + dx dp}{a} = dx^2 + \frac{p dx^2}{a^4}, \text{ quæ est æquatio diffe-}$$

rentialis secundi ordinis. Ponatur nunc $dp = \frac{qdx}{b}$,

hincque $\frac{dqdx}{b} = ddp$, et ultima æquatio inventa sic

$$\text{transformatur } \frac{dqdx}{ab} + \frac{dpdx}{a} = dx^2 + \frac{p^4 dx^2}{a^4},$$

$$\text{vel } \frac{dq}{ab} + \frac{dp}{a} = dx + \frac{p^4 dx}{a^4}. \text{ Est vero } dx =$$

$$\frac{bdp}{q}, \text{ proinde habetur } \frac{bdp + dq}{ab} = \frac{bdp}{q} + \frac{bp^4 dp}{a^4 q},$$

quæ est æquatio differentialis ordinis primi.

Sit proposita æquatio differentialis quarti ordinis $d^4y + dx d^3y - dx^2 ddy = 0$, in qua dx est constans, atque variables x, y , cum differentiali primo dy deficiunt. Pono itaque $\frac{pdx}{a} = dy$, erit $\frac{dpdx}{a} = ddy$,

$$\frac{ddpdx}{a} = d^3y, \frac{d^3pdx}{a} = d^4y. \text{ Substitutis his valori-}$$

bus habetur æquatio sic transformata $d^3p + dx ddp - dx^2 dp = 0$. Simili operatione repetita hæc quoque æquatio ad differentialem ordinis primi reducitur.

§. 478.

Sæpius in resolutione problematum ad ejusmodi æquationes perducimur, in quibus utraque quidem variabilis deprehenditur, quæ tamen in alias præcedentis formæ transformantur, si per naturam propositi problematis liceat, vel dx vel dy pro constante assumere, ubi id quidem differentiale constans est assumendum, quod sub hac hypothese efficit, ut omnes termini, in quibus una variabilium x vel y deprehenditur, evanescant. Hujus rei specimen exhibet ista æquatio $dx^3 - dx dy^2 = y dx dx + 2x dy dy$, ubi vel differentiale dx , vel dy constans assumere licet. Sub prima hypothese est $ddx = 0$, et proinde terminus $y dx dx$ tollitur. Sub altera hypothese ob $ddy = 0$ tollitur terminus $3x dy dy$. Sit itaque dx constans, ut fiat $dx^3 - dx dy^2 = 2x dy dy$. Pono dy

$$= \frac{p dx}{a}, \text{ erit } ddy = \frac{dp dx}{a}, \text{ et his valoribus substi-}$$

$$\text{tutis habetur } dx^3 - \frac{pp dx^3}{aa} = \frac{2x p dp dx^2}{aa}, \text{ vel } a dx$$

$$- pp dx = 2x p dp, \text{ atque } \frac{dx}{x} = \frac{2p dp}{aa - pp}. \text{ Cujus in-}$$

$$\text{tegralis est } lx = - \frac{l(aa - pp)}{C} + lC; \text{ proinde } x =$$

$$\frac{C}{aa - pp} = \frac{C}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}, \text{ unde concluditur } x =$$

$$\frac{C dx^2}{aadx^2 - aady^2}, \text{ vel } aady^2 = aadx^2 - \frac{C dx^2}{x}.$$

Interdum simplici substitutione æquationes differentiales, ubi utraque variabilis x et y deprehenditur, ad eum reducuntur casum, de quo hic sermo est. Sic proposita æquatione $x^m ddx = y ddy + dy^2 + yy dy^2$, si ponatur $y dy = dz$, unde fit $y ddy + dy^2 = ddz$, $yy dy^2 = dz^2$; habebitur æquatio sic transformata $x^m ddx =$
 ddz

$ddz + dz^2$. Sed his quoque generaliores methodi transformandi æquationes differentiales in tales, ubi una variabilis deficit, tribus potissimum casibus, qui sequuntur, in usum vocari possunt.

§. 479.

Primus casus is est, quo æquatio differentialis proposita duobus tantum terminis constat, atque sub ista formula generali comprehenditur $ax^m dx^p - y^n dy^{p-2} ddy = 0$ posito dx constante. Ponatur $x = e^{bu}$ et $y = e^u t$, ubi e denotat basin logarithmorum naturalium, b quantitatem constantem, u vero et t duas alias variables. Proinde ob $x = e^{bu}$ habetur $dx = be^{bu} du$, $d^2x = be^{bu} (ddu + bdu^2)$; atque ex $y = e^u t$ deducitur $dy = e^u dt + e^u t du$, $d^2y = e^u (ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu)$. Quia vero dx constans ponitur, erit $be^{bu} (ddu + bdu^2) = 0$, quare est $d^2u = -bdu^2$, quo valore substituto fit $d^2y = e^u (ddt + 2dtdu + (1-b)tdu^2)$. Quodsi jam in æquatione proposita assumi valores ipsarum x , y , etc. substituantur; eadem in sequentem transformabitur $ae^{bmu} b^p e^{bp} du^p = e^{nu} t^n (e^u dt + e^u t du)^{p-2} (ddt + 2dtdu + (1-b)tdu^2)$, vel $ae^{(m+p)b} u^p du^p = e^{(n+p-1)u} t^n (dt + t du)^{p-2} (ddt + 2dtdu + (1-b)tdu^2)$. Jam negotium omne eo redit, ut constans b determinetur sic, ut quanta exponentialia ex calculo excedant. Eum vero in finem poni debet $n+p-1 = bm + bp$, unde concluditur

$$b = \frac{n+p-1}{m+p}, \text{ quo substituto sequentem habemus æqua-}$$

$$\text{tionem transformatam } a \left(\frac{(n+p-1)^p du^p}{(m+p)^p} \right) = t^n (dt$$

$$+ t du)^{p-2} (ddt + 2dtdu + \left(\frac{m-n+1}{m+p} \right) tdu^2), \text{ in qua}$$

variabilis t tantum deprehenditur, altera u deficiente.

$$\text{Quia est } b = \frac{n+p-1}{m+p}; \text{ patet, ad transformandam æqua-}$$

tionem poni debere $x = e^{\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)u}$ et $y = e^u t$, ubi observandum est $n+p-1$ esse summam dimensionum ipsarum y , dy et ddy , $m+p$ vero summam dimensionum ipsarum x et dx .

§. 480.

Adplicemus nunc ad æquationem transformatam eam quæ §. 471. explicata est methodum. Poni itaque debet $du = zdt$, ut fit $ddu = dzdt + zddt$. Erat vero ob dx constans $ddu = -bdu^2$. Substitutis itaque valo-

ribus ipsarum b et du fit $ddu = \frac{1-n-p}{m+p} z z dt^2$. Pro-

inde $\frac{1-n-p}{m+p} z z dt^2 = zddt + dzdt$, unde concludi-

tur $ddt = \frac{1-n-p}{m+p} z dt^2 - \frac{dtdz}{z}$. His valoribus ip-

sarum du et ddt in æquatione transformatà §. præc. sub-

stitutis invenitur $a \left(\frac{n+p-1}{m+1}\right)^p az^p dt^p = t^n (dt +$

$ztdt)^{p-2} \times \left(\frac{1-n-p}{m+p}\right) z dt^2 - \frac{dtdz}{z} + 2zdt^2 +$

$\frac{m-n+1}{m+p} z z t dt^2$), vel, per dt^{p-1} utrinque dividendo

atque per z multiplicando invenitur $\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^{p+1}$

$dt = t^n \left((1 + tz)^{p-2} \frac{1+2m-n+p}{m+p} z z dt + \frac{m-n+1}{m+p}$

$tz^3 dt - dz \right)$, quæ est æquatio differentialis ordinis pri-

mi. Hypothesis $du = zdt$, et valor inventus b

=

$= \frac{n+p-1}{m+p}$ docent, quod ad æquationem expedite

transformandam poni debeat $x = e^{\frac{n+p-1}{m+1} \int z dt}$, $y = e^{\int z dt} t$, vel, quod eodem redit $x = e^{(n+p-1) \int z dt}$ et $y = e^{(m+p) \int z dt} t$. Tum vero ex æquatione $x = e^{(n+p-1) \int z dt}$

fluit $e^{\int z dt} = x^{\frac{1}{n+p-1}}$, et $\int z dt = \frac{1}{n+p-1} \log x$, ob $le = 1$.

Ideo $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$. Deinde ex æquatione $y = e^{(m+p) \int z dt} t$ concluditur $\log y = (m+p) \int z dt + \log t$. Substi-

tuto itaque valore ipsius $\int z dt$, erit $\log y = \frac{m+p}{n+p-1} \log x +$

$\log t$, et proinde $y = x^{\frac{m+p}{n+p-1}} t$, atque $t = y x^{\frac{-m-p}{n+p-1}}$. Est

itaque $dt = x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \frac{m+p}{n+p-1} y x^{-\frac{m+p}{n+p-1}} dx$.

Hoc autem valore in æquatione $z dt = \frac{dx}{(n+p-1)x}$ sub-

stituto fiet $z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dy - \frac{m+p}{n+p-1} y z x^{\frac{-m-p}{n+p-1}} dx =$

$\frac{dx}{(n+p-1)x}$, unde concluditur $z =$

$\frac{dx}{(n+p-1)x^{\frac{n-m-1}{n+p-1}} dy - (m+p) y x^{\frac{m-3p}{n+p-1}} dx}$. Da-

ta igitur æquatione inter z et t simul habetur relatio variabilium x et y .

§. 481.

Pervenimus ad *casum secundum*, qui locum obtinet, quoties variables x et y cum suis differentialibus eundem habent numerum dimensionum in quovis æquationis termino, quemque casum ista formula generalis representare potest, $ax^m y^{m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$. Constat quidem hæc formula tribus tantum terminis, potest autem methodus ad æquationes plurium terminorum facili negotio extendi. Differentiale dx hic iterum constans ponitur. Sit itaque $x = e^u$, $y = e^u t$, erit $dx = e^u du$, et $e^u ddu + e^u du^2 = 0$, ob dx constans. Proinde $ddu = -du^2$. Præterea est $dy = e^u dt + e^u t du$, $ddy = e^u (ddt + 2dudt + tdu^2 + tddu)$, vel $ddy = e^u (ddt + 2dudt)$, ob $ddu = -du^2$. Substitutis his valoribus in formula proposita, prodit $ddt + 2dudt = at^{m-1} du^p (dt + tdu)^{2-p} + bt^{n-1} du^q (dt + tdu)^{2-q}$, ubi variabilis t sola deprehenditur. Sit itaque $du = zdt$, unde fit $ddu = dzdt + zddt$. Sed $ddu = -du^2 = -zzdt^2$, proinde $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$, unde sequens concluditur æquatio $at^{m-1} z^p dt^p (dt + zt dt)^{2-p} + bt^{n-1} z^q dt^q (dt + zt dt)^{2-q} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2$, vel $at^{m-1} a^p dt (1 + zt)^{2-p} + bt^{n-1} z^q dt \propto (1 + zt)^{2-q} = -\frac{dz}{z} + zdt$, quæ est differentialis primi ordinis. Ex his concluditur, quod proposita æquatio expedite ad differentialem primi ordinis reduci queat, si ponatur $x = e^{szdt}$ atque $y = e^{szdt} t$, ex quibus æquationibus concluditur $dx = e^{szdt} zdt$ et $dy = e^{szdt} dt + e^{szdt} zt dt$. Præterea $zddt + dzdt + zzdt^2 = 0$, ob $ddx = 0$, et $ddt = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$, unde concluditur $ddy = e^{szdt} (zdt^2 - \frac{dzdt}{z})$.

§. 482.

§. 482.

Tertius casus is est, quo in æquatione proposita alterutra variabilis cum suis differentialibus in quovis termino eundem habet dimensionum numerum. Ubi autem denuo duo casus distingendi veniunt, quorum prior est, quando ejus variabilis differentiale constans sumitur, quæ cum suis differentialibus ubivis habet eundem dimensionum numerum; alter vero, quo alterius variabilis differentiale constans ponitur. Incipiamus a casu priore, quem repræsentet formula generalis $Px^{m+2} + Qx^{m-n}dx^n dy^{m+2-n} = dx^m ddy$, ubi P et Q sunt functiones ipsius y , et dx constans assumitur. Ponitur $x = eu$, unde est $dx = eu du$, et $ddu = -du^2$. Substitutis his valoribus in formula proposita et dividendo per emu , qui factor in omnibus deprehenditur terminis, prodit æquatio transformata $Pdym^{+2} + Qdu^m dym^{+2-n} = du^m ddy$, in qua u non deprehenditur. Pono itaque $du = zdy$, erit $ddu = dzdy + zddy$; sed $ddu = -du^2$, et $du^2 = zzdy^2$. Proinde $zddy + dzdy = -zzdy^2$, atque $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$. Substitutis his va-

loribus prodit $Pdym^{+2} + Qz^n dym^{+2} = -z^{m+1} dym^{+2} - z^{m-1} dym^{+1} dz$, vel $Pdy + Qz^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$. Ex his patet, quod præposita æquatio ad desideratam formam reducatur, ponendo $x = eszdy$, unde fit $dx = eszdyzdy$, et $ddx = eszdy(dzdy + zddy + z^2 dy^2)$, unde ob $ddx = 0$ concluditur $ddy = -zdy^2 - \frac{dzdy}{z}$.

Posterior casus representatur formula $Px^m dym^{+1} + Qx^{m-n}dx^n dym^{+1-n} = dx^{m-1} ddx$, ubi dy est constans et P , Q , sunt functiones ipsius x . Pono $x = eu$, erit $dx = eu du$, $ddx = eu(ddu + du^2)$, quibus valoribus substitutis ista habetur transformata. $Pdym^{+1} + Qdu^m dym^{+1-n} = dym^{+1} + du^{m-1} ddu$. Sit itaque $du =$

zdy , erit $ddu = dzdy$, ob $ddy = 0$. His substitutis et diviso per dym , habetur $Pdy + Qz^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$. Ad eandem æquationem pervenitur, si statim ab initio ponatur $x = \int zdy$.

§. 483.

Quodsi integranda proponatur æquatio differentialis variabilium x et y , in qua istae variables nec multiplicatae nec divisa in seinvicem, nec ad aliam dignitatem præter primam evectæ, occurrunt, quamque repræsentare possumus ista formula generali $x = yZ' + Z''$ si expressiones Z' et Z'' quascunque ipsius $\frac{dx}{dy}$ functiones repræsentant; sic ratiocinandum

est. Compendii causa pono $\frac{dx}{dy} = z$, ut Z' , Z'' denotent functiones ipsius z . Differentietur æquatio proposita $x = yZ' + Z''$, ut fit $dx = dyZ' + ydZ' + dZ''$, et substituto valore $dx = zdy$ fiat $zdy = dyZ' + ydZ' + dZ''$. Unde deducitur $dy(Z' - z) + ydZ' + dZ'' = 0$, quae æquatio comparata cum forma æquationis $AXy^{n-q}dy + BX^1y^{n+1-q}dx + CX^1dx = 0$ ostendit eandem per præcepta §. 460. integrabilem esse. Fit

enim $y e^{\int \frac{dZ'}{Z' - z}} + \int \frac{dZ''}{Z' - z} e^{\int \frac{dZ''}{Z' - z}} = A$, ex qua

æquatione habetur valor ipsius y per z . Quia præterea est $\frac{dx}{dy} = z$, ideoque $dx = zdy$, et $x = \int zdy$, inveniri quoque potest valor ipsius x per z .

Sit itaque nunc $z = \frac{dx}{dy}$; $u = \frac{dz}{dy} = \frac{ddx}{dy^2}$; $r = \frac{du}{dy}$

$$\frac{du}{dy} = \frac{d^3 x}{dy^3} \cdot \cdot \cdot p = \frac{d^n x}{dy^n}; q = \frac{dp}{dy} =$$

$\frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}$. Ac generaliter patet, per eandem methodum

integrari æquationem $z = yV' + V''$, si V' et V'' deno-

tent functiones ipsius $u = \frac{ddx}{dy^2}$ quascunque, z vero fit =

$\frac{dx}{dy}$, vel generaliter integrationem admittere hanc æ-

quationem, $p = yQ' + Q''$, si fit $p = \frac{d^n x}{dy^n}$, Q' vero et

Q'' functiones ipsius $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+2}}$.

§. 484.

Denotet littera z idem, quod aute, ac integranda
proposita fit æquatio hujus formæ $x^m y^n z^r = V$ existen-

stente V functione ipsius $x^q y^s z^t$. Pono $x^q y^s z^t =$

u , erit $x = u^{\frac{1}{q}} y^{\frac{s}{q}} z^{\frac{t}{q}}$, $x^m = u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}}$

$z^{\frac{mt}{q}}$. Quia vero $x^m y^n z^r = V$, erit $y^n z^r = \frac{V}{x^m}$.

proinde $y^n z^r = \frac{V}{u^{\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}} = V u^{-\frac{m}{q}}$

$y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$, et $y^n = V u^{-\frac{m}{q}} y^{\frac{ms}{q}} z^{\frac{mt}{q}}$, vel $y^{\frac{nq-ms}{q}}$

$= V u^{-\frac{m}{q}} z^{\frac{mt-rq}{q}}$, unde $y = V^{\frac{nq-ms}{nq-ms}} u^{\frac{-m}{nq-ms}} z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$, et $x =$

$u^{\frac{1}{q}} z^{\frac{t}{q}} y^{\frac{s}{q}} = V^{\frac{-s}{nq-ms}} u^{\frac{n}{nq-ms}} z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$, valore ipsius

$y = \frac{s}{q}$ substituto. Sed $dx = zdy$. Valoribus itaque ipsarum dx et dy in ultima æquatione substitutis reperiuntur conditiones integrabilitatis sequentem in modum.

Ponatur ad calculum abbreviandum $V^{\frac{q}{nq-ms} - \frac{m}{nq-ms}} =$

V'' et $V^{\frac{s}{nq-ms} - \frac{n}{nq-ms}} = V'$; erit $x = V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}$ et $y = V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$.

Ob æquationem itaque $dx = zdy$ habemus d .

$V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} = z d.V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$, id est $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} - 1 dz = z^{\frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms}} dV'' + \frac{tm-rq}{nq-ms} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}}$

$dV'' + \frac{tm-rq}{nq-ms} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$, quæ æquatio integrabilis est sub conditionibus, quæ sequuntur.

1) Si $tm-rq=0$, quia tum $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} - 1 dz = z dV''$, quæ æquatio integrabilis est per §. 460.

2) Si $rs-nt=0$. Tum enim est $V'^{-1} dV' = \frac{tm-rq}{nq-ms} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$ per eandem methodum integranda.

3) Si $nq-ms+tm-rq=rs-nt$, quo casu est $\frac{tm-rq}{nq-ms} = \frac{nq-ms+tm-rq}{nq-ms} - 1 = \frac{rs-nt}{nq-ms} - 1$, unde fit $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V'^{-1} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} - 1 dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$

per eandem methodum integranda.

fit $z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V'^{-1} dV' + \frac{rs-nt}{nq-ms} V' z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} - 1 dz = z^{\frac{rs-nt}{nq-ms}} V'' z^{\frac{tm-rq}{nq-ms}} dz$

V''

$$V'' - I dV'' + \left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - I \right) V'' z^{\frac{rs - nt}{nq - ms} - I} dz, \text{ unde}$$

$$\text{concluditur } \frac{V' - I dV - V'' - I dV''}{\left(\frac{rs - nt}{nq - ms} - I \right) V'' - \frac{rs - nt}{nq - ms} V} = \frac{\frac{rs - nt}{z^{nq - ms}} - I dz}{\frac{rs - nt}{z^{nq - ms}}}.$$

Si proposita sit ista æquatio $dx = ax^m y^n dy + px^e y^b dy + fxg y^l dy + \text{etc}$; pono $x^r y^s = u$, erit $x =$

$$u^{\frac{1}{s}} y^{-\frac{r}{s}}, dx = \frac{1}{s} y^{-\frac{r}{s}} u^{\frac{1}{s} - I} du - \frac{r}{s} u^{\frac{1}{s}} y^{\frac{r}{s} - I}$$

dy . Ergo ista habetur transformata $\frac{1}{s} y^{-\frac{r}{s}} u^{\frac{1}{s} - I}$

$$du = \frac{r}{s} u^{\frac{1}{s}} y^{-\frac{r}{s} - I} dy + au^{\frac{m}{s}} y^{-\frac{rm}{s}} + n dy +$$

$$pu^{\frac{e}{s}} y^{-\frac{re}{s}} + b dy + fu^{\frac{g}{s}} y^{-\frac{rg}{s}} + l dy + \text{etc}, \text{ quæ}$$

$$\text{integrabilis est, si } -\frac{r}{s} - I = -\frac{rm}{s} + n = -\frac{re}{b}$$

$$+ b = -\frac{rg}{s} + l. \text{ Ex æquatione vero } -\frac{r}{s} - I$$

$$= -\frac{rm}{s} + n \text{ concluditur } -\frac{r}{s} + \frac{mr}{s} = n + I \text{ pro}$$

$$\text{inde } \frac{r}{s} = \frac{n + I}{m - I}. \text{ Ex æquatione } \frac{r}{s} - I = -$$

$$\frac{er}{s}$$

$\frac{er}{s} + b$ fuit $\frac{r}{s} = \frac{b+1}{e-1}$ etc. Ideo integratio possibilis est, si $\frac{n+1}{m-1} = \frac{b+1}{e-1} = \frac{l+1}{q-1}$ etc.

Quodsi hic generationem loco x ponatur $\frac{d^n x}{dy^n}$ atque $\frac{d^{n+1}x}{dy^{n+1}}$ loco z vel $\frac{dx}{dy}$, æquationes differentiales inde ortæ sub iisdem conditionibus erunt integrabiles.

§. 485.

Si proponatur æquatio sequentis formæ $x = y^k z^r V + V'$, atque V et V' sint functiones ipsius $y^p z^n$,

quaecunque; pono $y^p z^n = u$, erit $z = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} = \frac{dx}{dy}$. Ideo $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy$. Præterea $z^r =$

$u^{\frac{r}{n}} y^{-\frac{pr}{n}}$, ideo $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k - \frac{pr}{n}}$, quare propofita æquatio fic transformatur $x = u^{\frac{r}{n}} y^{k - \frac{pr}{n}} V + V'$.

Scripto itaque V'' loco $u^{\frac{r}{n}} V$, invenitur $u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d(V'' y^{k - \frac{pr}{n}} + V')$, quæ integrabitur per §. 460.

fi $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$. Poterat quoque ex hypo-

thesi $y^p z^n =$ deduci $y = u^{\frac{1}{n}} z^{-\frac{n}{p}}$, $dy = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p} - 1}$

$$z^{-\frac{n}{p}} du - \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}-1} \frac{1}{u p} dz. \text{ Proinde } dx = z dy =$$

$$\frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}} + 1 \frac{1}{u p} - 1 du - \frac{n}{p} \frac{1}{u p} z^{-\frac{n}{p}} dz. \text{ Praeterea}$$

$$y^k z^r = u \frac{k}{p} z^{-\frac{nk}{p}} + r, \text{ proinde } x = u \frac{k}{p} z^{-\frac{nk}{p}} + r V$$

$$+ V'. \text{ Ponatur } u \frac{k}{p} V = V''', \text{ erit } dx = \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}} + 1$$

$$u \frac{1}{p} - 1 du - \frac{n}{p} u \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}} dz = z^{-\frac{nk}{p}} + r dV''' -$$

$$\left(\frac{nk}{p} - r \right) V''' z^{-\frac{nk}{p}} + r - 1 dz + dV'. \text{ Quodsi jam}$$

$$-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r, \text{ erit } -\frac{n}{p} = -\frac{nk}{p} + r$$

$$-1; \text{ unde habetur } \frac{1}{p} z^{-\frac{n}{p}} + 1 - 1 \frac{1}{u p} - 1 du -$$

$$z^{-\frac{n}{p}} + 1 V''' \cdot 1 dV''' - dV' = \frac{n}{p} z^{-\frac{n}{p}} \frac{1}{u p} dz -$$

$$\left(\frac{n}{p} - 1 \right) V''' z^{-\frac{n}{p}} dz, \text{ vel } z^{-\frac{n}{p}} dz, \frac{n}{p} \frac{1}{u p} + \left(1 - \right.$$

$$\frac{n}{p} \left. \right) V''' + z^{-\frac{n}{p}} + 1 du \propto \left(V''' - 1 \frac{dV'''}{du} - \frac{1}{p} \right.$$

$$\left. \frac{1}{u p} - 1 \right) - dV'' = 0; \text{ quæ integratur secundum præcepta §. cit.}$$

Si æquatio proposita foret hujus formæ $x = y^k z^r V + y^{k'} r' V' + y^{k''} r'' V'' + \text{etc.}$ existentibus V, V', V'' functio-

functionibus ipsius $y^p z^n$; pono $y^p z^n = u$, ut fiat z

$$= u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}}, \text{ proinde } dx = z dy = u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy;$$

$$u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} dy = d \left(u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} + k V + u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} + k' V' \right.$$

$$\left. + u^{\frac{1}{n}} y^{-\frac{p}{n}} + k'' V'' + \text{etc.} \right). \text{ Ideo proposita æqua-}$$

tio integrabilis est, si sit $-\frac{p}{n} + 1 = -\frac{pr}{n} + k = -$

$$\frac{pr'}{n} + k' = -\frac{pr''}{n} + k'' \text{ vel si } \frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} =$$

$$\frac{k''-1}{r''-1} \text{ etc.}$$

In his quoque formulis x generatim denotare potest

$$\frac{d^n x}{dy^n}, \text{ ac } z \text{ denotare } \frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}. \text{ Unde patet easdem me-}$$

thodos ad æquationes differentiales altiorum graduum quoque extendi.





GEOMETRIA SVBLIMIOR.

SECTIO I.

DE

RAMIS CVRVARVM IN INFINI-
TVM EXTENSIS EORVMQVE
ASYMTOTIS.

§. I.

Omnem æquationem inter coordinatas x et y algebraicam in antecedentibus ita distinximus in membra, ut ad supremum seu primum omnes æquationis termini fuerint relati, in quibus variabiles x et y eandem summam dimensionum, cuius exponens sit n , teneant. Ad secundum vero membrum relati sunt omnes termini, in quibus variabiles ambæ $n-1$ dimensiones constituunt. Tertium membrum continet eos terminos, in quibus variabilium x et y numerus dimensionum est $n-2$, sicque porro, donec perveniatur ad ultimum membrum, in quo nulla inest dimensio variabilium x et y , quodque ideo quantitas erit constans. Quodsi igitur denotet P membrum primum, seu supremum Q membrum secundum, R membrum tertium, S quartum, et ita porro; erit P functio homogenea n dimensionum, Q functio homogenea $n-1$ dimensionum, R functio homogenea $n-2$ dimensionum, S functio homogenea $n-3$ dimensionum; sicque porro, atque æquatio pro linea algebraica ordinis n sic generaliter poterit exprimi $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$. Jam vero functio P resolubilis
erit

erit in n factores simplices, qui aut omnes erunt reales, aut omnes impossibiles, aut ex parte reales, ex parte impossibiles.

§. 2.

Ponamus igitur primo, membrum supremum P unicum habere factorem simplicem realem $ay - bx$, ita ut sit $P = (ay - bx) M$, existente M functione homogenea variabilium x et y dimensionum $n-1$, quæ nullos habeat factores simplices reales, et æquatio algebraica pro curva ordinis n sequentem habebit formam $(ay - bx) M + Q + R + S + \text{etc} = 0$ vel $ay - bx = -\frac{Q + R + S + \text{etc}}{M}$. Quodsi jam vel x , vel y , vel

utraq; coordinata ponatur infinita $= \infty$, fiet $ay - bx = -\frac{Q}{M}$, quia reliquæ fractionis $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, etc sunt $= 0$. Erit vero $-\frac{Q}{M}$ functio nullius dimensionis,

seu quantitas constans, quæ si ponatur $= C$, erit $ay - bx = C$. Ex quo patet, sub hac hypothese posita una coordinata v.g. $x = \infty$ simul alteram esse infinitam, erit enim $y = \frac{C + bx}{a}$. Porro ex his concluditur, quod

portio curvæ in infinitum extensa ipsa exprimatur per hanc æquationem $ay - bx = C$; quæ cum sit pro linea recta, hæc linea recta in infinitum producta est limes, ad quem curva perpetuo adpropinquat, et proinde hæc linea recta erit curvæ propositæ *asymptota*. Appropinquat vero curva ad hanc lineam rectam utrinque in infinitum productam. Quodsi membrum æquationis secun-

dum Q deficiat, foret $C = 0$, et proinde $y = \frac{bx}{a}$.

Idem eveniet, si præter Q etiam R , seu aliquod consequen-

quentium membrorum deficiat. Hoc igitur quoque casu, et proinde generaliter, si primum æquationis membrum P unicum tantum habet factorem simplicem realem, curva asymptotam habet rectam et duos ramos in infinitum excurrentes. Ex hisce vero simul perspicitur, quod curva nullum plane habeat ramum in infinitum excurrentem, si membrum æquationis supremum P plane nullos habeat factores simplices reales, sed omnes imaginarios. Denotante enim i ejusmodi factorem imaginarium fiet $iM + Q + R + S + \text{etc} = 0$ forma æquationis ex quo fit $i = \frac{-Q - R - S \text{ etc}}{M}$ et una coor-

dinatarum posita infinita habetur $i = -\frac{Q}{M}$, proinde

vel $i = C$, vel $i = 0$, prouti membrum secundum Q vel adest, vel deficit. Hoc enim casu membrum supremum P semper erit infinitum ordinis n quia resolubile est in factores duplices reales formæ $A^2y^2 - 2ABxy \cos \phi + B^2x^2$, ubi nec A nec B possunt esse $= 0$, qui proinde factor est $= \infty^2$. Præbet vero æquatio $i = C$, vel $i = 0$, ad abscissam x applicatam y impossibilem et v. v. Factor i enim hanc habet formam $qy - p(\cos \phi \pm r - 1. \sin \phi)$ ut sit $qy - p(\cos \phi \pm \sin \phi r - 1) = C$, proinde $y = \frac{p(\cos \phi \pm \sin \phi r - 1) + C}{q}$. Ex quo

patet ad abscissam x infinitam fore y impossibilem, etiam si $C = 0$. Præterea est $\frac{q}{p} = \frac{(\cos \phi \pm \sin \phi r - 1) + C}{y}$,

et p functio duarum ipsius x dimensionum, q vero unius dimensionis, ideo $\frac{q}{p}$ functio -1 , dimensionis ipsius

x formæ $\frac{A}{Bx}$. Ex quibus habetur x

$$= \frac{Ay}{B((\cos \phi \pm \sin \phi r - 1) + C)}.$$
 Quare et applicatae
 y infinitae respondet abscissa x impossibilis, etiam in ca-
 su, quo $C=0$.

§. 3.

F.301.

Ad naturam horum curvæ ramorum penitus inda-
 gandam ponamus esse $ay - bx$ ejusmodi factorem simpli-
 cem membri supremi P , cui alius æqualis non adfit, ut
 fiat $P = (ay - bx)M$, eritque M functio homogenea n
 $- 1$ dimensionum non divisibilis per $ay - bx$. Quodsi
 jam fuerit AZ axis, in qua sumta est abscissa $AP = x$ et
 applicata $PM = y$; sumatur alia recta AX pro axe secans
 priorem in ipso abscissarum initio A sub angulo XAZ ,

cujus tangens $= \frac{b}{a}$, cujus proinde sinus $= \frac{b}{r(aa+bb)}$

et cosinus $= \frac{a}{r(aa+bb)}$. Ponatur in eodem axe ab-

scissa $AQ = t$ et applicata $QM = u$; ducatur Pg ipsi u
 et Pf ipsi t parallela; erit $\sin. tot : \frac{b}{r(aa+bb)} = (AP =$

$x) : Pg = Qf = \frac{bx}{r(aa+bb)}$ et $\sin. tot : \frac{a}{r(aa+bb)}$

$= (AP = x) : Ag = \frac{ax}{r(aa+bb)}$. Deinde $\sin. tot :$

$\frac{a}{r(aa+bb)} = y : Mf = \frac{ay}{r(aa+bb)}$, et $\sin. tot :$

$\frac{b}{r(aa+bb)} = y : Pf = Qg = \frac{by}{r(aa+bb)}$. Proin-

de $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{r(aa+bb)}$ et $u = Mf - Qf =$

$\frac{ay-bx}{r(aa+bb)}$. Quia igitur est $ay - bx = ur(aa+bb)$,

et $ay - bx$ est factor supremi membri P , erit simul u ejusdem membri P factor. Ex hisce præterea conclu-

ditur $x = \frac{ax + by}{r(aa + bb)}$, $tr(aa + bb) = ax + by$, et

$y = \frac{tr(aa + bb) - x}{b}$. Deinde $u = \frac{ay - bx}{r(aa + bb)}$,

$ur(aa + bb) = ay - bx$, et $y = \frac{ur(aa + bb) + bx}{a}$.

Ideo $\frac{ur(aa + bb) + bx}{a} = \frac{tr(aa + bb) - ax}{b}$, $bur(aa$

$+ bb) + bbx = atr(aa + bb) - aax$, $(aa + bb)x = (at - bu)r(aa + bb)$, et $x = \frac{(at - bu)r(aa + bb)}{(aa + bb)} =$

$\frac{at - bu}{r(aa + bb)}$. Proinde $y = \frac{ur(aa + bb) + \frac{bat - bbu}{r(aa + bb)}}{a}$

$= \frac{au + bt}{r(aa + bb)}$. Quodsi igitur valores isti in æquatione

$P + Q + R + S + \text{etc} = 0$ substituantur; inveniatur æquatio pro eadem curva ad axem AX relata inter cõordinates t et u , atque singula æquationis membra sequentem induent formam:

$$P = at^{n-1}u + at^{n-2}u^2 + at^{n-3}u^3 + at^{n-4}u^4 + \text{etc.}$$

$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \text{etc.}$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \text{etc.}$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \text{etc.}$$

$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \varepsilon t^{n-7}u^3 + \text{etc.}$$

ubi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc, vices singulorum coefficientium sustinent, ut multitudo litterarum evitetur.

Ex harum æquationum prima concluditur $\frac{M}{t^{n-1}} =$

$$+ \frac{\alpha u}{t} + \frac{\alpha u^2}{t^2} + \frac{\alpha u^3}{t^3} + \text{etc. et ex altera fit } \frac{Q}{t^{n-1}} =$$

$$\beta + \frac{\beta u}{t} + \frac{\beta u^2}{t^2} + \frac{\beta u^3}{t^3} + \text{etc. Ex æquatione } uM$$

$$+ Q + R + S + \text{etc. vero habetur } u = \frac{-Q-R-S-\text{etc}}{M}.$$

Posito nunc $t = \infty$, fient Q et M infinita ordinis $n-1$, R vero ordinis $n-2$, S ordinis $n-3$ etc, atque hæ functiones ad superiorem infiniti ordinem ascendere non possent, si vel maxime quis statuere velit, quod posito $t = \infty$ etiam evadat $u = \infty$. Omni igitur respectu

erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, etc $= 0$, et fractio $\frac{Q}{M}$

valorem habet finitum. Infinita enim esse nequit, nisi quis statuere velit, esse Q infinitum ordine $n-1$ superius vel M infinitum ordine $n-1$ inferius; quod utrumque statui nequit. Proinde posito $t = \infty$, manet u quan-

titas finita. In casu igitur, quo $t = \infty$, fit $\frac{M}{t^{n-1}} = \alpha$, et

$$\frac{Q}{t^{n-1}} = \beta. \text{ Cum vero fit } u = -\frac{Q}{M}; \text{ habetur } u = -$$

$$\frac{\beta}{\alpha}. \text{ Ex quo patet, curvam in infinitum productam}$$

perpetuo accedere ad rectam axi AX parallelam ab eo-

que intervallo $-\frac{\beta}{\alpha}$ distantem, quæ erit curvæ asym-

tota, ostenditque, ob unum supremi membri factorem simplicem realem, cui æqualem alium non agnoscit, curvam habere duos ramos ad utranque axis AX partem in infinitum excurrentes.

§. 4.

Potest vero natura ramorum hujus curvæ ad asym-

totam

totam rectam continuo appropinquantium accurratius

indagari sequentem in modum. Ponatur $-\frac{\beta}{\alpha} = c$,

ut $u = c$ sit æquatio definiens asymptotam rectam axi AX parallelam ab eoque intervallo c distantem; erunt æquationes $\alpha u + \beta = 0$ et $u - c = 0$ identicae, quia utraque positionem asymptotæ definit. Aequatione vero $P + Q$

$+ R + S + \text{etc} = 0$ secundum potestates ipsius t ordinata, fit $(\alpha u + \beta)t^{n-1} + (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)t^{n-2} + (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)t^{n-3} + \text{etc} = 0$, et posito $t = \infty$, ob $\alpha u + \beta = u - c$, fit $(u - c)t^{n-1} + (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)t^{n-2} + (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)t^{n-3} + \text{etc} = 0$. Captis igitur abscissis in ipsa asym-

tota recta et proinde posito $u - c = z$, et scripto c loco u , fiet $zt^{n-1} + (\alpha c^2 + \beta c + \gamma)t^{n-2} + (\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta)t^{n-3} + \text{etc} = 0$, ubi præterquam in primo termino omnes potestatum ipsius t coefficientes erunt constantes, quos brevitatis gratia litteris A, B, C, etc denotabimus, atque

æquatio sic transformabitur $z = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3}$

$+ \frac{D}{t^4} + \text{etc}$, quæ æquatio idem ostendit, quod ante

jam invenimus, nimirum eam rectam, in qua nunc abscissæ t capiuntur esse curvæ asymptotæ, ad quam eo magis accedit, quo major abscissa t capiatur, et posito $t = \infty$, esse z seu $u - c = 0$. Tribuatur æquationi

haec forma $zt = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3}; \text{etc}$, ac pa-

tet, posito $t = \infty$, fieri $zt = A$, quia reliqui termini sunt $= 0$, quod ostendit ramum curvæ cum asymptota recta convergentem, simul in infinitum productum accedere ad ramum hyperbolæ ad eandem asymptotam descriptæ, quæ igitur hyperbola æquatione; $zt = A$ expressa erit ejusdem curvæ *asymptota curvilinea*.

§. 5.

Quodsi fuerit $A = 0$, hæc afymtota curvilinea exprimetur æquatione $xtt = B$. Si fuerit quoque $B = 0$, curva habebit afymtotam curvilineam æquatione $xt^3 = C$ expressam. Sicque porro concluditur, etiam D, E , etc. existente $= 0$. Si omnes coefficientes præter ultimum constantem, qui sit K , deessent, foret $xt^{n-1} = K$. Prorsus autem omnes si abessent; tota æquatio per $u - c$ divisibilis et proinde ipsa recta æquatione $u - c$ expressa curvæ portio esset. Patet ex hisce, quod rami curvæ æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ expressæ, cujus membrum supremum P habet unum factorem simplicem realem, licet ad eandem rectam afymtotam convergant, diversissimæ tamen naturæ esse possint. Habet enim ejusmodi ramus simul afymtotam curvilineam æquatione $xt^k = C$ expressam, in qua C quamcunque constantem, et k quemvis integrum exponente n minorem denotat, qui numerus x modo jam descripto invenitur. Quia curva æquatione $xt = C$ expressa est hyperbola Apolloniana; ob similitudinem omnes curvæ æquatione generali $xt^k = C$ expressæ, existente k numero integro positivo, dicuntur *curvæ hyperbolice*. Omnibus

§. 302. hisce curvis illud cum hyperbola Apolloniana commune est, quod duas habeant Afymtotas rectas et quatuor ramos in infinitum excurrentes. Sit enim XY afymtota recta pro axe assumpta et A initium abscissarum ducta CD , axe adplicatarum, orientur quatuor regiones p, q, r, s .

Sit primum $xt = C$, vel $x = \frac{C}{t}$; quia sumpto t negativo fit quoque x negativa, curva æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ expressa duos habebit ramos in regionibus oppositis p et s ad rectam XY convergentes, quorum afymtotæ curvilineæ sunt rami hyperbolæ EX et FY . Idem eveniet, si k fuerit numerus quicunque impar.

Si

Si fuerit $k = 2$, et proinde $xtt = C$, vel $x = \frac{C}{tt}$; t perpetuo manet affirmativa, five t affirmativa five negativa statuatur. Proinde curva æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.}$ expressa duos habebit ramos in regionibus p et q ad rectam XY convergentibus, quorum asymptotæ curvilineæ r. 303. sunt rami hyperbolæ EX et FY . Idem contingit, si k fuerit numerus par quicumque, hoc tantum discrimine, quod convergentia eo sit promptior, quo major sit exponens k .

§. 6.

Quodsi membrum æquationis supremum P binos habeat factores $ay - bx$ inter se æquales; ita ut sit $P = (ay - bx)^2 M$; erit primo $ay - bx = \frac{-Q - R - S \text{ etc.}}{(ay - bx)M}$,
 $= \frac{-Q}{(ay - bx)M} = p$, et proinde iterum $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax}$. Deinde est $(ay - bx^2) = -\frac{Q}{M} - \frac{R}{M}$
 $-\frac{S}{M} - \frac{T}{M} \text{ etc.} = -\frac{Q}{M(by + ax)} (by + ax) - \frac{R}{M} - \frac{S(by + ax)}{M} - \frac{T(by + ax)^2}{M} : (by + ax) - \frac{R}{M} - \frac{S(by + ax)}{M} - \frac{T(by + ax)^2}{M} : (by + ax)^2 - \text{etc.}$ Sunt vero $\frac{-Q}{M(by + ax)} - \frac{R}{M}$, $-\frac{S(by + ax)}{M}$, $-\frac{T(by + ax)^2}{M}$, etc. functiones nullius dimensionis variabilium x et y , quia Q, R, S, T , etc. sunt functiones $n-1, n-2, n-3, n-4$, etc. dimensionum. Si igitur posito x infinito, ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ seu b pro y et a pro x substituatur, omnes istæ functiones

nes nullius dimensionis fient quantitates constantes. Scriptis itaque harum constantium loco litteris A, B, C, D,

etc. fiet $(ay - bx)^2 = -A(by + ax) - B - \frac{C}{by + ax}$

$-\frac{D}{(by + ax)^2} - \frac{E}{(by + ax)^3} - \text{etc.}$ Mutato nunc axe ut

ante et posito $ay - bx = ur(aa + bb)$ et $by + ax = t\sqrt{aa + bb}$, brevitatis gratia scripto g loco $\sqrt{aa + bb}$, ut sit $ay - bx = ug$ et $by + ax = tg$, fiet $uugg + Atg$

$+ B + \frac{C}{tg} + \frac{D}{t^2g^2} + \frac{E}{t^3g^3} + \frac{F}{t^4g^4} +$

etc. = 0. Sive $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3t} + \frac{D}{g^4t^2}$

$+ \frac{E}{g^5t^3} + \frac{F}{g^6t^4} + \text{etc.} = 0.$ Quia igitur hic

ponimus $t = \infty$ fiet $uu + \frac{A}{g}t + \frac{B}{gg} = 0$, vel $\frac{uu}{t}$

$+ \frac{A}{g} = 0$ quia reliqui termini sunt = 0. Est vero

æquatio $uu + \frac{A}{g}t + \frac{B}{gg} = 0$ pro parabola. Proinde

curva habebit duos ramos in infinitum excurrentes, quorum asymptota non erit linea recta, sed parabola. Hæc

vera sunt, si membrum secundum non divisibile sit per

$ay - bx$. Sit enim etiam Q per $ay - bx$ divisibile et fiet

$(ay - bx^2)M + (ay - bx)N + R + S + T + \text{etc.} = 0$

si $Q = (ay - bx)N$, et proinde $(ay - bx)^2 = -$

$\frac{(ay - bx)N - R - S - T - \text{etc.}}{M}$, vel $(ay - bx)^2 = -\frac{Q}{M(ay - bx)}$

$(ay - bx) - \frac{R}{M} - \frac{S(ay - bx)}{M} : ay - bx - \frac{T(ay - bx)}{M}$

$: (ay -$

$$: (ay - bx) - \text{etc. vel } (ay - bx)^2 + \frac{N}{M} (ay - bx) +$$

$$\frac{R}{M} + \frac{S(by + ax)}{M} : (by + ax) + \frac{T(by + ax)^2}{M} : (by +$$

$$ax)^2 + \text{etc.} = 0 \text{ et posito } ay - bx = ug \text{ et } by + ax = s$$

fiet $ugg + Aug + B + \frac{C}{tg} + \frac{D}{tgg} + \frac{E}{t^3g^3} + \text{etc.}$

quia scripto $\frac{b}{a}$ loco $\frac{y}{x}$ fient $\frac{Q}{M(ay - bx)}$, $\frac{R}{M}$, etc

quantitates constantes: et quia ob $t = \infty$, fient termini

$\frac{C}{tg}$, $\frac{D}{tgg}$ et sequentes $= 0$ habetur $ugg + Atg +$

$B = 0$, vel $uu + \frac{A}{g}u + \frac{B}{gg} = 0$. Haec æquatio

vel habet duas radices reales vel imaginarias. Posteriori casu curva nullos habet ramos in infinitum extensos, quia asymptotæ sunt imaginariæ. Si radices sunt reales, erunt vel æquales, vel inæquales. Habeat primo radices inæquales c et d , atque curva habet duas asymptotas rectas axi parallelas æquationibus $u - c = 0$, et $u - d = 0$ expressas. Ipsorum vero ramorum natura ut ante investigatur sequenti ratione.

§. 7.

Termini æquationis $P + Q + R + S \text{ etc.} = 0$, seu $u^2M + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ sequentem habent formam.

$$P = at^{n-2} u^2 gg + at^{n-3} u^3 y^3 + at^{n-4} u^4 y^4 + \text{etc.}$$

$$M = at^{n-2} + at^{n-3}u + at^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$

$$Q = \beta t^{n-2} ug + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \text{etc.}$$

$$N = \beta t^{n-2} + \beta t^{n-3}u + \beta t^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{etc.}$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{etc.}$$

Proinde habemus $\frac{M}{t^{n-2}} = a + \frac{au}{t} + \frac{au^2}{tt} +$
 etc. $= a$ quia est $u = \infty^{\frac{1}{2}}$ et $t = \infty$, proinde $\frac{u}{t} = 0$.

Præterea $\frac{N}{t^{n-2}} = \beta$, $\frac{R}{t^{n-2}} = \gamma$. Ex hisce fit $A =$

$\frac{N}{M} = \frac{\beta}{a}$, et $B = \frac{R}{M} = \frac{\gamma}{a}$, proinde loco x -

quationis $uu + \frac{A}{g} + \frac{B}{gg} = 0$ habemus $uu + \frac{\beta}{ag}$

$+ \frac{\gamma}{agg} = 0$, vel $auugg + \beta ug + \gamma = 0$. Fiet ita-

que $auugg + \beta ug + \gamma = (u-c)(u-d)$. Ordinetur æ-
 quatio $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ secundum potestates
 ipsius t , ut sit $(auugg + \beta ug + \gamma) t^{n-2} + (au^3 g^3 +$
 $\beta u^2 g^2 + \gamma ug + \delta) t^{n-3} + (au^4 g^4 + \beta u^3 g^3 + \gamma u^2 g^2 +$
 $\delta ug + \epsilon) t^{n-4} + \text{etc.} = 0$. Posito vero $t = \infty$ ob
 $auugg + \beta ug + \gamma = (u-c)(u-d)$ et $u=c$ facta hac
 substitutione habetur $(u-c)(c-d) t^{n-2} + (ac^3 g^3 +$
 $\beta c^2 g^2 + \gamma cg + \delta) t^{n-3} + (ac^4 g^4 + \beta c^3 g^3 + \gamma c^2 g^2 + \delta c$
 $g + \epsilon) t^{n-4} + \text{etc.} = 0$, vel $(u-c) t^{n-2} +$
 $\frac{(ac^3 g^3 + \beta c^2 g^2 + \text{etc.})}{c-d} t^{n-3} + \frac{ac^4 g^4 + \beta c^3 g^3 + \text{etc.}}{c-d}$

$t^{n-4} + \text{etc.} = 0$ et coefficientibus constantibus brevitatis
 gratia litteris A, B, C, D, etc. notatis habetur $(u-c) t^{n-2}$
 $+ At^{n-3} + Bt^{n-4} + Ct^{n-5} + \text{etc.} = 0$. Nisi igitur sit
 $A = 0$, habetur $(u-c) t + A = 0$. Si $A = 0$, erit
 $(u-c) t^2 + B = 0$, si $A = 0$ et $B = 0$, fiet $(u-c) t^3$
 $+ C = 0$, et ita porro. Si omnes coefficientes præter
 ultimum terminum constantem, qui sit K, fuerint $= 0$,
 erit $(u-c) t^{n-2} + K = 0$. Captis igitur abscissis in ip-
 sa asymptota rectilinea, et posita proinde $u-c = z$ om-
 nes istæ asymptotæ curvilineæ iterum comprehenduntur
 sub

sub forma generali $zt^k + C = 0$, quam §. 5. evol-
vimus.

§. 8.

Si ambæ radices æquationis $\alpha ugg + \beta ug + \gamma = 0$
fuerint æquales, ut fit $\alpha ugg + \beta ug + \gamma = (u - c)^2$,
posito $t = \infty$, fiet $(u - c)^2 t^{n-2} + (\alpha c^3 g^3 + \beta c^2 g^2 + \gamma c g + \delta) t^{n-3} + (\alpha c^4 g^4 + \beta c^3 g^3 + \text{etc.}) t^{n-4} + \text{etc.} = 0$,
et loco coefficientium constantium scriptis A, B, C, D,
etc. fiet $(u - c)^2 t^{n-2} + A t^{n-3} + B t^{n-4} + C t^{n-5} + D t^{n-6} +$
 $\text{etc.} = 0$. Prout igitur vel non desit A, vel non desit
B deficiente A, vel non desit C deficientibus A et B, sic-
que porro, orientur sequentes æquationes pro asyinto-
tis $(u - c)^2 t + A = 0$, $(u - c)^2 t^2 + B = 0$, $(u - c)^2 t^3$
 $+ C = 0$. usque ad $(u - c)^2 t^{n-2} + k = 0$, si omnes ter-
mini præter ultimum constantem deficiant. Si etiam
ultimus evanescat, foret $(u - c)^2 = 0$, proinde linea re-
cta ipsa curvæ portio, et ideo curva complexa. Cap-
tis nunc abscissis in asyntota recta et posito eum in fi-
nem $u - c = z$, omnes hæ asyntotæ sub forma $zzt^k +$
 $C = 0$ erunt comprehensæ, si k sit numerus integer posi-
tivus $< n-1$. Harum igitur curvarum rami in infini-
tum protensi ita se habebunt. Sit primo $k = 1$, seu zz
 $= \frac{C}{t}$, quia posita abscissa negativa fiet applicata z
imaginaria, curva duos habebit ramos EX et FK in re-
gionibus p et r in infinitum excurrentes, quod idem
eveniet, si fuerit k numerus alius impar. Si vero sit k
 $= 2$, seu alius par quicunque, iterum dispiciendum est,
utrum sit C quantitas negativa an positiva. — Priori ca-
su æquatio realis esse nequit, et ideo curva nullum ha-
bet ramum infinitum. Posteriori casu curva quatuor
habebit ramos in infinitum extensos cum asyntota XY
concurrentes, nimirum EX, FX, GY, et HY in om-
nibus quatuor regionibus p, q, r , et s dispersos.

§. 9.

Si fuerit $Q = 0$, et proinde $A = 0$; inveniretur

æquatio $uugg + B = 0$, vel $uu + \frac{B}{gg} = 0$. Quodsi

igitur sit B quantitas positiva, æquatio non habet factores reales, et proinde curva nullos ramos in infinitum extensos, Quodsi vero B sit negativa, æquatio

$uu - \frac{B}{gg} = 0$ duas in se complectetur æquationes $u + \frac{rB}{g}$

$= 0$ et $u - \frac{rB}{g} = 0$, quæ erunt pro duabus rectis axi

et proinde inter se parallelis, quarum utraque erit curvæ asymptota, uti casu præcedente, quo Q habet factorem $ay - bx$. Curva igitur habet quatuor ramos in infinitum extensos, quorum natura ut ante invenitur. Po-

natur brevitatis gratia $\frac{rB}{g} = c$, et quia est $B =$

$\frac{\gamma}{a}$, sit $uu + \frac{\gamma}{agg} = 0$, seu $auugg + \gamma = 0$. Hoc

igitur casu debet esse $(u + c)(u - c) = auugg + \gamma$, qui proinde pertinet ad eum casum §. præc, ubi æquatio $auugg + \beta ng + \gamma$ habet duas radices reales inæquales, posito enim $Q = 0$, erit $\beta = 0$, et ex æquatione $auugg + \beta ng + \gamma = 0$, fiet $auugg + \gamma = 0$.

§. 10.

Quodsi præter membrum secundum Q etiam tertium R sit $= 0$, et proinde præter A quoque $B = 0$, ex æquatione $uugg + Aug + B = 0$, habemus $uugg = 0$, et $uu = 0$, quod indicat, distantias c et d asymptotarum axi parallelarum evanescere et proinde ipsum axem esse curvæ asymptotam rectam. Idem quoque ex æqua-

tione completa $uugg + Aug + B + \frac{C}{tg} + \frac{D}{ttgg} +$

$+ \frac{E}{t^3 g^3} + \text{etc.} = 0$ luculentissime sequitur, quae nunc

sequentem habet formam $u g g + \frac{C}{t g} + \frac{D}{t^2 g^2} + \frac{E}{t^3 g^3}$

$+ \frac{F}{t^4 g^4} + \text{etc.} = 0$ vel $u u + \frac{C}{t g^3} + \frac{D}{t^2 g^4} + \frac{E}{t^3 g^5}$

$+ \frac{F}{t^4 g^6} + \text{etc.} = 0$. Ex ea enim concluditur $u u t +$

$\frac{C}{g^3} + \frac{D}{t g^4} + \frac{E}{t^2 g^5} + \text{etc.} = 0$ five $u u t + \frac{C}{g^3} = 0$,

vel $u u t = \frac{\pm C}{g^3}$, quae omnino subsistere potest, ob $u u$

$= 0$, et $t = \infty$. Indicat vero haec aequatio, ob $u = \pm$

$\frac{r \pm C}{g^3 t}$, five C sit quantitas positiva five negativa,

curvam habere duos ramos ad unam vel alteram axis par-
 tem utrinque convergentes. Prorsus idem nunc sequi-

tur ex aequatione $u u + \frac{A t}{g} + \frac{B}{g g} + \frac{C}{t g^3} + \frac{D}{t^2 g^4}$

$+ \frac{E}{t^3 g^5} + \frac{F}{t^4 g^6} + \text{etc.} = 0$. Quodsi insuper fuerit C

$= 0$, fiet $u u + \frac{D}{t^2 g^4} + \frac{E}{t^3 g^5} + \frac{F}{t^4 g^6} + \text{etc.} = 0$,

et proinde $u u t + \frac{D}{g^4} = 0$, quod optime cum primis

calculi infinitorum principiis cohaeret, quia nunc est $u u$

$= 0^2$. Ex aequatione enim $u u t = \frac{C}{g^3}$ posito $C = 0$

fit $u u t = 0$, quod ob $t = \infty$ esse non potest, nisi sit

$u u = 0^2$. Quodsi igitur in hoc calu in aequatione $u =$

$\pm$

$\pm \frac{r \pm D}{tg_4}$ sit D quantitas positiva, curva habebit quatuor ramos ad axem utrinque et ad utramque partem convergentes. Si vero D sit negativa, quantitas curva nullum prorsus ramum habebit in infinitum extensum. Quodsi etiam fuerit $D = 0$, habemus aequationem $unt^3 = \frac{\pm E}{g^3}$, cujus par est ratio ac priorum sicque consideratio continuanda erit, quoad aequatio $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ terminos ultiores suppeditabit.

§. II.

Posito nunc, membrum supremum habere tres factores simplices reales; manifestum est, si isti factores fuerint inter se inæquales, tum de unoquoque valere ea, quae supra de unico factore reali sunt exposita. Hoc igitur casu curva habebit sex ramos in infinitum excurrentes, ad tres lineas rectas asymptotas convergentes. Si bini factores fuerint æquales, de tertio inæquali idem erit tenendum, quod ante, quod idem etiam ratione factorum æqualium observandum est. Superest itaque iste tantum casus, quo omnes tres factores sunt inter se æquales. Sit igitur membrum supremum $P = (ay - bx)^3 M$, atque posito x infinito non potest esse $ay - bx = \infty$, quia alias foret $(ay - bx)^3 = \infty^3$ et proinde potestas infiniti, in quam membrum supremum P abit, foret ∞^n , quod esse nequit. Proinde $ay - bx$ vel habet valorem finitum vel infinitum ordinis inferioris quam ∞ , puta $\infty^{\frac{2}{3}}$, ex quo, ob $ay - bx = \infty^{\frac{2}{3}}$, concluditur

$$ay = bx + \infty^{\frac{2}{3}}, y = \frac{bx + \infty^{\frac{2}{3}}}{a}, \text{ et } \frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{\infty^{\frac{2}{3}}}{x} \\ = \frac{b}{a}, \text{ quia } \frac{\infty^{\frac{2}{3}}}{\infty} = \frac{1}{3} = 0. \text{ Jam vero membrum}$$

secundum Q vel habet eundem factorem $ay - bx$ vel minus.

minus. Sit posterius, atque ex æquatione $(ay - bx)^2$
 $M + Q + R + S + \text{etc} = 0$ deducitur $(ay - bx)^3 +$
 $\frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \text{etc} = 0$, quae æquatio eadem
 est cum sequente $(ay - bx)^3 + \frac{Q}{(by + ax)^2 M} (by + ax)^2 +$
 $\frac{R}{(by + ax) M} (by + ax) + \frac{S}{M} + \frac{T(by + ax)}{M} : (by +$
 $ax) + \text{etc}$. Relata nunc curva ad alium axem et posito
 $ay - bx = ug$ et $by + ax = tg$, ut ante; habemus $u^3 g^3 +$
 $Aggt + Bgt + C + \frac{D}{gt} + \frac{E}{g^2 t^2} + \frac{F}{g^3 t^3} + \text{etc}$,
 quia functiones nullius dimensionis ipsarum x et y ,
 $\frac{Q}{(by + ax)^2 M} (by + ax)^2$, $\frac{R}{(by + ax) M} (by + ax)$ etc, posito
 $\frac{b}{a}$ loco $\frac{y}{x}$ abeunt in quantitates constantes $A, B, C,$
 D , etc. Concluditur vero ex ista æquatione porro $u^3 +$
 $\frac{A}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3} + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$
 etc , ex qua fit $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} + \frac{B}{ggt} = \frac{C}{g^3 tt} + \text{etc} = 0$,
 id est $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} = 0$, quia sequentes termini omnes
 posito $t = \infty$ sunt $= 0$. Curva igitur tertii ordinis
 æquatione $\frac{u^3}{tt} + \frac{A}{g} = 0$ expressa est curvæ æquationis
 $+ Q + R + S + \text{etc} = 0$ asymtota, cujus talis est figu-
 ra, ut abscissis t super axe XY a puncto A sumtis, duos
 habeat ramos E et F in regionibus p et q in infinitum
 extensos.

§. 12.

Quodsi membrum secundum Q habeat factorem $ay - bx$; vel simul factorem $(ay - bx)^2$, adgnoscat, vel fecus. Sit tantum divisibile per $ay - bx$, atque sequens membrum R vel factorem $ay - bx$ adgnoscat, vel fecus. Priori casu habemus æquationem $(ay - bx)^3 +$

$$\frac{Q}{(ay - bx)(by + ax)M} \propto (ay - bx)(by + ax) + \frac{R}{(ay - bx)M} (ay - bx) + \frac{S}{M} + \text{etc.}, \text{ vel posito } \frac{b}{a} \text{ lo-}$$

$$\text{co } \frac{y}{x}; (ay - bx)^3 + A(ay - bx)(by + ax) + B(ay - bx);$$

$$+ G + \text{etc.} \text{ Posteriori casu loco } \frac{R}{(ay - bx)M} (ay - bx)$$

$$\text{retineatur } \frac{R}{(by + ax)M} \propto (by + ax). \text{ Proinde perinu-}$$

$$\text{tatis coordinatis ut ante, habemus duas æquationes } g^3 u^3 + Aggut + Bgu + C + \text{etc} = 0 \text{ et } g^3 u^3 + Aggut + Bgt +$$

$$C + \text{etc} = 0, \text{ vel } u^3 + \frac{A}{g} ut + \frac{B}{gg} u + \frac{C}{g^3} + \text{etc}$$

$$= 0 \text{ et } u^3 + \frac{A}{g} ut + \frac{B}{gg} t + \frac{C}{g^3} + \text{etc} = 0, \text{ ex qui-}$$

$$\text{bus fiet priori casu } \frac{u^3}{t} + \frac{A}{g} u + \frac{B}{ggt} u + \frac{C}{g^3 tt} +$$

$$\text{etc} = 0, \text{ five } \frac{u^3}{t} + \frac{A}{g} u = 0, \text{ quia reliqui termi-}$$

$$\text{ni omnes sunt } = 0, \text{ ob } u \text{ vel finitum, vel infinitum or-}$$

$$\text{dinis inferioris quam } t. \text{ Hæc vero æquatio duplicem}$$

$$\text{præbet asyintotam, nempe } u = 0 \text{ et } \frac{uu}{t} + \frac{A}{g} = 0,$$

$$\text{alteram rectam, alteram parabolam. Posteriori casu ex æqua-}$$

æquatione $u^3 + \frac{A}{g}ut + \frac{B}{gg}t + \frac{C}{g^3} + \text{etc} = 0$ ha-

betur $\frac{u^3}{ut} + \frac{A}{g} + \frac{B}{ggut} + \frac{C}{g^3ut} + \text{etc} = 0$. Si igi-

tur u habet valorem infinitum, habetur $\frac{u^2}{t} + \frac{A}{g} =$

0 pro parabola. Si vero u est finitum, habetur $\frac{A}{g} + \frac{B}{ggut}$

$= 0$, seu $u = -\frac{B}{Ag}$ pro linea recta.

§. 13.

Quodsi membrum æquationis secundum Q habeat factorem $(ay - bx)^2$; prout R vel per $ay - bx$ sit divisibile vel non, iisdem quibus ante operationibus institutis prodeunt inter t et u sequentes duæ æquationes $u^3 +$

$\frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} = 0$, et $u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}t =$

0. Prior calius est pro tribus lineis rectis inter se pa-

rallelis, si omnes æquationis $u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u +$

$\frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta asympto-

ta, si duæ radices fuerint imaginariae. Posterior æquatio

$u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}t = 0$, vel $\frac{u^3}{t} + \frac{Au^2}{gt} + \frac{B}{gg} = 0$,

locum habere nequit, si u valorem habeat finitum, quia

esset $\frac{B}{gg} = 0$, quod impossibile. Si vero u habet valo-

rem infinitum $\infty^{\frac{2}{3}}$, fiet $\frac{u^2}{t} = 0$, proinde $\frac{u^3}{t} + \frac{B}{gg}$

$= 0$, æquatio pro alymtota curvilinea ordinis tertii, quæ
L 11 in

regionibus oppositis p et s duos habet ramos AE et AF in infinitum extensos. Cum igitur in eo casu, quo membrum æquationis supremum P habet tres factores æquales, curva quoque habere possit asymptotas rectas; naturam ramorum curvæ cum hisce rectis asymptotis convergentium ulterius scrutari conveniet. Singulos itaque casus ante evolutos ubi asymptotæ sunt rectæ figillatim perpendemus.

§. 14.

Habeat itaque primo membrum secundum Q factorem $ay - bx$, non vero tertium R, ita ut sit $Q = (ay - bx)N$, vel ugN , atque membra æquationis $P + Q + R + S + \text{etc} = 0$, sequentes habebunt formas.

$$P = at^{n-3}u^3g^3 + at^{n-4}u^4g^4 + at^{n-5}u^5g^5 + at^{n-6}u^6g^6 + \text{etc.}$$

$$M = at^{n-3} + at^{n-4}ug + at^{n-5}u^2g^2 + at^{n-6}u^3g^3 + \text{etc.}$$

$$Q = \beta t^{n-2}ug + \beta t^{n-3}u^2g^2 + \beta t^{n-4}u^3g^3 + \beta t^{n-5}u^4g^4 + \text{etc.}$$

$$N = \beta t^{n-2} + \beta t^{n-3}ug + \beta t^{n-4}u^2g^2 + \beta t^{n-5}u^3g^3 + \text{etc.}$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}ug + \gamma t^{n-4}u^2g^2 + \gamma t^{n-5}u^3g^3 + \text{etc.}$$

$$\text{Hoc vero casu, est } g^3u^3 + Agg + Bgt + C + \text{etc} = 0$$

$$\text{atque si } u \text{ infinitum, } \frac{u^2}{t} + \frac{A}{g} = 0 \text{ pro parabola. Si}$$

$$\text{vero } u \text{ finitum, } u + \frac{B}{Ag} = 0 \text{ pro linea recta. Habemus}$$

$$\text{autem } A = \frac{Q}{utggM} \text{ et } B = \frac{R}{tgM}, \frac{Q}{t^{n-2}} = \beta ug, \text{ et}$$

$$\frac{Mt}{t^{n-2}} = \alpha, \text{ proinde } \frac{Q}{Mt} = \frac{\beta ug}{\alpha}, \text{ et } A = \frac{\beta}{\alpha\gamma}. \text{ De-}$$

$$\text{inde est } \frac{R}{t^{n-2}} = \gamma \text{ et } \frac{Mt}{t^{n-2}} = \alpha, \text{ proinde } \frac{R}{Mt} =$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ et } \frac{R}{Mt} = \frac{\gamma}{\alpha}. \text{ Hinc } B = \frac{R}{Mtg} = \frac{\gamma}{\alpha g}. \text{ Ex}$$

his

his deducitur $\frac{B}{A} = \frac{\gamma}{ag} : \frac{\beta}{ag} = -\frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{B}{Ag} =$

$\frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{B}{Ag} = \frac{\gamma}{\beta g}$, atque ex æquatione $u + \frac{B}{Ag} = 0$

fit $u + \frac{\gamma}{\beta g} = 0$, seu $\beta g u + \gamma = 0$. Ponatur $-\frac{\gamma}{\beta g}$

$= c$, ut sit $u = c$, seu $u - c = 0$, æquatio cum hac $\beta g u + \gamma = 0$ identica, erit c intervallum quo hæc asymtota recta ab axe abscissarum t distat.

Quodsi jam æquatio $P + Q + R + S + \text{etc} = 0$ ordinetur secundum potestates ipsius t , fiet $(\beta g u + \gamma)t^{n-2} + (ag^3 u^3 + \beta u^2 g^2 + \gamma u g + \delta)t^{n-3} + (au^4 g^4 + \beta g^3 u^3 + \gamma u^2 g^2 + \delta u g + \varepsilon)t^{n-4} + \text{etc} = 0$. Posito itaque $t = \infty$, habetur $(\beta g u + \gamma) = u - c$, et scripto proinde in coefficientibus potestatum ipsius t , c loco u , fient isti constantes, et curva exprime-
tur hac æquatione $(u - c)t^{n-2} + At^{n-3} + Bt^{n-4} + Ct^{n-5} + Dt^{n-6} + \text{etc} = 0$, et captis abscissis in ipsa asymtota, i. e. scripto z loco $u - c$, fiet $zt^{n-2} + At^{n-3} + Bt^{n-4} + Ct^{n-5} + Dt^{n-6} + \text{etc}$, unde habentur æquationes $zt + A = 0$, $zt^2 + B = 0$, $zt^3 + C = 0$, usque ad $zt^{n-2} + K = 0$, prouti vel $A \neq 0$, vel $A = 0$, non evanescente B , vel $B = 0$, non existente $C = 0$, et ita porro. Ex quibus æquationibus natura ramorum cum asymtota recta convergentium cognoscitur.

§. 15.

Secundus casus erat is, quo Q per $(ay - bx)^2$ et R per $(ay - bx)$ divisibile deprehenditur, quo casu est $g^3 u^3 + Aggu + Bgu + C = 0$. Constantes A, B, C , ex forma æquationis $P + Q + R + S + \text{etc} = 0$ generali, modo prorsus simili ei, quo in præcedentibus sumus usi, determinabuntur. Erunt enim formæ singulorum hujus æquationis terminorum sequentes. Quia est Q divisibile per $(ay - bx)^2$, ponatur $Q = (ay - bx)^2 N$, et quia R divi-

divisibile per $ay - bx$, fit $R = (ay - bx)L$, atque ex æquatione $(ay - bx)^3 M + (ay - bx)^2 N + (ay - bx)L + S +$

$T + \text{etc} = 0$ fiet ista $(ay - bx)^3 + \frac{(ay - bx)^2 N}{M} +$

$\frac{(ay - bx)L}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} + \text{etc} = 0$, ubi sunt $\frac{N}{M}$,

$\frac{L}{M}$, $\frac{S}{M}$, functiones nullius dimensionis variabilium

x et y , quae posita ratione $\frac{b}{a}$ loco rationis $\frac{y}{x}$ fiunt

quantitas constantes A, B, C . Habemus igitur $P =$
 $at^{n-3}u^3g^3 + at^{n-4}u^4g^4 + at^{n-5}u^5g^5 + at^{n-6}u^6g^6 + \text{etc.}$

$M = at^{n-3} + at^{n-4}ug + at^{n-5}u^2g^2 + at^{n-6}u^3g^3 + \text{etc.}$

$Q = \beta t^{n-3}u^2g^2 + \beta t^{n-4}u^3g^3 + \beta t^{n-5}u^4g^4 + \beta t^{n-6}u^5g^5 + \text{etc.}$

$N = \beta t^{n-3} + \beta t^{n-4}ug + \beta t^{n-5}u^2g^2 + \beta t^{n-6}u^3g^3 + \text{etc.}$

$R = \gamma t^{n-3}ug + \gamma t^{n-4}u^2g^2 + \gamma t^{n-5}u^3g^3 + \gamma t^{n-6}u^4g^4 + \text{etc.}$

$L = \gamma t^{n-3} + \gamma t^{n-4}ug + \gamma t^{n-5}u^2g^2 + \gamma t^{n-6}u^3g^3 + \text{etc.}$

$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}ug + \delta t^{n-5}u^2g^2 + \delta t^{n-6}u^3g^3 + \text{etc.}$

Ex his concluditur $\frac{N}{t^{n-3}} = \beta$, $\frac{L}{t^{n-3}} = \gamma$, $\frac{S}{t^{n-3}} = \delta$, $\frac{M}{t^{n-3}}$

$= \alpha$, proinde $\frac{N}{M} = \frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{L}{M} = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{S}{M} = \frac{\delta}{\alpha}$ hincque ex

æquatione $g^3u^3 + Aggu + Bgu + C = 0$ fiet $g^3u^3 +$
 $\frac{\beta}{\alpha} ggu + \frac{\gamma}{\alpha} gu + \frac{\delta}{\alpha}$, vel $ag^3u^3 + \beta ggu + \gamma gu$

$+ \delta = 0$, quae unam vel tres asymptotas rectas inter se
 parallelas exhibet, nisi duæ vel omnes hujus æquationis
 radices sint æquales, quo casu vel duæ vel omnes in
 unam coincidunt. Sit igitur primo c radix hujus æqua-

tionis, cui æqualem aliam non habet, ut fiat $au^3g^3 +$
 $\beta u^2g^2 + \gamma ug + \delta = (u - c)(fu^2 + gu + h)$, atque æqua-

equatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ secundum potestates ipsius x ordinata atque ubique posito $u = c$, factore $u - c$ excepto, invenietur hujusmodi æquatio $(u - c)t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \text{etc.} = 0$, unde concluduntur æquationes formæ $(u - c)t^k = K$ existente k numero minore quam $n - 2$.

§. 16.

Quodsi duæ æquationis $au^3g^3 + \beta u^2g^2 + \gamma ug + \delta = 0$ radices fuerint æquales, ita ut sit $au^3g^3 + \beta u^2g^2 + \gamma ug + \delta = (u - c)^2 \times (fu + g)$; ex æquatione $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ secundum potestates ipsius t ordinata posito ubique c loco u excepto $(u - c)^2$, invenitur æquatio $(u - c)^2t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + \text{etc.} = 0$, ex qua iterum concluduntur æquationes formæ $(u - c)^2t^k = K$ existente k numero minore quam $n - 2$. Restat casus, quo omnes æquationis $au^3g^3 + \beta u^2g^2 + \gamma ug + \delta = 0$ radices reales inter se sunt æquales, ex quo eodem modo ut ante obtinetur æquatio $(u - c)^3t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \text{etc.} = 0$, atque hinc ejusmodi habentur æquationes $(u - c)^3t + A = 0$, $(u - c)^3t^2 + B = 0$ usque ad $(u - c)^3t^{k-3} + K = 0$, prout vel non $A = 0$, vel solum $A = 0$, vel A et $B = 0$, et ita porro. Præbet autem F.302. æquatio $(u - c)^3t^k + K = 0$, seu posito $u - c = z$, ista

$z^3 = \frac{K}{t^k}$, si k fit numerus impar, duos ramos EX et FY

in regionibus oppositis P et S extensos. Si autem k fit numerus par, orientur duo rami EX et FY ad eandem F.303. asymlotæ rectæ XY partem excurrentes. Quando æquationis $P + Q + R + S + \text{etc.} = 0$ membrum secundum, tertium et quartum est $= 0$, et proinde in æquatione $u^3g^3 + Au^2g^2 + Bug + C = 0$ et $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; fiet $u^3g^3 = 0$, id est omnes tres asymlotæ rectilineæ in axem abscissarum t indicunt, et ramorum ad eundem convergentium natura concluditur ex æquatione gene-

$$\text{rali } u^3 + \frac{A}{g}u^2 + \frac{B}{gg}u + \frac{C}{g^3} + \frac{D}{g^4t} + \frac{E}{g^5t^2} +$$

$$\frac{F}{g^6t^3} + \text{etc} = 0, \text{ quae nunc mutatur in sequentem } u^3 +$$

$$\frac{D}{g^4t} + \frac{E}{g^5t^2} + \frac{F}{g^6t^3} + \frac{G}{g^7t^4} + = 0, \text{ ex qua nisi fit}$$

$$D = 0, \text{ habetur } u^3t + \frac{D}{g^4} = 0; \text{ si } D = 0, \text{ fit } u^3t^2 +$$

$$\frac{E}{g^5} = 0; \text{ si quoque } E = 0, \text{ habetur } u^3t^3 + \frac{F}{g^6} = 0, \text{ et}$$

ita porro. Istaе aequationes, quia inest potestas impar u^3 , semper sunt reales, ideoque certo ramos in infinitum extensos indicant. Ex omnibus, quae hucusque sunt exposita, satis patet, quomodo ulterius progredi possenius, si plures factores simplices supremi membri f inter se fuerint aequales. Quod adtinet ad factores inaequales, eorum quisque seorsum considerari atque linea recta asymptota una cum natura ramorum ad eandem convergentium definiri potest. Si duo factores fuerint aequales, per antecedentia inveniri potest curvae indoles. Casum, quo tres factores sunt aequales modo consideravimus; ex quo simul perspicitur, quemadmodum asymptotarum forma, si quatuor pluresve factores simplices in membro aequationis supremo fuerint aequales, investigari debeat.

§. 17.

Colligimus vero ex omnibus hisce, quae de natura ramorum in infinitum extensorum evolvimus, quod quidam eorum ad lineam aliquam rectam tanquam asymptotam convergant, uti fit in hyperbola, vel asymptotam rectam non habeant, uti parabola. Priori casu rami curvarum vocantur *hyperbolici*, posteriori vero *parabolici*. Utriusque classis innumerabiles dantur species. Ramorum hyperbolicorum species sequentibus exprimuntur

muntur aequationibus inter coordinatas t et u , si statuatur $t = \infty$,

$$\begin{array}{llll} ut = A & ut^2 = A & ut^3 = A & ut^4 = A \text{ etc} \\ u^2t = A & u^2t^2 = A & u^2t^3 = A & u^2t^4 = A \text{ etc} \\ u^3t = A & u^3t^2 = A & u^3t^3 = A & u^3t^4 = A \text{ etc} \\ \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} \end{array}$$

Ramorum parabolicorum species sequentibus indicantur aequationibus inter t et u , si $t = \infty$.

$$\begin{array}{llll} \frac{u^2}{t} = A, & \frac{u^3}{t} = A, & \frac{u^4}{t} = A, & \frac{u^5}{t} = A, \text{ etc} \\ \frac{u^3}{t^2} = A, & \frac{u^4}{t^2} = A, & \frac{u^5}{t^2} = A, & \frac{u^6}{t^2} = A, \text{ etc} \\ \frac{u^4}{t^3} = A, & \frac{u^5}{t^3} = A, & \frac{u^6}{t^3} = A, & \frac{u^7}{t^3} = A, \text{ etc} \\ \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} & \text{etc} \end{array}$$

Id enim notandum est, quod ob analogiam æquationis generalis $u^m t^n = A$ cum æquatione pro hyperbola Apolloniana $ut = A$, omnes curvæ ejusmodi æquatione expressæ dicantur *hyperbolæ* et quidem ordinis $m+n$. Sic

et ob analogiam æquationis generalis $\frac{u^m}{t^n} = A$ cum æquatione $\frac{u^m}{t} = A$, quæ est pro parabola Apollonia-

na, omnes curvæ ejusmodi æquatione expressæ dici solent *parabolæ*, et quidem ordinis m , quia æquatio quoque sequentem habere potest formam $u^m = At^n$ ita quidem, ut sit $m > n$. Litteræ m et n hic representant

numeros integros positivos, atque tam æquatio pro hyperbolis quam parabolis superiorum ordinum represen-

tari potest sub hac forma generali $u = At^{\frac{m}{n}}$ si n tam integrum negativum, quam positivum denotare ponatur, ubi prior casus est pro hyperbolis, posterior vero pro

parabolis. Quælibet autem æquationum, quæ sub hac formæ generali continentur, ad minimum duos exhibet ramos in infinitum extensos, si exponentium variabilium x et y non uterque fuerit numerus par. Si vero tam m quam n fuerit numerus par, vel nullum ramum infinitum præbet, vel quatuor, prout æquatio sit impossibilis vel realis.



SECTIO II.

DE

DIVERSIS LINEARVM TERTII ORDINIS SPECIEBVS.

§. 13.

Naturam atque numerum ramorum in infinitum extensorum merito essentielle linearum curvarum discrimen censeretur supra jam monuimus. Proinde ex hoc fonte summo cum jure desumitur ratio subdivisionis linearum cujusque ordinis in suas species diversas. Ex hoc fundamento enim primo resultat ipsa illa divisio linearum secundi ordinis in suas species. Quando nimirum supremum membrum æquationis pro lineis secundi ordinis generalis $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ nullos habeat factores simplices reales, curva nullos habet ramos infinitos, atque exinde nascitur prima species, quam *ellipsin* vocavimus, ad quam simul *circulus* pertinet. Quodsi duo supremi membri factores fuerint reales et inæquales, curva erit *hyperbola*, quæ duas habet asymptotas rectas et quatuor ramos infinitos; si vero duo factores æquales sint, curva erit *parabola*. Modo huic prorsus simili subdividi possunt lineæ algebraicæ tertii ordinis,

nis, quarum æquatio generalis hæc est $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x x + \delta x^3 + \epsilon y y + \zeta y x + \eta x x + \theta y + i x + k = 0$.
 Membrum hujus æquationis supremum $\alpha y^3 + \beta y x x + \gamma y x x + \delta x^3$, imparium est dimensionum, et proinde
 vel unum habet factorem simplicem realem, vel omnes
 tres ipsius factores simplices reales erunt. Pro-
 inde quatuor casus sequentes erunt evolvendi. I) Si
 unicus tantum adsit factor simplex realis. II) Si
 omnes tres sint reales, et inter se inæquales. III) Si
 duo factores fuerint æquales. IV) Si omnes tres facto-
 res fuerint æquales.

§. 19.

Immutentur coordinatæ eo modo, quo hoc in
 Sect. præc. factum est, atque hoc facto orta sit æquatio
 ista cum priori æque late patens: $\alpha t t + \beta t u + \gamma u^3 + \delta t t + \epsilon t u + \zeta u u + \eta t + \theta u + i = 0$, in qua æquatione
 membrum supremum $\alpha t t + \beta t u + \gamma u^3$ habet facto-
 rem realem u . Si igitur iste factor unicus adsit, quod
 evenit, si $\beta\beta < 4\alpha\gamma$, posito $t = \infty$, invenitur $\alpha u + \delta = 0$, quæ est æquatio pro asymptota recta. Conclu-

ditur ex hac æquatione valor $u = -\frac{\delta}{\alpha}$, qui bre-

vitatis gratia ponatur $= c$, ut habeatur $\alpha u + \delta = u - c$.
 Substitutis his valoribus æquatio secundum potestates ip-
 sius t ordinata sic mutatur: $\alpha (u - c)t^2 + (\beta c c + \epsilon c + \eta) t + \gamma c^3 + \zeta c^2 + \theta c + i = 0$, quæ est æquatio pro a-
 symptota curvilinea posito $t = \infty$. Tum enim habetur

$(u - c)t + \frac{\beta c c + \epsilon c + \eta}{\alpha} = 0$, si $\beta c c + \epsilon c + \eta$ non fue-

rit $= 0$. Si autem $\beta c c + \epsilon c + \eta = 0$, habemus $(u - c)t^2 + \gamma c^3 + \zeta c^2 + \theta c + i = 0$. Ex hisce deducuntur duæ pri-

mæ linearum tertii ordinis species. Nimirum

PRIMA SPECIES unicam habet asyintotam hyperbolicam speciei $ut = A$.

SECUNDA SPECIES unicam habet asyintotam hyperbolicam speciei $utt = A$.

§. 20.

Quodsi supremi æquationis membri tres factores simplices reales fuerint et inter se inæquales, quod evenit, si in æquatione $attu + \beta uu + \gamma u^3 + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + i = 0$ fuerit $\beta\beta > 4\alpha\gamma$; de unoquoque factore eadem sunt tenenda, quæ §. præc. de unico factore sunt exposita. Unusquisque scilicet suppeditat binos ramos hyperbolicos vel speciei $ut = A$, vel speciei $utt = A$, unde quatuor diversae species linearum tertii ordinis in hoc casu continentur, tribus asyintotis rectis utcunque ad se invicem inclinatis præditæ. Atque species istae sunt sequentes.

TERTIA SPECIES tres habet Asyintotas speciei $ut = A$.

QUARTA SPECIES tres habet asyintotas speciei $utt = A$.

QVINTA SPECIES duas habet asyintotas speciei $ut = A$ et unam speciei $utt = A$. Sexta species, quae in abstracto spectata possibilis esse videtur, ea est, quae duas habet asyintotas speciei $utt = A$, et unam speciei $ut = A$. Sed calculus monstrat, fieri non posse, ut duae asyintotae fiant formae $utt = A$, quin simul tertia eandem formam induat.

§. 21.

Ad hoc ostendendum sumamus æquationem hanc latissime patentem $y (ay - \beta x) (\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + i = 0$, cuius supremum membrum tres habet factores reales. Factor y praebet asyintotam formae $ut = A$, si non fuerit, $\eta = 0$. Ut inveniatur, cuiusmodi asyintotam praebet factor $ay - \beta x$, ponamus y

$$= \frac{au + \beta t}{r(aa + \beta\beta)}, \text{ et } x = \frac{at - \beta u}{r(aa + \beta\beta)}, \text{ sitque bre-}$$

vitatis gratia $a^2 + \beta^2 = 1$, quod semper assumere licet atque aequatio sic transformabitur.

$$\begin{aligned} & \beta(\beta\gamma - a\delta)ttu + (2a\beta\gamma - (a\alpha - \beta\beta)\delta)tuu + a(a\gamma + \beta\delta)u^3 \\ & + \beta(a\epsilon + \beta\zeta)tt + (2a\beta\zeta + (a\alpha - \beta\beta)\epsilon)tu + a(a\zeta - \beta\epsilon)u^2 \\ & + (a\eta + \beta\vartheta)t + (a\vartheta - \beta\eta)u + 1 = 0 \end{aligned}$$

Factor itaque $ay - \beta x$ transiit in u , ex quo posito $t = \infty$ primum habetur $u = \frac{a\epsilon + \beta\zeta}{a\delta - \beta\gamma} = 5$. Quodsi hic

valor loco u in secundo termino substituaturs; inuenietur ex hoc factore $u = ay - \beta x$ asymptota formæ $ut = A$ nisi fuerit $\frac{a\eta + \beta\vartheta}{\beta} + \frac{(a\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(a\delta - \beta\gamma)^2} = 0$. Simi-

li modo factor $\gamma y - \delta x$ præbebit asymptotam formæ $ut = A$ nisi fuerit $\frac{\gamma\eta + \delta\vartheta}{\delta} + \frac{(a\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(a\delta - \beta\gamma)^2} = 0$.

Hinc patet, fieri utique posse, ut neque η , neque utraque formula jam inventa evanescat, unde tertia species possibilis erit. Quod ad speciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Asymptota formæ $utt = A$ prodeat, tum autem ambæ reliquæ expressiones in unam ϑ

$+ \frac{(a\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(a\delta - \beta\gamma)^2}$ coalescunt. Binæ igitur reli-

quæ asymptotæ omnino erunt formæ $ut = A$, nisi fuerit $\vartheta + \frac{(a\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(a\delta - \beta\gamma)} = 0$, unde et species quar-

ta est possibilis. Quodsi vero præter $\eta = 0$ una ex binis reliquis expressionibus ponatur $= 0$, simul altera evanescit, quam ob rem fieri non potest, ut duæ asymptotæ habeant formam $utt = A$, quin simul tertia eandem formam induat. Ex quo possibilitas quintæ perspicitur. Quæ vero sexta esse videtur, corrui.

§. 22.

Pervenimus ad casum tertium, quando membrum supremum habet duos factores u æquales. Aequatio generalis ad hunc casum pertinens est talis formæ $atu = \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \epsilon uu + \zeta t + \eta u + \theta = 0$ ubi membrum supremum habet duos factores u æquales, et tertium $au - \beta u$ reliquis inæqualem. Tertius iste factor ostendit asyintotam vel formæ $ut = A$, vel formæ $utt = A$, prouti hæc expressio $(a\delta + 2\beta\gamma)(a^2\epsilon + a\beta\delta + \beta\beta\gamma) - a^3(a\eta + \beta\zeta)$ vel non $= 0$ vel $= 0$ deprehendatur. Quod vero ad duos factores æquales attinet, erit vel $\gamma = 0$, vel $\gamma \neq 0$. Quodsi non fuerit $\gamma = 0$, facto $t = \infty$, fiet $auu + \gamma t = 0$, quæ est æquatio pro asyintota parabolica speciei $uu = At$. Hinc duæ novæ species linearum tertii ordinis ortum trahunt. Nimirum

SEXTA SPECIES habet unam asyintotam speciei $ut = A$ et unam asyintotam speciei $uu = At$

SEPTIMA SPECIES unam habet asyintotam speciei $utt = A$, et unam parabolicam speciei $uu = At$.

Quodsi fuerit $\gamma = 0$; factor tertius $at - \beta u$ dabit asyintotam formæ $utt = A$, si fuerit $\delta(a\epsilon + \beta\delta) = a(a\eta + \beta\zeta)$. Si vero hæc æqualitas non habeat locum, asyintotæ erit formæ $ut = A$. Habemus itaque hanc æquationem $atu - \beta u^3$

$$+ \delta tu + \epsilon uu = 0 \\ + \zeta t + \eta u \\ + \theta$$

Posito itaque $t = \infty$ fiet $auu + \delta u + \zeta = 0$. Si igitur sit $\delta\delta < 4a\zeta$, hinc nulla orietur asyintota. Proinde ex hoc casu duæ oriuntur species. Nimirum

OCTAVA SPECIES habet unicam asyintotam speciei $ut = A$

NONA SPECIES habet unicam asyintotam speciei $utt = A$.

Quas-

Quando est $\delta\delta < 4a\zeta$ et proinde duæ radices æquationis $auu + \delta u + \zeta = 0$ reales et inæquales, duæ prodibunt rectæ Asymptotæ inter se parallelæ formæ $ut = A$, qui casus denuo duas suppeditat species.

DECIMA nimirum SPECIES habet unam asymptotam speciei $ut = A$ et duas inter se parallelas speciei $ut = A$.

UNDECIMA SPECIES habet unam asymptotam speciei $ut = A$, et duas inter se parallelas speciei $ut = A$.

Si denique æquationis $auu + \delta u + \zeta = 0$ radices inter se fuerint æquales, quando nimirum $\delta\delta = 4a\zeta$, seu $auu + \delta u = a(u - c)^2$; fiet $at(u - c)^2 = \beta\zeta^3 - \epsilon c - \eta c - \vartheta$, unde oritur asymptota speciei $ut = A$. Habemus itaque duas species novas.

DUODECIMA SPECIES habet unam asymptotam speciei $ut = A$ et unam speciei $ut = A$.

DECIMATERCIA SPECIES habet unam asymptotam speciei $ut = A$ et unam speciei $ut = A$.

§. 23.

Supereft casus ultimus, quando nimirum omnes tres supremi membri factores æquales sunt. Tunc æquatio istam habet formam $au^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0$. Primum itaque spectandus est terminus βtt , qui si non desit, curva habebit asymptotam parabolicam speciei $u^3 = Att$, sicque oritur

DECIMAQUARTA SPECIES, quæ unicam habet asymptotam parabolicam speciei $u^3 = Att$.

Si desit terminus βtt ; erit $au^3 + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0$, unde posito $t = \infty$ fiet $au^3 + \gamma tu + \epsilon t = 0$ nisi sint γ et $\epsilon = 0$. Non igitur sit $\gamma = 0$, atque in hac æquatione duæ continentur aliæ $auu + \gamma t = 0$, et $\gamma u + \epsilon t = 0$, quarum prior est pro asymptota parabolica speciei $u = At$, posterior vero, si ponatur $\frac{t}{\gamma} = C$,

dabit

dabit aequationem $\gamma t (u - t) + \alpha c^3 + \delta c t + \zeta c + \eta = 0$, quae est pro asymptota hyperbolica speciei $ut = A$, Proinde

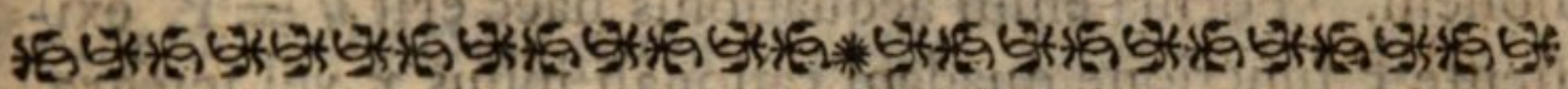
DECIMAQUINTA SPECIES unam habet asymptotam parabolicam speciei $uu = At$ et unam hyperbolicam speciei $ut = A$, sic ut axis parabolae parallelus sit alteri asymptotae rectae. Si denique sit etiam $\gamma = 0$, habemus ejusmodi aequationem $\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0$, ubi non potest esse $= 0$, nisi linea cesset esse curva. Facto $t = \infty$ necessario quoque u debet esse infinitum, et proinde fit $\alpha u + \epsilon t = 0$, quae praebet speciem ultimam, quae est

DECINASEXTA SPECIES unam habens asymptotam parabolicam speciei $u^3 = At$.

§. 24.

Omnes itaque lineae tertii ordinis optime dispefci possunt in sedecim classes. Neutonus quidem lineas tertii ordinis in species septuaginta duas divisit. Sed Summus hic Geometra non tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole specierum diversitatem desumfit, sed etiam ad figuram curvarum in spatio finito respexit. Videtur quidem haec divisionis ratio arbitraria esse; sed tamen ea, quam nos secuti sumus, absque dubio magis naturalis est, dum Neutonus suam rationem sequens multo plures species producere potuisset; methodo vero a nobis cum Summo EVLERO adhibita nec plures nec pauciores species erui possunt. Nihilo tamen minus quaelibet harum sedecim specierum multas comprehendit *subspecies* curvarum tertii ordinis, si eas curvas, quae in spatio finito notabiliter discrepant, a se invicem fecerere velimus. Quemadmodum vero hic species linearum tertii ordinis ex earum aequatione generali deduximus, ita etiam linearum quarti ordinis species ex aequatione generali cognosci poterunt: similique modo licebit, linearum quinti altiorisve ordinis species ex earundem aequatione generali concludere. Quoniam vero ex praecedentibus facile perspicitur, quemadmodum istae species

cies linearum altiorum ordinum investigari debeant; huic rei magis curiosae quam utili amplius immorari haud opus est.



SECTIO III.

DE

FIGVRIS CVRVARVM IN SPATIO FINITO.

§. 25.

Lineas curvas algebraicas in eodem plano descriptas ratione ramorum in infinitum excurrentium esse diversissimas hucusque demonstravimus. Multo magis vero ratione figurae in spatio finito a se invicem discrepant. Quin saepenumero difficillimum est, qualem curva quaedam proposita figuram habeat, ex aequatione cognoscere. Eum enim in finem opus est, ut pro quavis abscissa finita valores applicatae respondentes singuli eruantur, atque reales ab imaginariis discernantur. Quod negotium, si aequatio sit altioris cujusdam gradus, plerumque vires analyseos cognitae superat. Quod si enim abscissae tribuatur valor quicunque cognitus, applicata in aequatione vicem incognitae sustinet, et proinde resolutio aequationis pendeat a numero dimensionum, quem applicata obtinet. Ipsum vero hoc negotium per reductionem aequationis ad formam simpliciorum, dum et axis commodissimus et angulus coordinatarum aptissimus eligatur, valde sublevari potest. Quia etiam perinde est, utra coordinatarum pro abscissa accipiat, labor diminuetur, si ea coordinatarum, cujus paucissimae dimensiones in aequatione occurrunt, pro applicata assumatur,

§. 26.

§. 26.

Earum igitur curvarum figura omnium facillime cognoscetur, quae ejusmodi exprimuntur aequationibus, in quibus altera coordinata unicam tantum habet dimensionem. Forma enim aequationis haec erit $y = P$, existente P functione quadam rationali ipsius x vel integra, vel fracta. Quicumque enim valor realis ipsi x tribuatur, applicata y semper unum habebit valorem realem, et proinde curva continuo tractu axem utrinque in infinitum comitabitur. Si functio P sit fracta, fieri potest, ut applicata in uno pluribusve locis fiat infinita, ideoque curva asymptotam exhibeat; quod evenit, ubi denominator functionis P evanescit. Posito itaque $y =$

$\frac{P}{Q}$, atque ipsae applicatae curvae hujus infinitae cognos-

centur ex aequatione $Q = 0$. Quaelibet enim radix hujus aequationis, e. g. $x = f$ declarata, ad abscissam $x = f$ applicatam y fore infinitam, quia fit $Q = 0$. Praeter curvarum hujusmodi aequationibus expressarum quoque earum haud difficulter inveniuntur figurae, quae aequationibus

hujus formae exprimuntur, $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, si $P, Q,$

R , denotent functiones quascunque ipsius x rationales integras. Resolutio enim hujus aequationis quadraticae

$yy - \frac{2P}{Q}y + \frac{R}{Q} = 0$ ostendit, cuique abscissae x vel

geminam convenire applicatam, vel nullam. Ambae hu-

jus aequationis radices sunt $y = \frac{P}{Q} \pm \sqrt{\left(-\frac{R}{Q} + \frac{PP}{QQ}\right)}$

Duae itaque prodeunt applicatae, si $\frac{PP}{QQ} > \frac{R}{Q}$ vel,

si $PP > QR$. Si $PP < QR$, applicatae fiunt imaginariae.

In quolibet igitur limite, qui applicatas reales ab imagi-

nariis

ariis dirimit, fiet $PP = QR$, et proinde $y = \frac{P}{Q}$, id est ambae applicatae fiunt aequales, atque tum haec applicata curvam in unico puncto tanget. Quo igitur eo distinctius perspicui possit, quomodo ex aequationibus hujus formae de curvarum figuris judicandum sit, consideremus aequationem quandam specialem sub hac forma generali contentam.

§. 27.

Sit igitur $yy = \frac{2by + axx + cx + e - nnx^3}{x}$, ex

qua habetur $y = \frac{b \pm \sqrt{bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4}}{x}$.

Jam patet, quod omnibus ipsius x valoribus, qui functioni $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem positivum inducunt, duplex applicata respondeat. Quando haec functio $= 0$ evadit, unica tantum applicata y abscissae x convenit, seu binae applicatae inter se fiunt aequales. Si vero ista functio valorem negativum obtinet, abscissae nulla prorsus applicata respondet. Valores istius functionis si fuerint positivi in negativos abire nequeunt, nisi prius facti sint aequales seu functio evanuerit. Casus igitur isti potissimum erunt considerandi, quibus functio $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$. Certo hoc bis evenit, quoniam si x certum limitem sive positive, sive negative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Totam itaque curva determinatae abscissae parti respondebit, ultra quam applicatae fient imaginariae. Ad curvae proinde figuram cognoscendam consideretur aequatio $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4 = 0$, cujus singulae radices reales dabunt puncta in axe, ubi ambae applicatae fiunt aequales, seu ubi est limes applicatarum realium et imaginariarum. Ponamus functionem $bb + ex + cxx + ax^3 - nnx^4 = 0$ duas habere radices reales inaequales, seu duo-

bus tantum casibus evanescere posse, puta si $x = AP$ atque si $x = AS$; recta XY pro axe et A pro initio abscissarum sumtis, per totum spatium PS applicatae erunt geminae et reales, extra spatium PS vero omnes applicatae erunt imaginariae. Proinde tota curva intra applicatas Kk et Nn jacebit. Applicata vero in initio abscissarum A erit curvae asymptota, quae praeterea curvam in alio quodam puncto secabit. Posito enim x

$$= 0, \text{ fiet } r(bb + ex + cxx + ax^3 - mnx^4) = b + \frac{ex}{2b},$$

$$\text{ex quo deducitur } y = \frac{b \pm (b + \frac{ex}{2b})}{x}, \text{ id est, } y =$$

∞ et $y = \frac{-e}{2b}$. Proinde curva talem habet figuram, qualem Fig. 308. repraesentat.

§. 28.

F. 309. Quodsi aequatio $bb + ex + cxx + ax^3 - mnx^4 = 0$ quatuor habeat radices reales inaequales, et proinde quatuor casibus evanescat, si $x = AP$, $x = AQ$, $x = AR$ et $x = AS$; erunt puncta P , Q , R , S ista, in quibus geminae applicatae sunt aequales. Cum igitur applicatae per axis spatium XP fuissent imaginariae, per spatium PQ erunt reales, tum vero per spatium QR erunt iterum imaginariae, atque per RS rursus reales, extra S vero rursus fiunt imaginariae. Proinde curva duabus constabit partibus a se invicem separatis, quarum altera intra rectas Kk et Ll , altera inter Mm et Nn contineatur. Cum vero in abscissarum initio applicatae sint reales, necesse est, ut illud vel in axis intervallo PQ vel RS sit situm. Curva igitur eam, quam Fig. 309. repraesentat, figuram habet, constabit nimirum ex parte DE et ovali ab hac parte distante, quae *ovalis conjugata* dicitur. Si itaque duae radices aequationis $bb + ex + cxx + ax^3$

† $ax^3 - mx^4 = 0$ fiant inter se aequales, vel puncta P et Q, vel Q et R, vel R et S, coincidunt. Prior casus contingere non potest. Quia enim A inter P et Q jacet, utraque radix deberet esse x, quod quia b deesse nequit, fieri non potest. Sin autem puncta R et S conveniant, ovalis conjugata abit in punctum, quod *punctum conjugatum* vocatur. Quodsi puncta Q et R conveniant, ovalis cum reliqua curva sic conjungitur, ut prodeat *curva nodata* Fig 310. Intersectio enim duorum F. 310. curvae ramorum *Nodus* vocari solet. Si tres radices congruant, et proinde puncta Q, R et S in unum coalescant, nodus in *cuspidem* seu *punctum reflexionis* evanescet, qualem Fig. 310 repraesentat, F. 311.

§. 29.

Generatim jam ex his perspicitur, quid de figuris curvarum aequationibus formae $yy = \frac{2Py - R}{Q}$ expres-

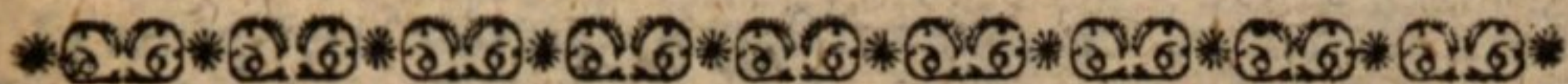
sarum sit sentiendum. Consideranda enim est aequatio $PP - QR = 0$, cujus singulae radices reales praebent loca, in quibus ambae applicatae aequales sunt. Notentur haec puncta in axe, atque si omnes radices reales fuerint inaequales, axis partes inter haec puncta contentae alternatim habebunt applicatas geminas reales et imaginarias. Proinde curva tot constabit partibus a se invicem sejunctis, quot hujusmodi alternationes adesse deprehenduntur, unde ovales conjugatae originem ducunt. Si aequationis $PP = QR = 0$ duae radices fiant aequales, punctorum in axe notatorum duo convenient, hincque in axe portio vel imaginarias vel reales habens applicatas evanescet. Priori casu curva prodibit nodata, posteriori ovalis conjugata in punctum conjugatum evanescet. Si aequatio ista tres habet radices reales et aequales, nodus in cuspidem abibit, atque si quatuor adfuerint radices aequales, vel duae ovales separatae con-
crescent in punctum, vel in ipsa cuspile dabitur nodus,

feu duae cuspides ad verticem oppositae. Si quinque radices aequales adfuerint, novae figurae fere non proveniunt. Cuspis enim oritur, in qua non una ut ante, sed duae ovaes in punctum coalescunt, neque etiam major radicum realium et aequalium multitudo novum figurarum discrimen producit.

§. 30.

Nodus seu interseccio duorum curvae ramorum vocari etiam solet *punctum duplex*, quia curva bis per illud punctum transit. Si per nodum alius curvae ramus transiret, tum in hac interseccione nasceretur *punctum triplex*. Si duo puncta duplicia conveniunt, oritur *punctum quadruplex*, ex quo genesis et natura *punctorum* quorumvis *multiplicium* perspicitur. Si aequatio, qua applicata y per abscissam x exprimitur, sit cubica vel altioris gradus, ita ut y aequetur functioni multiformi ipsius x , unicuique abscissae convenient vel tot applicatae, quot y in aequatione habet dimensiones, vel earum numerus erit binario minor, vel quaternario, vel senario, et ita porro. Perpetuo igitur binae applicatae simul imaginariae esse incipiunt, atque prius, quam imaginariae esse incipiunt, inter se fiunt aequales. Quare a transitu ab applicatis realibus ad imaginarias et ab imaginariis ad reales plures nascuntur varietates, quae partim cum explicatis conveniunt, partim ex iisdem sunt compositae. Quodsi autem pro plurimis abscissis tam affirmativis, quam negativis omnes quaerantur applicatae valores, per haec puncta inventa facile delineabitur curva, ejusque proinde figura cognoscetur.





SECTIO IV.

DE

TANGENTIBVS ET PVNCTIS MVLTIPPLICIBVS CVRVARVM.

§. 31.

Data aequatione inter coordinatas $AP=x$ et $PM=y$ five F.312.
orthogonales five obliquangulas, calculi differentialis

ope reperitur limes rationis $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, seu ultima ratio

$\frac{dx}{dy}$. Proinde hoc calculo in subsidium vocato deter-

minatio tangents curvae nulla laborat difficultate. *Quod-
si enim proposita sit curva quaecunque atque in eadem pun-
ctum aliquod M datum per quod ducenda est tangens;
ab eodem puncto M ad axem ducatur applicata*

MP , fiat $MT = y \frac{dx}{dy}$, = subtangenti (§. 277.)

et ducatur TM , erit haec recta tangens quaesita.

Inventa subtangente simul habetur tangens anguli
 MTP sub quo recta TM curvam tangens ad axem in-

clinata est. Fit enim $\text{tang } MTP = \frac{PM}{PT} = y : y \frac{dx}{dy}$

$= \frac{dy}{dx}$, si coordinatae inter se fuerint normales.

Quodsi coordinatae inter se fuerint obliquangulae, ex F.313.
puncto m ad MR axi parallelam ducatur normalis mQ ,
et ponatur angulus $mSp = mMK = \phi$, angulus vero mpB
 $= mRQ = \alpha$; erunt in triangulo mMR latera $MR = \Delta x$,
 $RM = \Delta y$ et angulus $MRm = 2R - \alpha$. Proinde est

M m m 3 tang.

tang. $mMR = \text{tang. } \phi = \frac{\Delta y \sin. \alpha}{\Delta x + \Delta y \cos. \alpha}$. Haec formu-

la igitur exhibet tangentem anguli, sub quo secans mS ad axem inclinata est. Decrescente Δx , crescit angulus ϕ , et posito $\Delta x = 0$, quo casu simul est $\Delta y = 0$, secans MS incidit in tangentem MT , et proinde jam est

angulus $\phi = MTP$ et $\text{tang } \phi = \frac{dy \sin. \alpha}{dx + dy \cos. \alpha}$.

§. 32.

F.312.

Quodsi ad rectam tangentem per punctum contactus ducatur normalis eadem recta et *curvae normalis* esse dicitur (§. 251. *Anal. Math.*). Positio hujus rectae quovis casu facile reperitur. Facilius autem habetur, si co-ordinatae AP et PM fuerint orthogonales. Sit enim primo recta Mn ad secantem Sm in puncto M normalis, erit triangulum rectangulum MPn simile triangulo rectangulo MRm . Quia enim in triangulis MRm et MSn angulus $mMR = MSn$, et apud M et R anguli recti, erit angulus $MnP = MmR$. Proinde habemus $MR : Rm =$

$MP : Pn$, id est $\Delta x : \Delta y = y : Pn$, ideo $Pn = y \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Decrescente Δx crescit angulus mMR , simulque angulus nMN decrescit; posito vero $\Delta x = 0$, Mn cum MN coincidit, et punctum n cum puncto N . Proinde habemus

$PN = y \frac{dy}{dx}$, quae ipsa formula supra *l. c.* ex formula pro subtangente deducta est. Hanc axis PN por-

tionem inter applicatam PM et normalem MN interceptam supra §. 251 *An. Math.* vocavimus *Subnormalem*.

Proposita igitur curva quadam et dato in eadem puncto quodam M , per quod ducenda sit normalis, ab eodem puncto M ad axem ducatur applicata orthogonalis MP , fiat PN

$= y \frac{dy}{dx}$, et ducatur MN , quae erit normalis quaesita.

In.

Inventa vero normali simul inventa est tangens, quia haec ad normalem in M est perpendicularis. Si vero subtangens jam ante fuerit inventa, pro coordinatis orthogonalibus ex inventa subtangente simul habetur subnormalis. Erit enim $PT : PM = PM : PN$, seu $PN =$

$$\frac{PM^2}{PT} = yy : y \frac{dx}{dy} = y \frac{dy}{dx}. \text{ Praeterea vero si an-}$$

gulus APM fuerit rectus, erit ipsa tangens $MT = \sqrt{PT^2 + PM^2}$, et normalis $MN = \sqrt{PM^2 + PN^2}$.

Quia etiam $PT : TM = PM : MN$, erit quoque $MN =$

$$\frac{PM \times TM}{PT} = \frac{PM}{PT} \sqrt{PT^2 + PM^2}.$$

§. 33.

Eidem abscissae $x = p$ respondere possunt una plures applicatae, atque ad cuiusvis adplicatae extremum curva habere potest rectam tangentem, ita ut ad eandem abscissam $x = p$, curva tot habeat tangentes, quot sunt valores respondentes applicatae y . Hinc porro concludimus, quod ad eandem abscissam diversi saepe inveniuntur valores pro subtangente, prouti alius vel alius applicatae valor pro y substituatur, quorum tamen valorum quandoque duo vel plures possunt esse coincidentes. Quando e. gr. NAM est parabola Apolloniana, cu- F.314.

jus aequatio est $yy = ax$, cuius abscissa x respondet duplex tangens TM et TN, pro quavis igitur tangente speciatim quaeri debet subtangens, quae tamen hoc casu eadem esse deprehenditur. Aequatione enim $yy =$

ax differentiata fit $2ydy = adx$, proinde $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$,
pro $PM = +y$, et $-\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{a}$ pro $PN = -y$. Est

vero $y \times \frac{2y}{a} = -y \times -\frac{2y}{a} = \frac{2yy}{a} = 2x$. Uterque

fius $\frac{dx}{dy}$ valor simul habetur, comparata aequatione differentiali cum algebraica pro parabola. Deducitur

enim ex aequatione $2ydy = adx$, ista $y = \frac{adx}{2dy}$, quo va-

lore in aequatione $yy = ax$ substituto habetur $\frac{aadx^2}{4dy^2} =$

ax , et proinde $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4ax}{aa} = \frac{4x}{a}$, et $\frac{dx}{dy} =$

$$\pm 2\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

§. 34.

Caeterum pro coordinatis orthogonalibus $AP = x$ et $PM = y$, si A sit curvae vertex et AB ad axem normalis, sequentes quoque habentur formulae. $AT = PT$

$$= AP = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}. \quad AB = \frac{ydx - ady}{dx},$$

quia $PT : AT = PM : AB$, id est $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - ydx}{dy} = y :$

$$AB = \frac{ydx - xdy}{dx}. \quad \text{Praeterea } TM = r(PT^2 + PM^2) =$$

$$r\left(\frac{yydx^2}{dy^2} + yy\right) = r\left(\frac{yydx^2 + yydy^2}{dy^2}\right) = \frac{yr(dx^2 + dy^2)}{dy},$$

vel $TM = \frac{ydu}{dy}$, si $r(dx^2 + dy^2) = du$. Porro $PT :$

$$AT = TM : BT, \text{ id est } \frac{ydx}{dy} : \frac{ydx - xdy}{dy} =$$

$$\frac{yr(dx^2 + dy^2)}{dy} : BT = \frac{(ydx - xdy) \cdot r(dx^2 + dy^2)}{dx dy}.$$

$$\text{Insuper } PT : TM = AP : BM, \text{ sive } \frac{ydx}{dy} : \frac{yr(dx^2 + dy^2)}{dy} =$$

=

$$\begin{aligned}
 &= x : BM = \frac{x\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}. \quad \text{Denique } MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{\left(yy + \frac{yydy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{\frac{yydx^2 + yydy^2}{dx^2}} = \\
 &\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}, \quad \text{atque } TN = PT + PN = \frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx} \\
 &= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dydx} = \frac{y(dx^2 + dy^2)}{dydx}.
 \end{aligned}$$

§. 35.

Quando abscissae x valor determinatus tribuitur, interdum accidit, ut duo vel plures applicatae y valores fiant aequales. Eo proinde casu ad idem curvae punctum, in quo plures applicatae aequales terminantur, plures inveniri debent rectae tangentes. Quae tamen

omnes generali formula subtangentis $y \frac{dx}{dy}$ indicantur.

Differentiata enim aequatione pro curva data tot inveniuntur valores pro $\frac{dx}{dy}$, quot curva ad idem punctum

habet subtangentes. Eum in finem considerata est differentia completa aequationis, quae pro curva data est proposita. Scriptis nimirum $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y , habetur aequatio pro curva hujus formae $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{etc} = 0$ (§. 415.). Ex qua primo con-

cluditur $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$. Si itaque inveniatur $A = 0$,

subtangens fit infinita, et proinde tangens axi parallela.

Si vero $B = 0$, ipsa applicata curvam tanget. Si vero

inveniatur $A = 0$ et $B = 0$, habemus aequationem se-

quentem $C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + \text{etc} = 0$

$H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3$ etc $= 0$, ex qua fit $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times$

$\frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$, quae aequatio duplicem pro $\frac{dx}{dy}$ exhibet valorem, et proinde duplicem quoque subtangentem. Duae hujus aequationis radices sunt $\frac{dx}{dy} = -$

$$\frac{D}{2C} \pm r \left(-\frac{E}{C} + \frac{DD}{4CC} \right).$$

§. 36.

Si igitur fuerit $\frac{E}{C} > \frac{DD}{4CC}$, vel quod eodem redit, si inveniatur $4CE > DD$, ambae radices sunt imaginariae. Ex quo concludendum est, punctum applicatae extremum ad curvam quidem pertinere, verum a reliqua curva sejunctum esse, quod igitur punctum conjugatum erit. Hic igitur ne idea quidem tangentis locum habet. Quodsi autem fuerit $4CE < DD$, aequatio

P.315. $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \times \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ duas habebit ra-

dices reales. Hinc duo curvae rami in M sese secabunt, ibique punctum duplex constituent. Si denique fuerit $4CE = DD$, ambae istae tangentes coincident, ex quo intelligitur, duos curvae ramos in M se invicem tangere, quo itaque casu iterum punctum M pro duplici

habendum erit. Quoties igitur $\frac{dx}{dy}$ datur per aequa-

tionem quadraticam, concludendum est, curvam in M punctum duplex habere, cujus tres dantur species diversae; vel ovalis in punctum evanescens, seu punctum conjugatum, vel duorum curvae ramorum intersectio mutua, seu nodus, vel duorum curvae ramorum conta-

ctus

Etus, quas diversas puncti duplicis species triplex aequationis $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} \propto \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ constitutio definit.

§. 37.

Si praeter coefficientes A et B etiam C, D, et E omnes fuerint = 0, relinquetur ista aequatio $F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + L\Delta x^3\Delta y + M\Delta x^2\Delta y^2 + N\Delta x\Delta y^3 + O\Delta y^4 + \text{etc} = 0$, ex qua deducitur

$$\frac{dx^3}{dy^3} + \frac{G}{F} \propto \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{H}{F} \propto \frac{dx}{dy} + \frac{I}{F} = 0.$$

Quae aequatio vel unam habet radicem realem et duas imaginarias, vel tres reales. In priori casu concludi debet, curvam habere unum ramum per punctum M transeuntem et praeterea ovalem conjugatam in puncto M evanescentem. In posteriori casu vero curva habebit tres ramos sese in puncto M vel secantes vel tangentes, prout illae radices fuerint vel inaequales vel aequales. Utroque igitur casu curva in M habebit punctum triplex. Evanescentibus jam praeter praecedentes etiam eorum terminorum coefficientibus, in quibus Δx et Δy tres habent dimensiones, invenietur aequatio

$$\frac{dx^4}{dy^4} + \frac{L}{K} \propto \frac{dx^3}{dy^3} + \frac{M}{K} \propto \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{N}{K}$$

$$\propto \frac{dx}{dy} + \frac{O}{K} = 0, \text{ ex qua punctum curvae M}$$

quadruplex erit judicandum, quia in eo vel duae ovaes conjugatae evanescent, quod evenit, si hujus aequationis radices omnes fuerint imaginariae; vel in M erit intersectio seu contactus duorum curvae ramorum cum puncto conjugato, quod evenit, si duae radices reales et duae imaginariae fiant. Denique in M erit intersectio quatuor ramorum curvae, si omnes radices hujus aequationis fuerint reales, intersectio autem duorum

rum vel trium vel omnium quatuor fiet contactus, si duæ, tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili ratione progrediendum erit, si etiam isti, in quibus Δx et Δy quatuor obtinet dimensiones, termini evanescant.

§. 38.

Hæc meditata suppeditant solutionem problematis sequentis. *Invenire æquationem generalem pro omnibus curvis, quæ non solum per punctum datum M transeant, sed etiam in M habeant punctum vel simplex vel duplex, vel multiplex quodcunque.* Positis enim $AP = p$, $PM = q$, si P , Q , R , S , etc. denotent functiones quascunque coordinatarum x et y ; hæc æquatio $(x - p)P + (y - q)Q = 0$ exprimet curvam per punctum M transeuntem. Posito enim $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$. Supponimus, quod neque P per $y - q$, nec Q per $x - p$ fuerit divisibile, ne factores $x - p$ et $y - q$, a quibus transitus curvæ per punctum M pendet, ex æquatione per divisionem eliminantur. Erit vero M punctum simplex, quia ob $p + dx = x$ et $q + dy = y$, fit $dx = x - p$, et $dy = y - q$, proinde $Pdx + Qdy = 0$, seu $\frac{dx}{dy} = -$

$\frac{Q}{P}$. Si M sit punctum duplex, æquatio pro curva in hac forma generali continebitur $P(x - p)^2 + Q(x - p)(x - q) + R(y - q)^2 = 0$, ex qua primo patet, posito $x = p$, fore $y = q$. Deinde substitutis dx et dy loco $x - p$ et $y - q$, fiet $Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$ vel $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Q}{P} \times \frac{dx}{dy} + \frac{R}{P} = 0$. Ex quo patet lineas secundi ordinis punctum duplex habere non posse. Si enim æquatio $P(x - p)^2 + Q(x - p)(x - q) + R(y - q)^2 = 0$ secundi gradus sit, quantitates P , Q , et R erunt constantes, quo casu æquatio non erit pro linea curva,

curva, sed pro duabus rectis. Si M esse debeat punctum triplex, natura curvæ sequente exprimitur æquatione $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$, quæ si esse debeat tertii ordinis, quantitates P, Q, R, S , etc. debent esse constantes. Eo autem casu æquatio tres haberet factores simplices formæ $\alpha(x-p) + \beta(y-q) = 0$, ideoque esset pro tribus lineis rectis. Curvæ igitur quarto ordine inferiores punctum triplex non habent. Si æquatio curvæ sub hanc contineatur forma $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, curva in M habebit punctum quadruplex, quæ vero ad altiore[m] quam quartum ordinem pertinere debet, quia si P, Q, R, S, T sint constantes, æquatio erit pro quatuor rectis. Proinde linea curva simplicissima, quæ punctum habet quadruplex, ad ordinem quintum pertinet. Simili modo æquationes generales exhiberi possunt pro lineis, quæ in M habeant punctum quintuplex vel multiplex aliud quodcunque.

§. 39.

Quodsi autem M fuerit punctum utcunque multiplex, vel totidem curvæ rami se mutuo in puncto M secabunt, vel tangent; vel si numerus ramorum se interfecantium sit minor; unum vel plura puncta conjugata in punctum M concident, qui curvæ status ex ante traditis cognoscetur. Scriptis enim in functionibus P, Q, R, S , etc. p loco x , et q loco y , dx vero et dy loco factorum $x-p$ et $y-q$, prodibunt ejusmodi æquationes, quales supra jam consideravimus. Ceterum licet curva tertii ordinis habere possit unum punctum duplex, eadem tamen uno plura puncta duplicia habere nequit. Ponamus enim, quod duo habeat puncta duplicia atque recta per duo hæc puncta ducta curvam in quatuor punctis secaret, quod naturæ curvarum tertii ordinis repugnat. Pari ex ratione linea quarti ordinis duo tantum ha-

bere

habere potest puncta duplicia; linea quinti ordinis pluribus habere non poterit, et ita porro. Deinde cum linea curva simplicissima puncto triplici gaudens sit quarti ordinis tamen nec linea quarti nec quinti ordinis duo habere potest puncta triplicia, alias daretur recta curvam quarti vel quinti ordinis in sex punctis secans, quod impossibile est. Potest vero linea sexti ordinis duo puncta triplicia habere. Duo puncta quadruplicia non cadent, nisi in lineas octavi aut altioris ordinis. Quæ ratiocinia ad reliqua puncta multiplicia facili applicari possunt negotio.

§. 40.

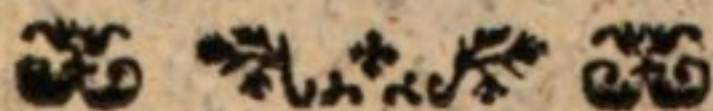
Similibus ratiociniis reperitur hujus problematis solutio: *Data est æquatio pro curva proposita, et quaeruntur ejus puncta multiplicia, si adsint.* Quaerenda nimirum est æquatio hujus curvæ differentialis completa formae $A dx + B dy + C dx^2 + D dx dy + E dy^2 + F dx^3 + G dx^2 dy + H dx dy^2 + I dy^3 + \text{etc}$, atque hoc facto poni debet $A = 0$ et $B = 0$, ex quibus duabus æquationibus cum data integrali conjunctis concluduntur valores pro x et y , pro quibus punctum curvæ est multiplex. Qui calculus si ad impossibilitatem quandam deducat, indicabit, curvam nullis punctis multiplicibus esse præditam. Quærat itaque valor ipsius x vel y ex una earum trium æquationum quæ simplicior est reliquis. Inventus iste valor substituatur in duabus reliquis, tuncque harum æquationum radices communes quærantur, quæ dabunt valores pro x et y punctis multiplicibus respondentes. Si igitur istæ æquationes nullam radicem communem agnoscant, vel calculus alias ad impossibilitatem quandam deducat, curva nullum punctum multiplex agnoscat. His peractis ad dijudicandum, an punctum multiplex, si quod adsit, duplex vel triplex sit, vel aliud quodcunque multiplex; valores pro x vel y inventi substituuntur in functionibus C, D , et E ; qui nisi omnes evanescant, ex eo concludendum est, punctum esse duplex. Si vero

$C, E,$

C, D, et E pariter evanescant, in iudicando ulterius est progrediendum, et valor pro x vel y inventus in functionibus F, G, H, I, substituendus. Quo facto nisi hæ functiones omnes evanescant, punctum erit triplex. Eo autem casu quo istæ quoque functiones omnes evanescunt, sequentium terminorum coefficientes spectari debent, atque eodem modo ut ante concludi.

§. 41.

Datur hæc æquatio pro curva $y^4 + 4ay^3 + 2y^2x^2 + ayxx - 3a^3y + x^4 - 4a^2x^2 + 8a^3x - 8a^4 = 0$, cuius differentialis invenitur $(4y^3 + 12ay^2 + 4yxx + 4axx - 8a^3) dy + 4yyx + 8ayx + 4x^3 - 8aax + 8a^3) dx + (6yy + 12ay + 2xx) dy^2 + \text{etc} = 0$. Ideo poni debet $y^3 + 3ayy + yxx + axx - 2a^3 = 0$ et $yyx + 2ayx + x^3 - 2aax + 2a^3 = 0$. Prima harum æquationum divisibilis est per $y + a = 0$, et quoque est $yy + 2ay - 2aa + xx$. Ergo debet esse $y = -a$ et $xx = 2aa - 2ay - y^2$. Hic autem valor pro xx in altera substitutus eam reducit ad sequentem $2a^3 = 0$, quod impossibile est, quia est a quantitas data. Proinde hæc æquatio nullum punctum multiplex indicat. Si vero $-a$ pro y substituaturs tam in æquatione pro curva data, quam in altera per calculum differentialem inventa, reperientur æquationes $x^4 - 6aaxx + 8a^3x - 3a^4 = 0$ atque $x^3 - 3aax + 2a^3 = 0$, quae radicem communem $x = a$ adgnoscent. Substitutis jam valoribus $x = a$ et $y = -a$ in datis tribus æquationibus, quia omnes nihilo sunt æquales, casu $x = a$ et $y = -a$, curva habet punctum multiplex. Substitutis denique his valoribus in coefficiente ipsius dy^2 , qui erat $6yy + 12ay + 2xx$, quia is reduciturs ad $-4aa$; punctum curvæ inventum erit duplex.





SECTIO V.

DE

CURVATURA CURVARVM.

§. 42.

318. **P**roposita sit curva quaecunque algebraica *nm* ad axem *TN*, abscissam $AP = x$ et applicatam $PM = y$ relata, atque æquatio pro hac curva data positæ $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y , sequentem habebit formam $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{etc} = 0$, quo facto si x et y habeantur pro constantibus, hæc æquatio exprimet naturam ejusdem curvæ ad axem *MR* priori *TN* parallelum et abscissarum initum *M* relata, ita ut novæ coordinatæ sint $Mq = \Delta x$ et $qm = \Delta y$. Sumamus igitur jam normalem *MN* pro axe, in quam ducatur ex *m* applicata normalis *mr*, ac vocetur abscissa $Mr = r$ et applicata $rm = s$, atque eodem modo ut supra §. 3. invenietur

$$\Delta x = \frac{-Ar + Bs}{r(A^2 + B^2)} \text{ et } \Delta y = \frac{-As - Br}{r(A^2 + B^2)}, \text{ proinde}$$

$$r = \frac{-A\Delta x - B\Delta y}{r(A^2 + B^2)} \text{ et } s = \frac{B\Delta x - A\Delta y}{r(A^2 + B^2)}. \text{ Aequatio ve-}$$

ro curvæ ad axem *MR* relatæ erat $-A\Delta x - B\Delta y = C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + \text{etc}$, ex qua valoribus, qui pro Δx et Δy inventi sunt, substitutis, fiet $r r(A^2 + B^2) = \alpha rr + \beta rs + \gamma ss + \delta r^3 + \epsilon r^2s + \zeta rs^2 + \eta s^3 + \text{etc}$, ubi $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc}$. brevitatis gratia pro coefficientibus singulorum terminorum adhibentur. Fit vero ex ista æquatione $r(A^2 + B^2) = \alpha r + \beta s +$

$$\gamma \frac{ss}{r} + \delta r^2 + \epsilon rs + \zeta s^2 + \eta \frac{s^3}{r} + \text{etc. quæ igitur est}$$

æqua-

æquatio exprimens naturam datæ curvæ ad normalem MN tanquam axem et initium abscissarum M relatae. Quo minor itaque abscissa r statuatur, eo magis accedit valor ipsius $r(A^2 + B^2)$ ad $\gamma \frac{s^2}{r}$, et proinde si ad eundem axem MN, idemque initium abscissarum M descripta sit curva æquatione $r(A^2 + B^2) = \gamma \frac{s^2}{r}$ expressa; hæc curva erit limes, ad quem proposita continuo propius accedit. Propositæ itaque curvatura eo minus a curvatura curvæ $r(A^2 + B^2) = \gamma \frac{s^2}{r}$ diversa erit, quo propius accedit ad punctum M. Posito $r = 0$, quo casu etiam erit $s = 0$; fit $r(A^2 + B^2) = \gamma \frac{s^2}{r}$ unde concludendum est, curvæ propositæ curvaturam in ipso puncto M eandem esse cum curvæ $r(A^2 + B^2) = \gamma \frac{s^2}{r}$ curvatura. Ejusmodi curva, quæ cum alia data in dato puncto eandem habet curvaturam dicitur *curva osculans*. Posito itaque $r = 0$, et proinde quoque $s = 0$, habetur æquatio pro curva datam *nm* in M osculante. Supponimus enim, non esse $\gamma = 0$. Quodsi enim hoc accadat, foret $r(A^2 + B^2) = \eta \frac{s^3}{r}$, vel quoque η existente $= 0$, habebitur $r(A^2 + B^2) = \mu \frac{s^4}{r}$, et ita porro. Sic ut forma æquationis generalis pro curva datam in dato puncto osculante sit $r(A^2 + B^2) = \mu \frac{s^k}{r}$, existente k numero integro positivo. Quare curva datam in dato puncto osculans, quæ hac methodo invenitur semper erit curva ex genere parabolico.

§. 43.

Ponamus igitur primo, non esse $\gamma = 0$, atque cum calculo, quem substitutio valorum $\Delta x = \frac{-Ar + Bs}{r(A^2 + B^2)}$

et $\Delta y = \frac{-As - Br}{r(A^2 + B^2)}$ postulat, instituto, inveniatur

$$\gamma = \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2 + B^2}; \text{ æquatio } r(A^2 + B^2) =$$

$$\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2 + B^2} \times \frac{ss}{r} \text{ vel } ss = \frac{(A^2 + B^2) r(A^2 + B^2)r}{A^2E - ABD + B^2C}$$

exprimet naturam curvae propositam in dato puncto M osculantis, quæ igitur erit pro parabola Apolloniana,

$$\text{cujus parameter est } = \frac{(A^2 + B^2) r(A^2 + B^2)}{A^2E - ABD + B^2C}. \text{ Proin-}$$

de qualis est curvatura hujus parabolæ in vertice, talis erit curvæ propositæ curvatura in puncto M. Cum autem nullius curvæ curvaturam distinctius cognoscamus, quam circuli, quia ejusdem curvatura ubique est eadem, eoque major, quo minor est radius; Geometræ solent curvaturam curvarum definire per circulum æqualis curvaturæ, qui *circulus osculator* vocari solet. Definendus igitur erit circulus, cujus curvatura conveniat cum curvatura propositæ parabolæ in ipsius vertice, ut circulum istum in locum parabolæ osculantis substituere liceat. Ut vero hæc investigatio eo distinctius intelligatur, adtendi debet ad sequentia.

§. 44.

Unius ejusdemque circuli curvatura ubique est eadem. Crescente vero radio circuli ejusdem curvatura decrescit, et decresciente radio crescit ejus curvatura, ita ut duorum circulorum curvaturæ sint inverse ut radii. Si ABD et abd sint duo circuli inæquales, quorum radii sunt AC et ac, sitque $AC : ac = m : n$; in
peri-

peripheriis horum circulorum capiantur duo arcus æquales AB , ab , erit curvatura ipsius AB ad curvaturam arcus ab ut ac ad AC , ita ut arcu AB habente curvaturam n graduum, vel minutorum, vel aliarum partium peripheriae, arcus ab habeat curvaturam m graduum vel minutorum. Capiatur enim arcus $A\beta$ similis arcui ab , erit $A\beta : ab = ABD : abd$; cum vero sit $ABD : abd = AC : ac = m : n$, erit $A\beta : ab = m : n$, vel $A\beta : AB = m : n$, quia $AB = ab$. Proinde arcus $A\beta$ arcui ab similis si sit m graduum, vel partium peripheriae quarumcunque, erit AB arcus n graduum vel aliarum partium. Curvatura itaque ipsius ab est ad curvaturam arcus AB uti m ad n .

§. 45.

Sit MT recta, quae curvam Mm ad abscissam AP F.317. $= x$ et applicatam $PM = y$ relata in puncto M tangat. Per M ducatur recta MB tangenti MT normalis, atque in hac normali ad eam partem, ad quam curva concava est, sumatur punctum quodcunque C , ex quo tanquam centro et radio CM describatur circulus MmB , atque recta MT non tantum curvae Mm , sed et hujus circuli MmB tangens erit. Cadit vero aut pars circuli intra rectam tangentem et curvam, aut non. Si prius sit; circulus a sua tangente minus deflectit, quam curva in puncto M deflectit a tangente et proinde curva apud M majorem habet curvaturam, quam circulus. Secabit vero hoc casu circulus curvam in puncto quodam m , atque curvatura circuli eo magis accedet ad curvaturam curvae in M , quo minus punctum m ab M distat. Decrescente radio circuli, crescit ejus curvatura, et punctum m ad punctum M accedit. Sic circulus radio DM descriptus fecabit curvam in puncto μ puncto M propiori. Simulac vero punctam μ cum puncto M coincidit, circuli curvatura cum curvae Mm in puncto M curvatura coincidit. Circulus iste, qui eandem cum curva Mm in dato puncto M habet curvaturam

rain est *circulus osculator*, et radius ejusdem vocari solet *radius osculi* seu *radius curvaturae*. Dato igitur radio circuli osculatoris in duobus curvae punctis diversis, erunt curvaturae ejusdem illius curvae in hisce punctis inverse, ut radii osculi.

§. 46.

Contemplemur itaque curvaturam circuli tanquam incognitam, eamque modo expofito per curvaturam parabolaе, exprimamus. Ita enim vicissim pro parabola osculante circulus osculator substitui poterit. Quod si vero data curva *nm* fit circulus radio = *a* descriptus, cujus natura sumpta $AP = x$ et $PM = y$ exprimitur aequatione $yy = 2ax - xx$; positis $x + \Delta x$ loco x et $y + \Delta y$ loco y fiet $2a\Delta x - 2x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$. Comparetur haec aequatio cum superiori forma generali, et erit $A = 2a - 2x$, $B = -2y$, $C = -1$, $D = 0$, et $E = -1$, ex quo fit $A^2 + B^2 = 4(aa - 2ax + xx + yy) = 4aa$, $(A^2 + B^2) \sqrt{A^2 + B^2} = 8a^3$, et $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Ex quo concluditur, circulum, cujus radius = *a*, in quovis puncto osculari parabolaе verticem, cujus natura exprimitur aequatione $ss = 2ar$, id est verticem talis parabolaе, cujus parameter duplo radio circuli aequalis est. Vicissim igitur, quam curvam osculatur vertex parabolaе $ss = br$, eandem osculabitur circulus, cujus radius est = $\frac{1}{2}b$. Generaliter vero quamcunque curvam *nm* osculatur vertex parabolaе, cujus aequatio est $ss =$

$\frac{(A^2 + B^2) \sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 E - ABD + B^2 C}$. Proinde manifestum est, eandem curvam in eodem puncto *M* osculari circulum, cujus radius est = $\frac{(A^2 + B^2) \sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2 E - ABD + B^2 C)}$, qui radius circuli osculatoris vocari solet *radius osculi* vel *radius curvaturae*.

§. 47.

Ex æquatione $A dx + B dy + C dx^2 + D dx dy + E dy^2 + F dx^3 + G dx^2 dy + H dx dy^2 + I dy^3 + \text{etc} = 0$, quae est æquatio differentialis curvae completa, concluditur $B dy = -A dx - C dx^2 - D dx dy - E dy^2 - F dx^3 - G dx^2 dy - H dx dy^2 - I dy^3 - \text{etc}$, proinde $dy = -$

$$\frac{A}{B} dx - \frac{C}{B} dx^2 - \frac{D}{B} dx dy - \frac{E}{B} dy^2 - \frac{F}{B} dx^3 - \frac{G}{B} dx^2 dy - \frac{H}{B} dx dy^2 - \frac{I}{B} dy^3 - \text{etc.}$$

Cum igitur in casu quo $dx = 0$ et proinde $dy = 0$, quem hic consideramus, quando non est $A = 0$, et $B = 0$, fit

$$dy = - \frac{A}{B} dx; \text{ hic valor ubique loco } dy \text{ substitui potest, quo facto habebitur differentiale } dy \text{ completum}$$

$$\text{sub hac forma } dy = - \frac{A}{B} dx - \frac{C}{B} dx^2 + \frac{DA}{B^2} dx^2 -$$

$$\frac{EA^2}{B^3} dx^2 - \frac{F}{B} dx^3 + \frac{GA}{B^2} dx^3 - \frac{HA^2}{B^3} dx^3 + \frac{IA^3}{B^4} dx^3$$

$$- \text{etc} = - \frac{A}{B} dx + \left(- \frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} \right) dx^2 + \left(- \frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4} \right) dx^3 + \text{etc.}$$

$$\text{Quod si hæc}$$

cum formula generali supra inventa (§. 243. A.) $dy = p dx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{6} r dx^3 + \frac{1}{24} s dx^4 + \text{etc}$, comparetur;

$$\text{erit } - \frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} = \frac{1}{2} q = \frac{ddy}{2 dx^2}, \text{ et proinde}$$

$$\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3} = - \frac{ddy}{2 dx^2}, \text{ et } 2 \left(\frac{C}{B} - \frac{DA}{B^2} + \frac{EA^2}{B^3} \right) = - \frac{ddy}{dx^2}.$$

§. 48.

Hic valor in formula pro radio curvaturae inventa potest substitui, atque ipse hic radius formula quadam differentiali generaliter definiri. Eum in finem notari

meretur, esse $A^2 + B^2 = B^2 \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right)$ et $r(A^2 + B^2) =$

$B r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right)$, proinde posito radio curvaturæ $= r$, habetur

$$r = \frac{B^3 \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right)}{2(A^2 E - ABD + B^2 C)} = \frac{\left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right)}{2 \left(\frac{A^2 E}{B^3} - \frac{AD}{B^2} + \frac{C}{B} \right)}.$$

Substituto itaque $-\frac{ddy}{dx^2}$ loco $2 \left(\frac{A^2 E}{B^3} - \frac{AD}{B^2} + \frac{C}{B} \right)$ in-

venitur $r = \frac{dx^2 \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right)}{-ddy}$. Denique est

$$dx^2 \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) = \frac{A^2}{B^2} dx^2 + dx^2 = dy^2 + dx^2 \text{ proinde}$$

$$dx r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) = r(dx^2 + dy^2), \text{ et } r \left(\frac{A^2}{B^2} + 1 \right) =$$

$$\frac{r(dx^2 + dy^2)}{dx}. \text{ Ex quibus valoribus substitutis obti-}$$

netur $r = \frac{(dx^2 + dy^2) r(dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$. Cum igitur

fit $r(dx^2 + dy^2)$ formula pro arcu curvae evanescenti

ds (§. 313. A.) habetur $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$, quae formu-

la differentiam Δx constantem supponit, facili vero negotio in aliam mutatur, quae eandem non supponit con-

constantem scripto $ddy = \frac{dyddx}{dx}$ loco ddy (§. 425.)

quo facto fit $r = \frac{ds^3}{-dxddy + dyddx}$.

§. 49.

Cum igitur formula pro radio curvaturæ proprie
fit ista $r = \frac{(dx^2 + dy^2)(\pm r dx^2 + dy^2)}{-dxddy}$, atque

factor $r(dx^2 + dy^2)$ ambiguitatem signi involvat; incertum est, utrum ista expressio sit affirmativa, an negativa. Priori enim casu concavitas curvae punctum N respicit, posteriori vero convexitas. Ad hoc dubium tollendum, abscissa $AP = x$ augeatur differentia quadam $Pp = \Delta x$, atque per p ducatur nova applicata pm , curvae apud m , et rectae curvam apud M tangenti apud μ occurrens, eritque punctum curvae m vel intra tangentem MT et axem TN positum, vel extra tangentem. Priori casu curva versus N erit concava, atque centrum circuli osculantis in recta MN portionem versus axem protensam incidet; posteriori casu curva versus N erit convexa, atque centrum circuli osculantis cadit in portionem rectae MN versus M productam. Omnis igitur dubitatio corruet, si inquiretur, utrum qm sit minor, quam $q\mu$, an major. Priori enim casu curva versus N erit concava, et posteriori convexa. Est ve-

$$ro \ qm = \Delta y = -\frac{A}{B}\Delta x + \left(-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3}\right)$$

$$\Delta x^2 + \left(-\frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3} + \frac{IA^3}{B^4}\right)\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Deinde ob similitudinem triangulorum MTN et μMq habetur $MT : MN = Mq : q\mu$ et proinde $q\mu = \frac{MN \times Mq}{MT}$. Cum igitur fit $MN = \frac{yr(dx^2 + dy^2)}{dx}$ et

$$MT = \frac{yr(dx^2 + dy^2)}{dy}, \quad (\S. 34.) \text{ fiet } \frac{MN}{MT} = \frac{dy}{dx},$$

$$\text{proinde } q\mu = \frac{dy}{dx} Mq = \frac{dy}{dx} \Delta x, \text{ et quia } \frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}, \text{ ob-}$$

$$\text{tinetur } q\mu = -\frac{A}{B} \Delta x, \text{ et proinde } qm = q\mu + (-$$

$$\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3}) \Delta x^2 + (-\frac{F}{B} + \frac{GA}{B^2} - \frac{HA^2}{B^3}$$

$$+ \frac{IA^3}{B^4}) \Delta x^3 + \text{etc.} \quad \text{Concludimus igitur ex hisce sequens}$$

criterium, ex quo dijudicari potest, utrum curva ver-

fus N convexa an concava sit: Si fuerit $-\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2}$

$$-\frac{EA^2}{B^3} \text{ vel } \frac{-B^2C + BDA - EA^2}{B^3} \text{ quantitas negativa,}$$

curva versus N est concava: si vero eadem quantitas prodeat positiva, curva versus N convexa erit. Cum

$$\text{igitur sit } -\frac{C}{B} + \frac{DA}{B^2} - \frac{EA^2}{B^3} = \frac{ddy}{2dx^2}, \text{ eadem re-}$$

gula quoque ad formulam differentialem pro r inventam applicata hæc erit: Si inveniatur $\frac{ddy}{2dx^2}$ quantitas nega-

tiva, curva versus N concava est; si vero sit $\frac{ddy}{2dx^2}$ quantitas positiva, curva versus N convexa est. Pro

$$\text{priori itaque casu habemus } r = \frac{ds^2}{-dxddy} \text{ et pro poste-}$$

$$\text{riori } r = \frac{ds^3}{dxddy}.$$

§. 50.

F. 319.

Sit proposita ellipsis CD, ad axem transversum
AD

AD et abscissarum initium A, quod centrum curvæ est, relata, pro qua æquatio inter coordinatas orthogonales AP et PM est $aayy + bbxx = aabb$; quærendus sit radius osculi hujus curvæ. Differentiata æquatione habetur $2aaydy + 2bbxdx + aady^2 + bbdx^2 = 0$, quæ æquatio cum formula generali comparata dat $A = 2bbx$; $B = 2aay$ $C = bb$, $D = 0$, $E = aa$. Proinde habemus

$$\frac{-AAE + ABD - B^2C}{B^3} = \frac{-4b^4x^2aa - 4a^4y^2bb}{8a^6y^3}$$

$$= \frac{-4aabb(aayy + bbxx)}{8a^6y^3} = \frac{-4a^4b^4}{8a^6y^3}, \text{ quæ est quanti-}$$

tas negativa et proinde indicat, curvam versus axem cavam esse. Deinde est $A^2 + B^2 = 4(a^4yy + b^4xx)$, et $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$, proinde

$$\frac{(A^2 + B^2) \sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)} = \frac{8(a^4yy + b^4xx) \sqrt{a^4yy + b^4xx}}{9a^4b^4}$$

$$= \frac{(a^4yy + b^4xx)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \text{radio osculi.} \quad \text{Quia præterea}$$

est $PN = y \frac{dy}{dx}$, atque ex æquatione ellipseos differen-

$$\text{tiali concludatur } \frac{dy}{dx} = \frac{2bbx}{2aay} = \frac{bbx}{aay} \text{ hincque}$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{bb}{aa} x = PN; \text{ fiet } MN = \sqrt{yy + \frac{b^4}{a^4}}$$

$$xx) \text{ et proinde } aa \times MN = aa \sqrt{yy + \frac{b^4}{a^4}} xx = \sqrt{a^4}$$

$$yy + b^4 xx). \text{ Ideo est } r = \frac{a^6 \times MN^3}{a^4b^4} = \frac{a^2 \times MN^3}{b^4}.$$

Quodsi nunc in normalem MN productam ex centro A

$$\text{ducatur perpendicularis AO, fiet } AN = x - \frac{bb}{aa} x,$$

et triangulum MNP $\propto$ triang. ANO, proinde MN : NP

$$= AN : NO \text{ et } NO = \frac{NP \propto AN}{MN} = \frac{\frac{bb}{aa} x \times x - \frac{bb}{aa} x}{r \left(yy + \frac{b^4}{a^4} x^2 \right)}$$

$$= \frac{\frac{bb}{aa} xx - \frac{b^4}{a^4} xx}{r \left(yy + \frac{b^4}{a^4} xx \right)} = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4 r \left(yy + \frac{b^4}{a^4} xx \right)} = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4 \times MN}$$

ex quo fit NO $\propto$ MN = $\frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4}$, et NO $\propto$ MN

$$+ MN^2 = \frac{aabbxx - b^4 xx}{a^4} + yy + \frac{b^4}{a^4} xx = \frac{bb}{aa} xx - \frac{b^4}{a^4} xx + yy + \frac{b^4}{a^4} xx = yy + \frac{bbxx}{aa} = \frac{aayy + bbxx}{aa};$$

proinde NO + MN = MO = $\frac{aayy + bbxx}{aa \times MN}$. Ex æqua-

tione vero $aayy + bbxx = aabb$ est $\frac{aayy + bbxx}{aa} = bb$,

ideo erit MO = $\frac{bb}{MN}$, et MN = $\frac{bb}{MO}$. Erat vero r =

$$\frac{a^2 \times MN^3}{b^4}, \text{ ex quo concluditur } r = \frac{a^2 b^5}{MO^3 \times b^4} = \frac{aabb}{MO^3}.$$

6. 51.

5.318.

Ex æquatione generali pro parabola osculatrice $ss = ar$, inquam æquatio pro curva data nm mutatur, posito $r = 0$ et $s = 0$, supposito, quod non sit $y = 0$, patet, curvam ad utramque axis MN partem versus axem esse curva-

curvatam. Curva enim *nm* circa punctum *M* cadit intra parabolam osculantem et tangentem *Tμ*. Proinde cum unicuique abscissae positivæ *r* duplex respondeat applicata $\pm \sqrt{ar}$ altera positiva altera negativa, ad abscissam $-r$ vero omnes applicatae sint imaginariæ, curva apud *M* ad utramque hujus puncti partem versus axem cava erit, et uterque curvæ ramus *Mm* et *Mn* versus eandem tangentis partem cadet. Quodsi in æquatione vero supra inventa pro curva *nm* ad axem *MN* relata

$$(\S. 42.) r(A^2 + B^2) = ar + \beta s + \gamma \frac{s^2}{r} + \delta r^2 +$$

$$\epsilon rs + \zeta s^2 + \eta \frac{s^3}{r} + \text{etc, fit } \gamma = 0, \text{ pro curva osculante}$$

$$\text{est } r(A^2 + B^2) = \eta \frac{s^3}{r}, \text{ quæ erit parabola cubica.}$$

$$\text{Est vero } \gamma = \frac{A^2 E - ABD + B^2 C}{A^2 + B^2}, \text{ proinde fit } \gamma = 0,$$

si $C = 0$, $D = 0$, et $E = 0$, et æquatio pro curva ad axem *MR* relata erit $-A\Delta x - B\Delta y = F\Delta x^3 + G\Delta x^2 \Delta y + H\Delta x \Delta y^2 + I\Delta y^3 + \text{etc.}$ Cum igitur sit radius cur-

$$\text{vaturæ} = \frac{r(A^2 + B^2)}{2\gamma}, \text{ patet eundem hoc casu esse}$$

infinitum, quod tantum rectam tangentem indicat recta enim circulum tangens limes est, ad quem circulus continuo accedit, crescente ejus radio. Curva vero osculans continebitur æquatione $r(A^2 + B^2) =$

$$\eta \frac{s^3}{r}, \text{ si non sit } \eta = 0, \text{ ex quo curvæ } nm \text{ figura circa}$$

punctum *M* cognoscitur. Cum enim abscissae *r* positivæ unus applicatæ *s* valor positivus et abscissae *r* negativæ unus applicatæ *s* valor negativus respondeat; curvæ ramus *Mm* versus unam et ramus *Mn* versus alteram tangentis partem cadet, atque mutata curvatura ramus *Mn*

con-

convexitatem axi TN obvertit, cum altera Mm versus TN cavus sit. Proinde curva apud M habet *punctum flexus contrarii*. Ubi igitur radius circuli osculatoris est finitus, ibi ejusmodi curvaturæ immutatio locum non habet. Quodsi præter γ etiam η fuerit $= 0$, quod accidet, si sint E, G, H, et I $= 0$, natura curvæ osculan-

tis exprimetur æquatione $r(A^2 + B^2) = \mu \frac{s^4}{r}$, ex

qua cum unicuique abscissa r positivæ duplex applicata respondeat, altera affirmativa, altera negativa, ad abscissam r negativam vero applicatae sint imaginariae, iterum utraque curvæ ramus Mm et Mn ad eandem tangentis partem erit posita, et curva non immutabit curvaturam. Eodem modo generaliter patet, curvam apud M habere punctum flexus contrarii, si fuerit exponens ipsius s numerus impar: existente vero hoc exponente numero pari, curva ejusmodi puncto carebit et proinde apud M curvaturam non immutabit.

§. 52.

Hisce methodis cognoscitur curvatura curvarum in puncto dato, si punctum M fuerit simplex, quod eveniet, si in æquatione $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc} = 0$, non uterque factor A et B fuerit $= 0$. Quodsi vero fuerit $A = 0$ et $B = 0$, hincque curva duos vel plures habeat ramos in puncto M se intersecantes; uniuscujusque rami curvatura in M scorsim, ut ante, est investiganda. Sit enim primo M punctum

duplex, et æquationis $C \frac{dx^2}{dy^2} + D \frac{dx}{dy} + E = 0$ duæ

radices inæquales, quarum una sit $-\frac{n}{m}$, ut habeatur

$\frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$ seu $m dx + n dy = 0$, altera vero $-\frac{v}{\mu}$,

ut sit $\frac{dx}{dy} = -\frac{v}{\mu}$, vel $\mu dx + v dy = 0$, et quæra-

tur

tur æquatio pro hoc ramo inter coordinatas r et s , quarum illa r in normali MN capiatur. Poni ergo debet

$$dx = \frac{-mr + ns}{r(m^2 + n^2)} \text{ et } dy = \frac{-ms - nr}{r(m^2 + n^2)}, \text{ ut sit } r = \frac{-mdx - ndy}{r(m^2 + n^2)} \text{ et } s = \frac{ndx - mdy}{r(m^2 + n^2)}.$$

Jam vero est $-Cdx^2 - Ddxdy - Eddy^2 = Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 + Kdx^4 + Ldx^3dy + Mdx^2dy^2 + Ndxdy^3 + Ody^4 + \text{etc.}$ quæ æquatio substitutis valoribus pro dx et dy eam recipiet formam $(-mdx - ndy)(\mu dx + \nu dy) = r r(m^2 + n^2) \times (\mu dx + \nu dy) = \alpha r^3 + \beta r^2s + \gamma rs^2 + \delta s^3 + \epsilon r^4 + \zeta r^3s + \eta r^2s^2 + \theta r^2s^3 + is^4 + \text{etc.}$ ex qua

$$\text{concluditur } \frac{rr(m^2 + n^2)}{r} \times \frac{\mu dx + \nu dy}{s} = \alpha \frac{r^2}{s} + \beta r$$

$$+ \gamma s + \delta \frac{s^2}{r} + \epsilon \frac{r^3}{s} + \zeta r^2 + \eta rs + \theta s^2 + i \frac{s^3}{r}$$

$$+ \text{etc. Quia igitur est } s = \frac{ndx - mdy}{r(m^2 + n^2)}, \text{ fiet } \frac{\mu dx + \nu dy}{s}$$

$$= \frac{(\mu dx + \nu dy) r(m^2 + n^2)}{ndx - mdy} \text{ functio nullius dimensio-}$$

nis ipsarum dx et dy , quæ posito $\frac{dx}{dy} = -\frac{n}{m}$ abit

in quantitatem constantem. Posito itaque $r = 0$, quo casu etiam est $s = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$, ita tamen ut ra-

tio $\frac{s^2}{r}$ sit finita, habemus talem pro curva osculante

$$\text{æquationem } A = \delta \frac{s^2}{r}, \text{ si non est } \delta = 0, \text{ vel } rs =$$

$$\frac{A}{\delta} r, \text{ quæ est pro parabola apolloniana, cujus para-}$$

$$\text{meter est } \frac{A}{\delta}. \text{ Curva igitur quoque habet circulum}$$

oscu-

osculatorem in M, cujus radius est $\frac{A}{2\delta}$. Si vero sit $\delta=0$, æquatio pro curva osculante unam habet ex formis sequentibus $s^3 = Cr$, vel $s^4 = Cr$, vel generaliter $s^k = Cr$, ex quibus ut ante colligitur, curvæ ramum in M vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius scilicet evenit, si k fuerit numerus impar, posterius vero, si sit k numerus par. Eodem modo judicandum erit de altero ramo per punctum duplex M transeunte.

§. 53.

Si fuerit M punctum curvæ triplex, cujus tangentes determinantur æquatione $\frac{pdx^3}{dy^3} + \frac{G}{F} \times \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{H}{F} \times \frac{dx}{dy} + \frac{I}{F} = 0$, cujus radices sint $-\frac{n}{m}$, $-\frac{v}{\mu}$, et $-\frac{q}{p}$, ut sit $mdx + ndy = 0$, $\mu dx - vdy = 0$, $pdx - qdy = 0$; similibus ratiociniis eruuntur curvæ osculatrices. Captis enim abscissis in normali MN ab initio abscissarum M, ut ante, fiet $(-mdx - ndy)(\mu dx + vdy + pdx + qdy) = ar^4 + \beta r^3 s + \gamma r^2 s^2 + \delta r s^3 + \epsilon s^4 + \zeta r^5 + \eta r^4 s + \theta r^3 s^2 + i r^2 s^3 + k r s^4 + \lambda s^5 +$ etc. et $\frac{(-mdx - ndy)}{r} \times \frac{\mu dx + vdy}{s} \times \frac{pdx + qdy}{s} = a \frac{r^3}{ss} + \beta \frac{r^2}{s} + \gamma r + \delta s + \epsilon \frac{s^2}{r} + \zeta \frac{r^4}{s^2} + \eta \frac{r^3}{s} + \theta r^2 + i r s + k s^2 + \lambda \frac{s^3}{r} +$ etc. Quare cum sint $\frac{\mu dx + vdy}{s}$ et $\frac{pdx + qdy}{s}$ functiones nullius dimensionis variabilium dx et dy , quæ posito $\frac{n}{m}$ loco $\frac{dx}{dy}$ abeunt

eunt in quantitates constantes, habemus pro curva osculante æquationem hujus formæ: $A = \epsilon \frac{s^2}{r}$, nisi sit

$\epsilon = 0$, quo casu est $A = \lambda \frac{s^3}{r}$, etc, ita ut hoc casu

quoque curva osculans sit parabolica generis $sk = Cr$. Simili modo judicium erit ferendum de quovis reliquorum ramorum per punctum M transeuntium. Atque generaliter si punctum M sit multiplex quodcunque, alius formæ æquationem pro curva osculante prodire non posse, facile patet, si nimirum quilibet ramus per punctum M transiens propriam suam habeat tangentem.

§. 45.

Aliæ autem pro hac æquatione prodibunt formæ, si duorum pluriumve ramorum tangentes in puncto M coincidunt. Si enim evanescentibus A et B in æquatione $0 = Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdx$

$dy^2 + Idy^3 + \text{etc}$, radices æquationis $\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{D}{C} x$

$\frac{dx}{dy} + \frac{E}{C} = 0$ sint æquales, quo casu ambo rami in puncto duplici M communem habent tangentem; qua-

libet radice existente $= -\frac{n}{m}$, erit $Cdx^2 + Ddxdy +$

$Edy^2 = (mdx + ndy)^2$. Proinde æquatione ad coordinatas r et s translata prodibit hujusmodi æquatio $(mdx + ndy)^2 = rr(m^2 + n^2) = ar^3 + \beta r^2s + \gamma rs^2 + \delta r^3 + \epsilon r^4 + \zeta r^3s + \eta r^2s^2 + \theta rs^3 + is^4 + \text{etc}$, proinde $m^2 + n^2 = ar$

$+ \beta s + \gamma \frac{s^2}{r} + \delta \frac{s^3}{rr} + \epsilon rr + \zeta ss + s^2 + \theta \frac{s^3}{r} + i \frac{s^4}{rr}$

$+ \text{etc}$. Hic primum spectandus est terminus $\delta \frac{s^3}{rr}$, qui

si adsit, reliqui omnes evanescunt, casu $r = 0$ et $s = 0$,
et

et proveniat æquatio formæ $s^3 = Crr$ pro curva osculante, et quia applicata s eundem obtinet valorem, five abscissa r sumatur affirmativa, five negativa, curva in M habet *cuspidem* seu *punctum reflexionis*, atque in duas ramos Mm , $M\mu$ divaricatur, se in mutuo in M contingentes, atque tangenti Mt convexitatem obvertentes.

Si fuerit $\delta = 0$, fiet $m^2 + n^2 = \gamma \frac{s^2}{r} + i \frac{s^4}{rr}$ pro

curva osculante, quæ æquatio in duos factores imaginarios vel reales formæ $ss = Cr$ resolvi potest. Si prius sit, curva apud M habet punctum conjugatum. Si posterius, duo curvæ rami se apud M in mutuo contingent. Sic generaliter obtinebitur aut æquatio in duos alias formæ $s^k = Cr$ resolubilis, quo casu prodibunt tot diversæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in M punctum simplex constituunt, *qui rami primi ordinis* vocari possunt, aut invenietur æquatio, quæ non resolubilis est in duas alias, et hujus formæ erit $s^5 = Crr$, $s^7 = Crr$, $s^9 = Crr$ etc, qui rami cum eo, ad quem $s^3 = Crr$, *rami secundi ordinis* possunt vocari. Atque hi rami secundi ordinis omnes in M habebunt cuspidem, uti præbuit æquatio $s^3 = Crr$.

§. 55.

Si tres tangentes ramorum, quæ per M transeunt, fuerint coincidentes; vel tres rami primi ordinis se in eodem puncto contingent, vel in M erit contactus unius rami secundi ordinis cum uno primi ordinis, vel unus *ramus tertii ordinis* transibit per punctum M , quorum ramorum tertii ordinis osculatrices exprimentur æquationibus formæ $s^k = Cr^3$, ubi k est numerus integer ternario major, neque per ternarium divisibilis. In M itaque erit punctum flexus contrarii, si k est numerus impar. Si quatuor ramorum per M transeuntium tangentes coincidunt; vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi et unus secundi, vel duo secundi, vel

unus

unus primi et unus tertii ordinis se in eodem puncto M tangent, vel denique unus ramus quarti ordinis per M transibit, cujus osculatrix definitur æquatione $r^k = Cr^4$, in qua est k numerus integer quaternario major, quæ æquationes omnes præbent cuspidem, uti rami secundi ordinis. Eodem modo natura ramorum *quinti*, *sexti*, et *superiorum ordinum* investigatur. Ratione autem figurae rami quinti, septimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex est figura, vel cum vel absque puncto flexus contrarii. Rami autem sexti, octavi et omnium parium ordinum ratione figurae convenient cum ramis secundi et quarti ordinis. Cuspide enim omnes erunt præditæ.

§. 56.

Ex præcedentibus jam deducitur solutio problematis: *si data sit æquatio curvæ inter abscissam x et applicatam y , invenire ejusdem puncta flexus contrarii.* Ex data enim æ-

quatione quæri debet $\frac{ddy}{dx^2}$, tumque ex æquatione $\frac{ddy}{dx^2}$

$= 0$ investigari debent radices, quæ pro x substitutæ puncta flexus contrarii indicabunt, si adsint. Cautelæ enim hic observandæ sunt similes iis, quibus supra *Seçt. XVII. Anal. Math.* pro maximis et minimis inveniendis usi sumus. Id enim tantum ex §. 47. sequitur, quod eo

casu, quo curva habet punctum flexus contrarii, sit $\frac{ddy}{dx^2}$

$= 0$. Vicissim vero non sequitur, quoties est $\frac{ddy}{dx^2} = 0$,

toties adesse punctum flexus contrarii. Limitationes necessariae ex §. 47. deducendæ sunt. Facilius autem sic quoque erui possunt. Posita $AP = x$, $PM = y$, si TM curvam apud M tangat, et MR axi parallela sit; crescente $AP = x$ differentia valde parva $\Delta x = Pp$, et du-

cta applicata pm , si ea fecet parallelam MR apud q ; curvam in m , et tangentem in μ , sequitur, casu, quo M est punctum flexus contrarii, si pro $Ap = x + \Delta x$ sit $pm < p\mu$; pro $Ap = x - \Delta x$ esse debere $pm > p\mu$ et vicissim. Sed est tang. $\mu MR = \frac{dy}{dx}$, et proinde $q\mu = \frac{\Delta x dy}{dx}$.

Praeterea

pro $Ap = x + \Delta x$ est

$$pm = y + \frac{\Delta x dy}{1 \cdot dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \text{etc},$$

atque pro $Ap = x - \Delta x$ habetur

$$pm = y - \frac{\Delta x dy}{1 \cdot dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{\Delta x^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc},$$

¶.320. Hinc patet, quod casu $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, punctum M certo sit

punctum flexus contrarii, si non simul sit $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$.

Hoc enim casu $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ utraque applicata pm tam pro $x + \Delta x$, quam pro $x - \Delta x$, vel major vel minor est valore respondente ipsius $p\mu$, si non sit $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, unde

punctum flexus contrarii locum non habet. Quod si vero simul sit $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, non vero $\frac{d^5 y}{dx^5} = 0$, iterum

ad punctum flexus contrarii recte concluditur. Gene-

ratim igitur evanescente $\frac{ddy}{dx^2}$, vel simul $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$,

vel praeterea quoque $\frac{d^5 y}{dx^5}$, $\frac{d^6 y}{dx^6}$; ita ut numerus termi-

norum evanescentium impar sit; punctum flexus contrarii

trarii adesse certo concluditur. Sin vero numerus terminorum evanescentium sit par, nullum punctum flexus contrarii locum habet.

§. 57.

Ad cuspides seu puncta reflexionis inveniendæ quod adtinet, iudicium ex §. 50 et 51. desumendum erit. Primo enim patet, omne punctum, ubi datur cuspis in curva, esse punctum curvæ multiplex. Nisi igitur curva proposita talis sit, quæ uno saltem vel pluribus punctis duplicibus sit prædita; ea etiam plane nullam habere potest cuspidem. Primo igitur ex §. 40. quæri debet, num et quot puncta multiplicia habeat curva proposita. Quaerenda eum in finem erit æquatio differentialis completa æquationis pro curva data propositæ formæ $A dx + B dy + C dx^2 + D x dy + E dy^2 + F dx^3 + G dx^2 dy + H x dy^2 + I dy^3 + \text{etc} = 0$. Ubi ex tribus istis æquationibus $A = 0$, $B = 0$, et ipsa proposita si inventi sint valores $x = f$, $x = g$, etc, et $y = p$, $y = q$, etc; inquirendum est, utrum a substitutus $x = f$, et $y = p$, vel $x = g$, et $y = q$ etc, radices æquationis $\frac{dx^2}{dy^2} +$

$\frac{D}{C} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{E}{C}$ æquales fiant, quod si accadat, ad erit cuspis sub limitationibus §. 54. expositis, idque pro eo casu, quo inventum curvæ punctum duplex est. Pro curvæ puncto si triplex, vel quadruplex, vel utcumque aliud multiplex inveniatur, iudicium secundum §. 55. erit instituendum. Caeterum hoc quoque notari meretur, quo eo in casu, quo curva apud M habet cuspidem, qualem præbet æquatio $s^3 = Crr$, applicata PM sit *maximum vel minimum secundæ speciei*, quale §. 265. *Anal. Math.* descripsimus, quare ipsa methodus exposita quoque maximis et minimis secundæ speciei inveniendis accommodata est.



SECTIO VI.

DE

SIMILITVDINE, DIAMETRIS ET CENTRIS CVRVARVM.

§. 58.

Omnis aequatio pro linea algebraica praeter variabiles x et y quasdam continet quantitates constantes a, b, c , etc, quae in hoc negotio semper lineas rectas denotare assumuntur, atque a magnitudine harum rectarum constantium, valores applicatae y pro quovis ipsius x valore pendent. Proposita vero duabus curvis ac sumpta abscissa quacunque in axe unius tuncque alia abscissa in axe alterius in ratione data, si in utraque curva angulus coordinatarum idem sit, praeterea in una tot applicatae y valores ac in altera inveniantur, et denique adplicatae homologae sint in ratione abscissarum; istae curvae dicuntur *similes*. Ex quo patet, quod omnes curvae similes ejusdem sint ordinis. Atque si in aequatione quadam proposita praeter binas variables x et y , unica tantum deprehendatur constans a , diversae quidem prodibunt curvae, si ipsi a hic vel alius tribuatur valor constans, sed omnes istae curvae, erunt inter se similes. Data sit aequatio hujus generis quaecunque, ut $y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0$, ubi necesse est, ut quivis terminus sit productum ex tot lineis, quot exponents maximae dignitatis ipsius y continet unitates. Sit .322. $AC = a$, atque curva AMB ea, quae aequatione $y^3 -$
323. $2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0$ exprimitur, si $AP = x$ et $PM = y$. Loco constantis $a = AC$ jam assumatur quicunque alius valor ac , fitque $AC : ac = n : m$, et proinde

inde $ac = \frac{m}{n} AC$. Capiatur $ap = \frac{m}{n} AP$, erit $pm =$

$\frac{m}{n} PM$. Si enim in proposita aequatione loco a , x ,

y , respective ponatur $\frac{m}{n} a$, $\frac{m}{n} x$, $\frac{m}{n} y$; omnes

termini per $\frac{m^3}{n^3}$ erunt multiplicati, atque ideo $\frac{m}{n} y$

talis fit functio ipsius $\frac{m}{n} x$, qualis erat y ipsius x .

§. 59.

Haec constans vocari potest *parameter* curvae in sensu aliquo latiori, sicque ejusmodi curvae, de quibus nunc sermo est, talem habent proprietatem, ut sumtis abscissis AP , ap , in ratione parametrorum, ratio applicatarum PM et pm eadem inveniatur. Iisdem vero positis non tantum applicatae homologae, sed et omnes aliae rectae similiter in curva ductae, quin et arcus curvarum AM et am parametrorum rationem tenebunt. Præterea areae similes APM et apm erunt in ratione parametrorum duplicata. Tangentes denique in punctis homologis M et m æquali ad axem inclinatae erunt angulo, atque radii osculi ibidem tenebunt rationem parametrorum. Omnis circulus exprimi potest æquatione $yy = 2ax - xx$, et omnis parabola æquatione $yy = ax$. Proinde omnes circuli, ut et omnes parabolae inter se similes erunt.

§. 60.

Si proposita sit æquatio curvae cujusdam, quæ præter constantem a plures alias in se complectitur constantes, b , c , e , f , etc; manifestum est, si loco valoris a sumatur $\frac{m}{n} a$, præterea $\frac{m}{n} b$ loco b , $\frac{m}{n} c$ loco c ,

$\frac{m}{n}e$ loco e , $\frac{m}{n}f$ loco f , etc, donec nulla constans super sit, aliam quidem æquatione sic mutata prodire debere curvam, sed talis proprietatis, ut omnes constantes, quibus hæc curva determinatur, prioris curvæ constantibus homologis proportionales sint. Ideo necesse est, ut nova curva hac constantium mutatione orta priori sit

similis. Scripto enim $\frac{m}{n}a$, $\frac{m}{n}b$, $\frac{m}{n}c$, etc, $\frac{m}{n}x$,

$\frac{m}{n}y$, respective loco a , b , c , etc, x et y in æquatione

proposita iterum omnes termini per $\frac{m^s}{n^s}$, si nimirum curva sit ordinis s , erunt multiplicati, atque pro-

inde $\frac{m}{n}y$ talis fit ipsius $\frac{m}{n}x$ functio qualis, antea

erat y ipsius x functio. Ellipses itaque et hyperbolæ similes sunt, si inter binos earum axes principales eadem ratio intercedat, vel quoque si parametri earum sint ut axes. Caeterum quemadmodum in curvis similibus abscissæ et applicatæ homologæ in eadem ratione sive augentur, sive minuuntur; ita si abscissæ aliam sequantur rationem, aliam vero applicatæ, curvæ non amplius similes manent; hoc vero casu *affines* vocantur, ita ut infinitas similitudinem sub se tanquam speciem completatur, quia curvæ affines in similes abeunt, si ambæ illæ rationes, quas abscissæ et applicatæ seorsim sequuntur, æquales evadant.

§. 61.

Si linea recta tangat lineam secundi ordinis in dato puncto M ; ex puncto contactus alia educi potest recta quæ omnes curvæ ordinatas tangenti parallelas bifariam secat, quæ recta diameter linea secundi ordinis vocabatur.

tur. Atque haec diameter ista gaudet proprietate, ut sumpta eadem pro axe et angulo coordinationis eo, sub quo diameter ad tangentem inclinatur, cuius abscissae respondeat duplex applicata, una positiva altera negativa, quarum vero prior posteriori absolute spectatae æqualis est. Quia itaque summa algebraica ejusmodi binarum applicatarum nihilo æqualis est, atque similis axis proprietas nonnunquam in aliis curvis observatur, significatio vocis diametri aliquantum extendi solet in Geometria Generali, atque omnis axis curvae *diameter* vocari, qui hac proprietate est praedita, ut summa algebraica omnium applicatarum cuius abscissae respondentium sit nihilo æqualis. Secundum hanc diametri notionem inquirendum jam erit, utrum aliae quoque curvae praeter conicas sectiones diametro sint praeditae.

§. 62.

Quam ob rem consideremus æquationem pro lineis tertii ordinis generalem $\alpha x^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \epsilon y y + \zeta y x + \eta x^2 + \theta y + \iota x + k = 0$, ex qua patet, unicuique abscissae x vel unam vel tres respondere applicatas reales, nisi sit $\alpha = 0$. Sit $\alpha = 1$ atque ponamus tres adesse applicatas reales, eæque dabuntur ex ista æquatione $y^3 + (\beta x + \epsilon) y y + (\gamma x x + \zeta x + \theta) y + \delta x^3 + \eta x x + \iota x + k = 0$. Erit itaque summa trium applicatarum $= -(\beta x + \epsilon)$, summa productorum ex singulis binis $= \gamma x x + \zeta x + \theta$, atque productum omnium $= -(\delta x^3 + \eta x x + \iota x + k)$. Sit itaque linea quaedam tertii ordinis propositae ad axem BD relata, ad quem sub dato angulo applicatae sint ordinatae MNn, curvam in tribus punctis secantes. Hinc posita abscissa BQ = x , applicata y triplicem habet valorem, QM, QN, et $-Qn$, unde erit $QM + QN - Qn = -\beta x - \epsilon$. Diameter itaque curvae talem habere debet positionem, ut in æquatione $y^3 + (\beta x + \epsilon) y y + \text{etc}$; sit $\beta x + \epsilon = 0$. Atque haec ratiocinia ad curvas superiorum ordinum facile

extendi possunt. Potest vero positio talis rectae ex æquatione pro curva data inveniri sic ratiocinando.

§. 63.

F.324. Sit curva proposita curva CMN_n ordinis n , cujus æquatio ad abscissam $AP = x$, et ordinatas $PM = y$ relata ista est $y^n + (ax + b)y^{n-1} + (cxx + dx + e)y^{n-2} + (fx^3 + gxx + bx + i)y^{n-3} + \text{etc} = 0$. Ducta præterea sit recta AQD ad eundem axem, abscissam $AP = x$ et applicatam $PQ = u$ relata. Partes præterea QM , QN , Qn , adplicatae PM vocentur z , tumque in æquatione pro curva CMN_n substituatur $u \pm z$ loco y , quo facto prodibit æquatio, cujus terminus primus erit z^n , et reliquorum coefficientes, si nimirum æquatio secundum dimensiones ipsius z ordinetur, sic procedent: $nu + ax + b$; $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{n-1}{1} (ax + b) + cxx + dx + e$; $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} (ax + b)u + \frac{n-2}{1} (cxx + dx + e) + fx^3 + gx^2 + bx + i$, etc. Hujus æquationis radices erunt valores QM , QN , Qn , etc. Ut itaque horum valorum summa algebraica fiat $= 0$, poni debet $nu + ax + b = 0$, atque hæc ipsa æquatio positionem diametri AD definiet.

§. 64.

Sed ex eadem æquatione per substitutionem ipsius $u \pm z$ loco y inventa sequentia etiam deducuntur confectaria. Summa productorum ex singulis binis valoribus QM , QN , etc, erit $= 0$, si fuerit coefficientis

$$\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} u^2 + \frac{n-1}{1} (ax + b) + cxx + dx + e = 0. \quad \text{Sed}$$

hæc est æquatio pro linea secundi ordinis, quæ secabit omnes ipsius QMN_n applicatas ea lege, ut summa productorum ex singulis nihilo æquetur. Præterea summa productorum ex singulis ternis valoribus QM , QN , etc. erit

erit = 0, si sit coëfficiens $\frac{1 \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 + \frac{n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2}$

$$(ax + b) u^2 + \frac{n - 2}{1} (c x x + d x + e) u + f x^3 + g x x + h x + i$$

= 0, quæ est æquatio pro linea tertii ordinis, applicatas curvæ QMN n ea lege secans, ut summa productorum ex singulis tribus segmentis evadat nihilo æqualis. Possunt hæc ratiocinia etiam per coëfficientes sequentes omnes continuari; atque curvæ secundum has leges applicatas alterius cujusdam curvæ secantes *diametri curvilineæ* vocantur. Quævis itaque curva tertii ordinis et quævis alia superioris ordinis habet diametrum curvilineam ordinis secundi. Quævis curva quarti et superioris ordinis habet diametrum curvilineam secundi et aliam tertii ordinis et generaliter quævis curva ordinis n habet diametrum curvilineam ordinis 2, 3, 4, - - - $n - 1$.

§. 65.

Vox itaque *diametri curvæ* nonnunquam in admodum lata sumitur significatione. Nihilo tamen minus potissimum ejusmodi linea recta hoc nomine indigitari solet, quæ integram curvam in duas partes dividit inter se æquales et similes, ita ut sumta eadem recta pro axe ad quamvis abscissam cuilibet applicatae orthogonali positivæ respondeat negativa priori absolutæ spectatæ æqualis. Ejusmodi diameter a Newtono *diameter absoluta* vocatur. Sic parabola unam ejusmodi habet diametrum; ellipsis vero et hyperbola duas; circulus denique innumeras. Sit AB axis curvæ cujusdam profitatæ, atque diviso integro curvæ plano in quatuor regio-

F.325.

sita, y vero negativis portio curvae in regione T sita prodibit. Portiones itaque in regionibus Q et R sitae inter se erunt aequales et similes, si aequatio ita fuerit comparata, ut non mutetur, etiamsi $-y$ loco $+y$ scribatur. Sed omnis potestas exponentis paris ipsius y hac gaudet proprietate; quare si in aequatione pro curva nullae potestates impares ipsius y occurrant, curvae portiones in regionibus Q et R sitae erunt inter se aequales et similes. Ergo hoc casu recta AB erit diameter curvae absoluta. Omnes itaque hujus generis curvae algebraicae in hac aequatione generali continentur: $a + Bx + \gamma xx + \delta yy + \epsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \theta x^2y^2 + i y^4 + \text{etc} = 0$, quae expressio est functio rationalis ipsarum x et yy . Hoc enim casu quoque portiones in regionibus S et T sitae inter se aequales et similes sunt.

§. 66.

Praetera portiones in regionibus Q et S sitae erunt aequales et similes, si aequatio pro curva ita sit comparata, ut eadem non mutetur, licet $-x$ loco $+x$ ponatur. Si igitur Z fuerit functio rationalis ipsarum xx et y ; aequatio $Z = 0$, erit pro curva, quam recta EF in duas partes similes et aequales dividit. Portiones denique in regionibus Q et T, seu R et S oppositis similes et aequales erunt, si aequatio inter coordinatas x et y ita fuerint comparata, ut posita utraque x et y negativa nullam subeat mutationem. Si fuerit $Z = 0$ aequatio pro his curvis, primo patet, si Z fuerit functio ipsarum x et y parium dimensionum, seu si fuerit aggregatum ex quocunque functionibus homogeneis parium dimensionum, hanc aequationem $Z = 0$ eam habere conditionem quae requiritur. Quodsi vero Z fuerit aggregatum quocunque functionum homogenearum imparium dimensionum sumtis x et y negativis, Z abibit in $-Z$ atque tum erit $-Z = 0$ et proinde pariter $Z = 0$. Duplex itaque esse potest forma aequationis pro curvis, quae
in

in regionibus oppositis Q et T, portiones habent aequales et similes, Una erit $\alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + i y^4 + \text{etc} = 0$; altera vero $xx + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \epsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + i x^3 y^2 + k x^2 y^3 + \text{etc} = 0$. Hoc itaque casu recta AB erit ita comparata, ut abscissis oppositis aequalibus respondeant applicatae oppositae aequales; atque ejusmodi rectam DE BRAGELONGE vocat *contra-diameter*. Si itaque una eademque recta simul sit diameter et contra-diameter, in regiones Q, R, S, T, cadent quatuor curvae portiones inter se aequales et similes, quo casu curvae aequatio sub hac formae generali comprehenditur $\alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \epsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + i x^2 y^4 + k y^6 + \text{etc} = 0$, quae erit functio rationalis ipsarum xx et yy . Curvas diametro praeditas EVLERVS vocat *diametraliter aequales*: eas vero, quae habent contra-diameter adpellat *alternatim aequales*.

§. 67.

Si curvae MAm contra-diameter est pP; et initium f.326. abscissarum A; erit pro $AP = Ap$, quoque $PM = pm$, unde ob congruentiam triangulorum APM et Apm, semper erit recta $AM = \text{rectae } Am$. Punctum itaque A ejus erit conditionis, ut omnis recta Mm per idem ducta et curvae utrinque occurrens in ipso A bisecetur; atque ob hanc proprietatem tale punctum vocatur *curvae centrum*. Omnes itaque curvae alternatim aequales centro erunt praeditae. Praeterea patet, quod omnis recta per curvae centrum ducta sit ipsius contra-diameter. Ducatur enim ejusmodi recta per centrum A quaecunque qQ, atque ex puncto M ad eandem ordinata rectangula vel adeo obliquangula quaecunque MQ. Ducatur AM, eaque ad oppositam curvae partem usque ad m producat, tumque ex puncto m ad novum axem ducatur applicata mq; erunt triangula AQM et Aqm congruentia ob $AM = Am$, et angulos homologos aequales.

§. 68.

Ex praestructis hisce principiis deducuntur solutiones problematum; *si data sit æquatio pro curva quadam, inquirere, utrum curva habere possit diametrum vel centrum, nec ne.* Substituendo enim in æquatione data $mu + nt - f$ loco x et $nu - mt - g$ loco y (§. 169.) habetur æquatio pro curva generalis ad axem quemcunque, abscissam, z , et applicatam u relatam. Tum ordinata æquatione secundum dimensiones ipsius u , coefficientes terminorum ubi u imparium est dimensionum esse debent $= 0$, atque ex istis æquationibus concludi potest debita relatio coefficientium æquationis constantium, ut novus axis fiat curvae diameter. Quo praeterea curva habeat centrum, necesse est, ut æquatione in membra secundum dimensiones variabilium x et y distincta, (§. 164.) omnia membra quæ numero pari a supremo distant, nihilo sint æqualia. Scribatur itaque $m + t$ loco x et $n + u$ loco y , atque peracta æquationis transformatione et reductione, omnia membra a supremo numero pari distantia ponantur $= 0$, tumque ex his æquationibus conveniens coefficientium æquationis eliciatur relatio.

§. 69.

Data sit æquatio generalis pro lineis secundi ordinis $a + by + cx + \delta yy + exy + fxx = 0$, quæ facta substitutione $m + t$ loco x et $n + u$ loco y abit in sequentem:

$$\begin{aligned} & \delta uu + etu + ftt \\ & + (b + em + 2\delta n)u + (c + en + 2fm)t \\ & + (a + bn + cm + \delta nn + enm + fmm) \end{aligned}$$

unde habentur æquationes $b + em + 2\delta n = 0$ et $c + en + 2fm = 0$, et quibus concluditur $m = \frac{be - 2e\delta}{4\delta f - ce}$ et $n = \frac{ce - 2bf}{4\delta f - ce}$.

Ergo quævis curva secundi ordinis centro

gaudet, cujus positio his æquationibus determinatur. Quando $4cdf - ee = 0$, centrum infinito ab initio abscissarum distat intervallo. Atque si præterea $be - 2cd = 0$,

fiunt $n = \frac{0}{0}$ et $m = \frac{0}{0}$; hoc vero casu curva complexa esse invenitur, et æquatio sic mutata $a +$

$by + bxr \frac{f}{g} + \delta yy + \delta xy r \delta f + fxx = 0$ exprimit

systema duarum rectarum. Hæc-ratiocinia ad curva superiorum ordinum quomodo adplicanda sint, cuivis attendenti satis clarum est.



SECTIO VII.

DE

INVENTIONE CURVARVM EX DATIS PROPRIETATIBVS.

§. 70.

Satis prolixè hucusque in eo fuimus occupati, ut explicetur, quomodo ex data æquatione pro curva algebraica ejusdem figura et palmariæ proprietates deduci queant. Restat, ut explicatis addamus specimina quædam methodi, qua ex datis curvæ cujusdam palmariis proprietatibus investigari debeat æquatio naturam illius curvæ exprimens. De proprietatibus curvarum geometricis hoc loco tantum sermonem esse posse, facile patet. Ac primo quidem ad hoc negotium spectant omnia problemata geometrica indeterminata, ubi locus cujusdam puncti indeterminatus in dato plano definiendus est. Ejusmodi enim problematis indeterminati conditio-

ditiones eas exprimunt loci quæſiti proprietates, ex quibus æquatio pro loco quæſito eſt elicienda. Atque huius generis problema eſt, quod ſequitur.

§. 71.

F.327. *Norma ABC ad circulum ſic applicata, ut apex anguli recti B in peripheriam cadat, ductaque per punctum D, in quo crus BC peripheriam ſecat, recta DE, diametro BF perpendiculari, invenire punctum E, in quo hæc recta ſecat crus alterum AB normæ ABC. Sit diameter BF = a, et BG = x, erit GF = a - x. Præterea GD = ax - xx; atque ſi GE = y, ob GD : GB = GB : GE, fiet ax - xx : xx = xx : yy, vel a - x : x = xx : yy. Ergo æquatio pro curva quæſita eſt $x^3 = ay^2 - xy^2$, et locus inveniendus eſt ordinis tertii. Jam ipſius curvæ figura et reliquæ proprietates ex æquatione inventa facile dete-*

guntur. Quia enim primo eſt $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}$; duæ

reperiuntur adplicatæ y ſibi oppoſitæ ad quamlibet abſciſſam x absolute ſpectatæ æquales. Ergo BF eſt curvæ diameter absoluta. Si $x = 0$, habetur $y = \pm 0$, et proinde diameter ſecat curvam in ipſo abſciſſarum initio. Pro x negativo ambæ applicatæ fiunt imaginariæ.

Pro $x = a$; habetur $y = \pm \sqrt{\frac{1}{0}} = \infty$, ergo recta

*diametro BF ad F perpendicularis eſt curvæ aſymtota. Pro quovis $x > a$; ambæ applicatæ iterum ſunt impoſſibiles, et proinde integra curva intra duas parallelas diametro BF in punctis B et F normaliter inſiſtentes contenta erit. Hæc curva a VETERIBVS *Cissois* eſt appellata.*

§. 72.

Sæpe ejuſmodi curvarum proprietates proponi ſolent, quæ non immediate applicatas inter ſe paralleles reſpiciunt, quorum pertinet caſus iſte, quo rectarum ex dato puncto ad curvam eductorum indoles quaedam præ-

proponitur. Atque tum eo modo curvam ad aequationem analyticam revocandi uti conveniet, cujus mentio facta est in §. 194. *Anal. Math.* et qui eo redit, ut quantitas rectae CM ex dato puncto C, quod *Polus* curvae vocari potest, ad curvam eductae unius variabilis locum sustineat. Tum vero alia opus est variabili, qua situs rectae CM definitur, atque cum in finem assumenda est recta quaedam CA per C ducta pro axe, ut angulus ACM, vel ejus sinus, cosinus, tangens, etc. vicem alterius variabilis sustineat. Perpendamus itaque hunc lineas curvas exprimendi modum aliquo modo diligentius, atque ponamus primo, quod distantia $CM = z$, sit functio quaecunque sinus anguli $ACM = \phi$; quae functio si sit uniformis, recta CM curvae in unico puncto M occurrere videtur, quia angulo $ACM = \phi$ unicuique valor rectae CM respondet. Sed angulo $ACM = \phi$ duobus rectis aucto eadem manebit rectae CM per punctum C ductae positio, hoc tantum discrimine, quod dirigatur in plagam oppositam, sicque alia ejusdem rectae CM intersectio cum curva prodibit, quamvis z sit functio uniformis ipsius $\sin \phi$, quia scripto $-\sin \phi$ loco $+\sin \phi$ angulus ACM duobus rectis augetur. Si itaque sit P functio illa ipsius $\sin \phi$, ita ut sit $z = P$; quod si praeterea unaquaque recta CM curvae in unico tantum puncto occurrere debeat; esse debet P talis ipsius $\sin \phi$ functio, quae valorem recipit negativum, si variabilis $\sin \phi$ ponatur negativa. Generatim ejusmodi functio variabilis x cujuscunque quae habet valorem negativum pro x negativo, *functio impar*, quae vero eundem dat valorem sive pro x scribatur $+a$ vel $-a$, *functio par* ipsius x vocari solet. Quod si igitur quaevis recta CM curvae in unico tantum puncto occurrere debeat, esse debet P functio impar ipsius $\sin \phi$. Hoc idem locum habet, quando est P functio impar ipsius $\cos \phi$. Omnes itaque curvae, quas singulae rectae ex C eductae
in

in unico puncto interfecant, continentur in hac aequatione $z = P$, si P sit functio impar sinus et cosinus anguli ACM .

§. 73.

Generalis vero ejusmodi aequationis forma haec

$$\text{erit } z = \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \frac{\gamma}{\cos \phi} + \frac{\delta}{\sin \phi} \\ + \varepsilon (\cos \phi)^3 + \zeta (\cos \phi)^2 \sin \phi + \eta \cos \phi (\sin \phi)^2 + \\ \vartheta (\sin \phi)^3 + i \frac{\cos \phi^2}{\sin \phi} + \kappa \frac{\sin \phi^2}{\cos \phi} + \lambda \frac{\sin \phi}{\cos \phi^2}$$

+ etc; quae facile mutatur in aliam, qua curvae natura inter coordinatas orthogonales $CP = x$ et $PM = y$ exprimitur, ponendo $z = r(xx + yy)$, $\sin \phi =$

$$\frac{y}{z} \text{ et } \cos \phi = \frac{x}{z}. \text{ Erit enim } z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} \\ + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\vartheta y^3}{z^3} + \frac{i x x}{y z} \\ \frac{\kappa y y}{z y} + \frac{\lambda y z}{x x} + \text{etc; qua aequatione per } z \text{ divisa ubi-}$$

que pares tantum ipsius z occurrent potestates, ideoque ponendo $z = r(xx + yy)$ prodibit aequatio rationalis inter x et y . Erit itaque aequatio generalis ita comparata, ut constans quaedam C aequalis sit functioni — I dimensionum variabilium x et y , cujusmodi functio si

fuerit P , erit $C = P$, et proinde $\frac{I}{C} = \frac{I}{P}$, ubi est

$\frac{I}{P}$ functio ipsarum x et y unius dimensionis. Si jam

fuerit P functio variabilium x et y dimensionum n , et Q functio earundem variabilium $n+1$ dimensionum;

erit $\frac{Q}{P}$ functio unius dimensionis. Ideo omnes cur-

vae,

vae, quam rectae ex puncto C eductae in unico puncto interfecant, contentae erunt æquatione $c = \frac{Q}{P}$, vel Q

$= cP$. Hinc generalis pro hisce curvis æquatio erit $\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \epsilon x^{n-3} y^4 + \text{etc}$
 $= c(\alpha x^n + \beta x^{n-1} y + \gamma x^{n-2} y^2 + \delta x^{n-3} y^3 + \text{etc.})$ unde lineæ singulorum ordinum hac proprietate gaudentes sequentibus contentae erunt æquationibus

$$\alpha x + \beta y = c$$

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = c(\alpha x + \beta y)$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)$$

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \epsilon y^4 = c(\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3) \text{ etc.}$$

§. 74.

Simili modo investigari possunt curvæ, quas singulæ rectae ex eodem puncto C eductae vel in duobus punctis interfecant, vel nusquam. Quia hoc casu pro quovis angulo $ACM = \phi$ recta $CM = z$ duplicem habere debet valorem vel realem vel impossibilem, eadem per æquationem quadraticam definitur. Sit itaque $zz - Pz + Q = 0$, atque P et Q sint functiones anguli ϕ seu ejus sinus et cosinus uniformes, et quidem P functio impar, Q autem functio par. Erit vero ut ante

$\frac{y}{z} = \sin \phi$ et $\frac{x}{z} = \cos \phi$. Ergo P debet esse functio

impar ipsarum $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et Q earundem variabilium

functio par. Ex his concluditur, fore $\frac{P}{z}$ functionem

rationalem variabilium x et y et quidem homogeneam

— 1 dimensionum, atque $\frac{Q}{zz}$ functionem rationalem

ipsarum x et y homogeneam — 2 dimensionum. Si igitur sit L functio homogenea $n+2$ dimensionum, M fun-

ctio homogenea $n+1$ dimensionum, atque N functio homogenea n dimensionum ipsarum x et y ; erit $\frac{M}{L}$

functio -1 dimensionum, $\frac{N}{L}$ functio -2 dimensio-

num earundem variabilium. Fit vero $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz}$

$= 0$ ex aequatione $zz - Pz + Q = 0$, unde sequentis formae æquatio pro curvis, quae a rectis ex puncto C

eductis in duobus punctis secantur, deducitur $1 - \frac{M}{L}$

$+ \frac{N}{L} = 0$, seu $L - M + N = 0$, atque exinde æ-

quationes speciales pro quovis linearum ordine eodem modo ut supra eliciuntur.

§. 75.

Quodsi jam detur relatio binorum valorum CM et CN ad se invicem, difficile non erit, curvam assignare, in qua data relatio inter valores CM et CN obtinet. Quærenda itaque sit curva in qua summa quadratorum $CM^2 + CN^2$ est quantitas constans $= 2aa$. Ex æquatione pro his curvis generali $zz - Pz + Q = 0$, patet, esse $P = CM + CN$, et $Q = CM \cdot CN$. Ergo $PP = CM^2 + 2CM \cdot CN + CN^2 = CM^2 + 2Q + CN^2$, atque $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$. Esse itaque debet $PP - 2Q = 2aa$,

vel $Q = \frac{1}{2}(PP - 2aa)$. Sed $P = \frac{Mz}{L}$ et $Q = \frac{Nzz}{L}$;

ergo $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$, et $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$,

vel $L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0$, quae est æquatio ge-

neralis pro curvis, quae data proprietate sunt praeditae.

Scripto

Scripto itaque $xx + yy$ loco zz habetur $2LL (xx + yy) - 2LM (xx + yy) + MM (xx + yy) - 2aaLL = 0$, in qua æquatione si $M = 0$, curva resolvens erit circulus. Si $n + 1 = 0$, ut sit M quantitas constans $= 2b$, et $L = ax + \beta y$; curva resolvens est quarti ordinis hac æquatione contenta $(ax + \beta y)^2 (xx + yy - aa) - 2b(ax + \beta y)(xx + yy) + 2bb(xx + yy) = 0$. Atque si $L = xx + yy$ et $M = 2(ax + \beta y)a$; prodibit alia quarti ordinis æquatio. Tum enim ex æquatione inventa per $2xx + 2yy$ divisa fit $(xx + yy)^2 - 2a(ax + \beta y)(xx + yy) + 2aa(ax + \beta y)^2 - aa(xx + yy) = 0$. Si divisio per $xx + yy$ non succedat, æquatio inventa, ponendo $2M$ loco M , semper erit ordinis $2n + 6$. Praeterea, si L per $xx + yy$ divisibilis sit, ut habeatur $L = (xx + yy)N$, existens N functione homogenea n dimensionum ipsarum x et y ; oritur haec æquatio $NN (xx + yy)^2 - 2MN (xx + yy) + 2MM - aaNN (xx + yy) = 0$, quae est ordinis $2n + 4$. Ex singulis itaque ordinibus paribus duplex invenitur æquatio pro curvis data proprietate gaudentibus.

§. 76.

Quaerenda jam sit curva, in qua quadratum $(CM + CN)^2 = CM^2 + 2CM \cdot CN + CN^2$ vel generaliter functio $CM^2 + m \cdot CM \cdot CN + CN^2$ est quantitas constans. Erit $CM^2 + m \cdot CM \cdot CN + CN^2 = PP + (m - 2)Q$. Si ita-

que ponatur $PP + (m - 2)Q = aa$; erit $Q = \frac{aa - PP}{m - 2}$.

Est vero $P = \frac{Mz}{L}$, et $Q = \frac{Nz}{L}$. Ergo $\frac{MMz}{L} +$

$\frac{(m - 2)Nz}{L} = aa$, et $N = \frac{aaL}{(m - 2)z} = \frac{MM}{(m - 2)L}$. Cum

igitur æquatio pro curva sit $L = M + N = 0$, habebitur pro hac proprietate ista æquatio: $(m - 2)LLz = (m - 2)LMz + aaLL - MMz = 0$, vel $aaLL + (xx + yy)((m - 2)L^2 - (m - 2)LM - M^2) = 0$, existente L fun-

ctione homogenea $n+2$ et M functione homogenea $n+1$ dimensionum ipsarum x et y . Sit N functio homogenea earundem variabilium n dimensionum, atque si fuerit $L = (xx + yy)N$ prodibit ista aequatio $aa(xx + yy)N^2 + (m-2)(xx + yy)^2N^2 - (m-2)(xx + yy)MN - M^2 = 0$. Si statuatur $m = 2$, ut sit $(CM + CN)^2 = aa$ fiet vel $aaLL = (xx + yy)M^2$, vel $M^2 = aa(xx + yy)N^2$. Cum autem utraque æquatio sit homogenea, ea resolvetur in duas pluresve æquationes hujus formae $\alpha y + \beta x$. Ideo quæsito satisfieri non potest, nisi duabus pluribusve rectis per punctum C ductis, quæ eo sensu, quo quæstio proponitur, non satisfaciunt. Dari itaque non possunt curvæ algebraicæ in quibus quadratum summae $CM + CN$, et proinde nec ipsa summa $CM + CN$ sit constans.

§. 77.

Si statuatur $m = -2$, ut quadratum differentiae $CM - CN$, et proinde ipsa differentia $CN - CM$ debeat esse constans; oriuntur istae aequationes $aaLL = (xx + yy)(aL - M)^2$ et $aa(xx + yy)NN = (2(xx + yy)N - M^2)$. Oritur itaque simplicissima solutio, si ponatur $M = 0$, quo casu curva resolvens erit circulus. Deinde pro $N = 1$ et $M = 2bx$ satisfaciunt lineae quarti ordinis aequationibus $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$ et $aaaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$ contentae, quae facilius construuntur, si ad aequationes ieter z et ϕ regrediamur. Cum igitur sit $xx + yy = zz$, $x = z \cos \phi$, et $y = z \sin \phi$, posito $a = 2c$, erit primo $cczz = (zz - bz \cos \phi)^2$, vel $b \cos \phi \pm c = z$. Secundo $cc(\cos \phi)^2 =$

F.328. $(z \cos \phi - b)^2$, vel $z = \frac{b}{\cos \phi} \pm c$. Ad construen-

329.

330.

dam itaque primo curvam ex aequatione $z = b \cos \phi \pm c$; per punctum c ducatur recta ACB , in qua sumatur $CD = b$, atque ex D sumatur utrinque $DA = DB = c$,
erunt

erunt primo puncta A et B in curva quaesita. Tum ducta quavis recta NCM per C, ex D in eam demittatur perpendicularum DL et ab L sumatur utrinque $LM = LN = c$, erunt puncta M et N in curva quaesita, et intervallum $MN = 2c$, uti quaestio postulat. Oriuntur itaque ex hac aequatione curvae in se redeunt, atque si $b < c$, curva apud C habebit punctum conjugatum; si $b = c$, curva in C habet cuspidem; atque si $b > c$, curva in C nodum habebit.

§. 78.

Quod adtinet ad alteram aequationem $z = \frac{b}{\cos \phi}$ F.332.

$\pm c$; ducta per C recta CAB, sumatur $CD = b$, et capiatur $DA = DB = c$, erunt puncta A et B in curva. Deinde per D ducatur normalis EDF, et ducta per C quacunque

CL, erit $CL = \frac{b}{\cos \phi}$, si $DCL = \phi$. Sumantur LM

$= LN = c$, erunt puncta M et N in curva quaesita. Haec curva est *Conchois* VETERVM, cujus *polus* est C et asymptota recta EF, ad quam quatuor curvae rami in infinitum excurrentes convergunt. Ipsum vero punctum C erit vel *punctum conjugatum*, vel *cuspidis*, vel *nodus* pro diversa relatione constantium b et c ad se invicem, prouti nimirum vel $c < b$, vel $c = b$, vel $c > b$. Praeter has curvas ex linearum ordine quarto etiam curvae altiorum ordinum, quot libuerit, exhiberi possunt, eadem proprietate praeditae. Si enim generatim fuerit P functio impar sinus et cosinus anguli ϕ ; ista aequatio $z = bP \pm c$ praebet curvam continuam, quam omnes rectae per C ductae ita in duobus punctis M et N secabunt, ut intervallum MN futurum sit constans $= 2c$. Omnes autem ejusmodi curvae referri possunt ad *genus conchoidale*, loco EF *directricis* substituendo lineam quamcunque aequatione $z = bP$ contentam, quae aequatio complectitur curvas, quae a rectis per punctum C ductis non

F. 333. nisi in unico puncto secantur. Sit CEDLF talis curva et C ejus polus. In singulis rectis CL productis utrinque ab L capiantur intervalla aequalia $LM' = LN = c$, erunt puncta M et N in curva quaesita AMPCQBNRC. Si CEDLF fuerit circulus curva *sphi praec.* invenitur.

Similibus ratiociniis inveniri possunt curvae tales, in quibus alia quaecunque valorum CM et CN relatio data est. Quin etiam progredi licet ad curvas, quae a rectis per polum C ductis in tribus, quatuor, vel pluribus punctis interfecantur, atque tum ex ipsis illae inveniri, quae datis proprietatibus sunt praeditae.

§. 79.

F. 331. Positio tangentis respectu curvae, cujus natura exprimitur aequatione inter rectam variabilem $CM = z$ et angulum $ACM = \phi$ investigari solet modo aliqua ratione ab eo diverso, quo positio tangentis investigatur, si singula curvae puncta per rectas parallelas referantur ad rectam quandem pro axe assumptam sub angulo constante inclinatas. Quaeri enim solet angulus, sub quo tangens in puncto M inclinata est ad rectam CM, cum alias positio tangentis per angulum, sub quo ad axem inclinatur sit definita. Sit itaque angulus $ACM = \phi$, et quaerenda proponatur positio tangentis TM in puncto M. Per polum C ducatur recta SR ipsi CM normalis, eaque producat, donec tangentem secet in puncto T, atque patet, quod inventa recta CT, positio tangentis determinata sit, quare hic quoque CT vocari solet *Subtangens* curvae. Crescat angulus ACM differentia $MCN = \Delta\phi$ atque per puncta M et N ducatur recta SMN curvam in punctis M et N secans eaque producat, donec ipsam SR secet in S, quo facto recta CS hic vocari potest *subsecans*. Ex puncto N in rectam CM si opus est productam cadat perpendicularis NP, atque radio CN describatur arcus NO; erit $NO = z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi$ (§. 318.) $NP = \sin(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)$, $OP = \cos(z\Delta\phi + \Delta z\Delta\phi)$, atque

que $PM = \Delta z - \int v (z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi)$. Præterea $PM : PN = CM : CS$, id est $\Delta z - \int v (z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi) : \sin(z$

$$\Delta \phi + \Delta z \Delta \phi) = z : CS, \text{ atque } CS = \frac{z \sin(z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi)}{\Delta z - \int v (z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi)}$$

$$= \frac{z \sin(z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi)}{\Delta z - 1 + \cos z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi}. \text{ Decrescente jam angulo}$$

$MCN = \Delta \phi$, angulus SMT atque simul intervallum TS decrescunt; evanescente vero $\Delta \phi$ recta SM coincidit cum tangente, et punctum S cadet in punctum T , ita ut CS abeat in CT . Est itaque cosinus arcus $z \Delta \phi + \Delta z \Delta \phi$, qui jam evanescit $= 1$, et proinde $CT =$

$$\frac{z \sin(z d\phi + dz d\phi)}{dz} = \frac{z \sin(z d\phi + dz d\phi) : (dz \phi + dz d\phi)}{dz : (z d\phi + dz d\phi)}$$

$$\frac{z}{dz : (z d\phi + dz d\phi)} = \frac{z \cdot z d\phi + z dz d\phi}{dz} = \frac{z \cdot z d\phi}{dz},$$

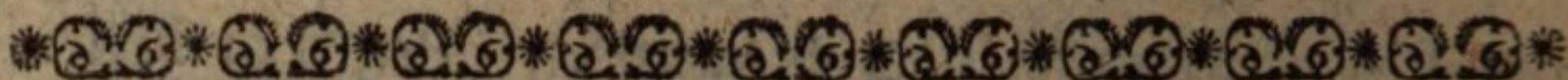
$$\text{ob } \frac{\sin(z d\phi + dz d\phi)}{z d\phi + dz d\phi} = 1 \text{ et } z d\phi = 0. \text{ Tangens}$$

igitur anguli CMT , sub quo recta CM tangentem curvae in M secat, habetur ex analogia $CM : CT = 1 :$

$$\text{tang. } CMT = \frac{z d\phi}{dz}.$$



SECT.



SECTIO VIII.

DE

CURVIS TRANSCENDENTIBVS.

§. 80.

Ad curvas transcendentes non tantum ipsam logarithmicam, sed et curvas exponentiales omnes, quippe quarum constructio pendet a constructione logarithmicæ, pertinere, in præcedente de Analyfi tractatione jam ostensum fuit. Prouti vero generatim omnis æquatio inter duas variables algebraica repræsentat lineam quandam algebraicam in plano descriptam, ita quævis æquatio transcendens inter duas variables pariter repræsentat lineam quandam in plano descriptam et quidem transcendentem. Explicabimus itaque hac Sectione quarundam ejusmodi linearum transcendentium naturam, earum nimirum, quarum usus maxime vulgatus est, quorum potissimum pertinent istae functiones transcendentes, quæ a circulo pendent, et quarum simplicissima datur per ejusmodi æquationem $\frac{y}{a} = A$

$\sin \frac{x}{c}$, ita ut applicata y sit proportionalis arcui circulari, cujus sinus est $\frac{x}{c}$. Quia eidem sinui $\frac{x}{c}$ infiniti arcus respondent, applicata y erit functio infinitinomia abscissæ, eaque proinde curvam in infinitis punctis secabit.

§. 81.

Si s fuerit arcus minimus sinui $\frac{x}{c}$ conveniens

atque

atque π femiperipheria circuli, erunt valores ipsius $\frac{y}{a}$ sequentes:

$$s, \pi - s, 2\pi + s, 3\pi - s, 4\pi + s, 5\pi - s, \text{ etc.}$$

$$-\pi - s, -2\pi + s, -3\pi - s, -4\pi + s, -5\pi - s, \text{ etc.}$$

Quare si recta CAB pro axe et A pro abscissarum initio sumatur, erunt primo posito $x = a$, applicatae $AA^I = \pi a$, $AA^{II} = 2\pi a$, $AA^{III} = 3\pi a$, etc. atque ex altera parte $AA^{-I} = \pi a$, $AA^{-II} = 2\pi a$, $AA^{-III} = 3\pi a$ etc. Sumta vero abscissa $AP = x$, applicata curvam in infinitis punctis M secabit, eritque $PM^I = as$, $PM^{II} = a(\pi - s)$, $PM^{III} = a(2\pi + s)$, etc. Integra igitur curva ex infinitis portionibus BE^IA^I , $A^IF^IA^{II}$, $A^{II}E^{II}A^{III}$, $A^{III}F^{II}$, A^{IV} , etc. similibus composita erit, ita ut singulae rectae axi BC parallelae per puncta E vel F ductae sint curvae diametri. Præterea erit $AC = AB = c$, et intervalla E^IE^{II} , $E^{II}E^{III}$, $E^{III}E^{IV}$ etc, atque F^IF^{II} , $F^{II}F^{III}$ etc. singula erunt $= 2a\pi$. Hanc curvam LEIBNIZIUS vocavit *Lineam Sinuum*. Atque ob similem rationem

lineae æquationibus $\frac{y}{a} = A \cos \frac{x}{c}$, $\frac{y}{a} = A \tan$.

$$\frac{x}{c}, \frac{y}{a} = A \cot \frac{x}{c}, \frac{y}{a} = A \sec \frac{x}{c}, \frac{y}{a} = A \csc$$

$$\frac{x}{c}, \frac{y}{a} = A \operatorname{fv} \frac{x}{c}, \text{ vocari possunt } \textit{Linea cosinuum},$$

tangentium, *cotangentium*, *secantium*, *cosecantium*, *sinuum versorum*, quarum curvarum figurae simili modo, quo ante usi sumus, investigari possunt.

§. 82.

Si circulus ACB rotetur super recta EA, atque punctum diametri productae D quodcunque describat li-^{F. 335.}neam curvam Dd; hæc curva *Cyclois* vel *Trochois* vocatur, atque æquatio pro hac curva investigari potest sequen-

sequentem in modum. Ponatur radius circuli rotantis $CA = a$, et $CD = b$, atque si circulus inter rotandum pervenerit in situm quemcunque $aQbR$, tandem vero in situm $APBD$, quo DA rectæ AE est perpendicularis; ponatur $AQ = z$, erit arcus circuli $aQ = z$, qui divisus per radium a dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, et pun-

ctum describens erit in d , ut sit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$, ubi est d punctum in curva quæsitæ. Ducatur

ex d in rectam AQ perpendicularis dp , et in rectam QR normalis dn , erit $dn = b \sin \frac{z}{a}$ et $cn = -b \cos \frac{z}{a}$,

proinde $Qn = dp = a + b \cos \frac{z}{a}$. Producat dn , donec rectæ AD occurrat in P , sitque $DP = x$, $Pd = y$,

erit $x = b + cn = b - b \cos \frac{z}{a}$, et $y = AQ + dn =$

$z + b \sin \frac{z}{a}$. Sed $b \cos \frac{z}{a} = b - x$, ergo $bb (\cos$

$\frac{z}{a})^2 = bb - 2bx + xx$, $2bx - xx = bb - bb (\cos$

$\frac{z}{a})^2$, $\sqrt{(2bx - xx)} = b\sqrt{(1 - (\cos \frac{z}{a})^2)} = b \sin$

$\frac{z}{a}$, unde porro concluditur $\sin \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$,

$\frac{z}{a} = A \sin \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$, $z = aA \sin \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$

$= aA \cos (1 - \frac{x}{b})$. Valoribus hisce substitutis erit y

$=$

$$= r(2bx - xx) + aA \sin \frac{r(2bx - xx)}{b}, \text{ vel si abscissae}$$

in axe AD a centro circuli C computentur, ponendo $CP = b - x = t$, erit $r(2bx - xx) = r(bb - tt)$, atque inter t et y habetur æquatio $y = r(bb - tt) + aA \cos \frac{t}{b}$. Si $b = a$, *cyclois* vocatur ordinaria, si $b > a$,

curtata, si $b < a$, *elongata*. Perpetuo igitur y est functio ipsius x vel t infinitiformis, nisi x vel t fuerit tanta, ut $r(2bx - xx)$ vel $r(bb - tt)$ fiat quantitas imaginaria.

§. 83.

Si loco rectæ EA assumatur circulus OAQ, atque F. 136. super ejusdem peripheria rotetur alius circulus ACB; curva, quam describit punctum D in diametro AB prolongato vel extra vel intra circulum assumtum, vocatur *Epicyclois*: atque si circulus genitor intra circulum immobilem ad partem peripheriæ concavam rotetur, curva descripto modo genita *Hypocyclois* vocatur. Ponatur radius circuli mobilis $CA = CB = a$, et distantia puncti describentis a centro $CD = b$, atque sumatur recta CD pro axe curvæ Dd quæsitæ. Si a situ initiali, quo puncta OCD in directum jacent, provenerit circulus mobilis in situm QCR, descripto arcu $AQ = z$, ita ut sit angulus AOQ = $\frac{z}{c}$, erit arcus Qa = AQ = z,

angulus acQ = $\frac{z}{a} = Rcd$, et sumta recta cd = CD

= b, erit punctum d in Epicycloide. Ex hoc puncto ad axem demittatur perpendicularum dP, atque ex c perpendicularum cm in OD et cn in dP; atque ob angulum

$$Rcn = AOQ = \frac{z}{c}, \text{ erit angulus dcn} = \frac{z}{c} + \frac{z}{a}$$

$$= \frac{(a+c)z}{ac}. \text{ Ergo habetur } dn = b \sin \frac{(a+c)z}{ac}$$

et

et $cn = b \cos \frac{(a+c)z}{ac}$. Præterea ob $OC = Oc = a+c$,

erit $cm = (a+c) \sin \frac{z}{c}$ et $Om = (a+c) \cos \frac{z}{c}$. Sit

$OP = x$, $Pd = y$, erit $x = (a+c) \cos \frac{z}{c} + b \cos \frac{(a+c)z}{ac}$ et $y = (a+c) \sin \frac{z}{c} + b \sin \frac{(a+c)z}{ac}$. Quo-

ties igitur est $\frac{a+c}{a}$ numerus rationalis, toties ob com-

menfurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ et $\frac{(a+c)z}{ac}$ arcus z

eliminari, et æquatio algebraica inter x et y inveniri potest, quo itaque casu hæc curva algebraica, alias vero transcendens est. Si radius a sumatur negativus, curva est hypocyclois. Præterea si $b=a$, *Epicyclois* vel *Hypocyclois ordinaria*, si $b > a$, *curtata*, si $b < a$, *elongata* vocatur. Quodsi itaque quadrata xx et yy addantur, invenietur æquatio pro Epicycloidibus et Hypocycloidibus generalis ista $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c) \cos \frac{z}{a}$.

§. 84.

F.337. Ad rectam AC in puncto C inclinata fit alia recta MC sub angulo quocunque ACM, ita quidem ut valor ipsius $MC = z$ pro eadem rectæ MC ad rectam AC positione fit $= a$. ACM. Si itaque omnium angulorum, quorum crura coincidunt cum rectis CA et CM, minimus fit $= s$; erunt pro eadem rectæ CM positione valores ipsius y infiniti isti: as , $a(2\pi+s)$, $a(4\pi+s)$, $a(6\pi+s)$ etc, atque $-a(2\pi-s)$, $-a(4\pi-s)$, $-a(6\pi-s)$ etc. Quin etiam si pro s ponatur $\pi+s$, eadem rectæ CM manet positio, præterquam quod valor ipsius z fiat ne-

negativus. Ideo ad valores ipsius z praecedentes accedunt $-(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(s\pi + s)$, etc, atque $a(\pi - s)$, $a(3\pi - s)$, $a(s\pi - s)$. Erunt itaque omnia puncta M in curva quadam transcendente, quae *Spiralis* ab inventore *Archimede* vocatur, quae talem habet figuram, ut rectam AC in C tangat, ab hoc vero termino duobus ramis utrinque infinitis gyris polum C ambientibus atque se mutuo in recta BC ad AC normali perpetuo secantibus in infinitum extendatur, ita ut recta BCB sit ejus diameter. Si aliae aequationes algebraicae inter z et s accipiantur, innumerae aliae prodibunt spirales, si aequatio ita sit comparata, ut singulis ipsius s valoribus respondeant valores ipsius s reales.

Spiralis, quam praebet aequatio $z = \frac{a}{s}$ a JO. BERNOULLIO *spiralis hyperbolica* vocatur. Spiraliū genus multo plures sub se comprehendet curvas, si inter z et s quoque aequationes transcendentes admittantur, quarum praecipue ea notari meretur curva, in qua anguli s logarithmis distantiarum z proportionales sunt, quam F.338. praebet aequatio $z = nl \frac{z}{a}$, quae ideo *Spiralis Logarithmica* seu *Logistica spiralis* vocatur.

§. 85.

Praeter has curvas transcendentes methodus tangentium inversa in Analyfi explicata innumeras alias suppeditat, dum quævis curva transcendens fit, cujus constructio quadraturam vel rectificationem alterius curvae postulat, cujus quadratura vel rectificatio exacta non habetur. Potest ista curva, a cujus quadratura vel rectificatione pendet constructio alterius, hujus curvae *generatrix* vocari, atque tum ipsae curvae transcendentes in diversos ordines distribui, prouti generatrix est vel algebraica vel adeo, ipsa transcendens. Sic curva est

trans-

transcendens primi ordinis, si ejus generatrix est algebraica, *transcendens secundi ordinis*, si generatrix est *transcendens primi ordinis*, et generatim *transcendens ordinis* $n+1$, si generatrix est transcendens ordinis n .

Sic curva æquatione $dy = \frac{adx}{r(2ax-xx)}$, expressa est

transcendens primi ordinis, quia supponit rectificationem circuli, cujus radius est $= a$ et sinus versus $= x$,

Curva vero, quoniam præbet æquatio $2axddy^2 - xxddy^2 = dx^4$ posito differentiali dx constante, est transcendens secundi ordinis, quia supponit quadraturam curvæ ad

quam $dy = \frac{adx}{r(2ax-xx)}$. Est enim per æquationem

datam $ddy^2 = \frac{dx^4}{2ax-xx}$, et proinde $ddy = \frac{dx^2}{r(2ax-xx)}$,

vel $addy = dx \frac{adx}{r(2ax-xx)}$; ideo $ady = dx \int \frac{adx}{r(2ax-xx)}$

Sit $\int \frac{adx}{r(2ax-xx)} = X$, erit $ady = Xdx$, atque ay

$= \int Xdx$, ubi est $\int Xdx$ integrale pendens a quadratura

curvæ $dy = \frac{adx}{r(2ax-xx)}$.

§. 86.

Omnes curvæ transcendentes, ad quas est $y = A \sin x$, vel $y = A \sqrt{x}$, vel $y = A \tan x$, etc, vocari possent quadratrices circuli, eodem sensu, quo logarithmica dicitur hyperbolæ quadratrix, Potissimum vero *quadratrix* circuli ab inventore *Dinostratis* dici solet

curva, ad quam $x = A \cot \frac{y}{x}$, vel $\frac{y}{x} = \cot x$, cu-

F.339. jus constructio sic potest concipi. Radio $CA = r$ describatur circulus, in eoque ducatur diameter AB , cui in centro C normaliter insistat recta indefinita FG . Sumatur

matur $CP = \text{arculi } AD = x$, atque ad rectam FG in puncto P excitetur normalis PM rectæ CD productæ occurrens in M , erit punctum M in quadratrice demonstratis. Eodem modo plura puncta reperientur, quotcunque lubet, capiendo alium arcum AE atque sumendo $Cp = AE$, tumque excitando pm normalem ad FG , quæ rectam CE , productam secet in m , erit quoque m in curva quæsitâ. Quia enim generatim $CP = x$,

si $PM = y$, erit $x : y = 1 : \cot x$, id est $\frac{y}{x} = \cot x$,

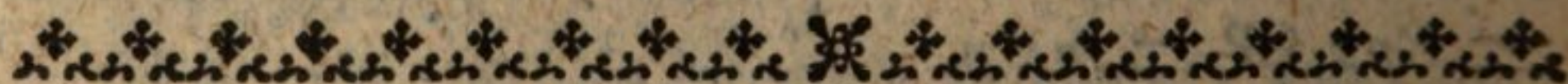
vel $x = A \cot \frac{y}{x}$. Quodsi hæc curva constructa

supponatur, ejus ope angulus quicunque propositus secari potest in data ratione. Ad rectam enim AC in puncto C construatur angulus dato æqualis, qui sit ACM , cujus crus CM occurrat quadratrici in m , a quo puncto ad rectam FG ducatur perpendicularis mp . Deinde si secandus sit angulus in ratione $m : n$ fiat $m : n$; $Cp : CP$, atque ex puncto P excitetur perpendicularis PM occurrens curvæ in M , ducaturque CM ; erit $ACm : ACM = Cp : CP = m : n$.

§. 87.

Cæterum curvarum transcendentium affectiones, quorum pertinet positio tangentis, curvatura, adplicationum maximæ et minimæ, et quæ sunt reliqua, calculi differentialis et integralis ope eodem modo investigantur, quo curvarum algebraicarum affectiones reperiuntur. Formulæ enim differentiales et integrales in *Analysi* expositæ adeo universales sunt, ut pro functionibus algebraicis non solum, sed et pro transcendentibus veræ sint. Multa hujus rei specimina explicatis addere non possumus, ne hoc libellum, quod Studiosis Matheseos prima tantum hujus scientiæ elementa explicare debet, in adeo magnum excrescat volumen. Dabimus unicum, quod sequitur. *In logistica spirali CAMB datur punctum* F.338.
M,

M, et quaritur positio tangentis in hoc puncto respectu rectae *CM* ex polo *C* ad punctum *M* ductae. Posito angulo $\text{ACM} = s$ et recta $\text{CM} = z$; æquatio pro logistica spirali est $s = nl \frac{z}{a}$. Sed tangens anguli, sub quo recta *CM* ad rectam in *M* tangentem inclinatur, est $\frac{zds}{dz}$ (§. 79. *Geom. Subl.*), atque ex æquatione $z = nl \frac{z}{a}$ deducitur $dz = n \frac{dz}{z}$. Proinde $\frac{zds}{dz} = \frac{nzdz}{zdz} = n$. Ergo hic angulus in logistica spirali constans est, quia ipsius tangens est constantis magnitudinis. Angulus, quem recta *CM* cum tangente in *M* comprehendit, idem esse censetur cum eo, sub quo recta *CM* ipsam curvam in *M* secat. Recta igitur *CM* logisticam spiralem ubique sub eodem interfecat angulo.



SECTIO IX.

DE

EVOLUTIONE CURVARVM.

§. 88.

¶. 340 Si curvæ *ACG* adplicetur filum perfecte flexibile, cuius extrema pars *AB* extensa sit in lineam rectam, curvam *ACG* in initio *A* tangentem; tumque terminus *A* æquabili manus ductu moveatur versus *M*, ita quidem, ut perpetuo pars *CE* a curva abducta extensa sit in rectam, quae curvam in puncto *C* tangat; punctum fili

ex-

extremum B describet curvam BEM. Tumque curva ACG vocatur *Evoluta curvae* BEM; hæc vero BEM dicitur *curva ex evolutione curvae ACG descripta*. Est itaque perpetuo recta CE æqualis arcui CA curvæ evolutæ + constante AB. Deinde ipsa CE perpetuo est radius curvaturæ curvae BEM ex evolutione curvae ACG descriptæ in puncto E. Si enim radio CE describatur circulus ER, dico eundem esse eorum, qui curvam EM apud E tangere possunt maximum. Capiatur enim EN > EC utcumque, et per punctum N ducta sit recta tangens evolutam in F, quæ producta cum curva BM concurrat in M, cum circulo ER vero in R. Ducatur CR, quæ erit = CE. Praeterea est FM = arcui FC + CR, ergo FM > FR, et proinde arcus EM curvæ ex evolutione descriptæ cadit extra circulum ER. Quivis vero circulus radio DE < CE descriptus cadit intra circulum ER, ergo eorum nullus per spatium intra EM et ER transire potest. Denique FN + NC > FC (§. 164. *Geom. Elem.*), proinde FN + NC + CE > FC + CE, id est FN + NE > FM. Utrunque igitur FN subtracto invenitur NE > FM - FN, id est NE > NM. Ergo pars circuli radio NE > CE descriptus cadit extra EM, unde patet, rectam CE esse radium curvaturæ curvæ BM in puncto E.

§. 89.

Data jam æquatione pro curva quacunque AM in- f.341.
ter coordinatas orthogonales, ejus evoluta invenitur sic ratiocinando. Ex puncto M quocunque propositæ curvæ ad axem demittatur applicata MP, ut sit AP = x, PM = y. Radius curvaturæ in M sit MC, qui tangit evolutam BC apud C. Radius curvaturæ in puncto A, ubi axis curvam trajicit, inventus sit AB, erit iterum punctum B in curva evoluta et AB ipsius tangens in B. Ex puncto C ad applicatam MP productam cadat perpendicularis CE, atque ex eodem puncto C perpendicularis CN ad axem curvæ datæ. Erit primo MH : MP =

Qq q

HC :

$$HC : PE = CN = \frac{MP \cdot HC}{MH}. \text{ Deinde est } MH \cdot HP =$$

$$MC : CE = PN = \frac{HP \cdot MC}{MH}, \text{ unde concluditur } BN =$$

$AP + PN = AB$. Sed radius curvaturae MC , normalis MH , subnormalis PH et radius curvaturae AB , habentur ex formulis in præcedentibus inventis per functiones ipsius x expressæ. Positis itaque $BN = r$, $NC = u$, ex æquatione pro curva AM data duae eliciuntur æquationes x , r et u involventes, ex quibus per eliminationis methodum deducitur æquatio tantum variables r et u involvens. Ne autem in casibus specialibus calculus fiat nimis prolixus, quaeri potest ME ex formulis differentialibus. Quia enim $MH = \frac{y r (dx^2 + dy^2)}{dx}$

$$(\S. 34.) \text{ erit } \frac{y r (dx^2 + dy^2)}{dx} : y = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} : ME = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}.$$

§. 90.

Sit curva AM parabola, cujus vertex est A , et latus transversum AN ; ac primo habentur radii curvaturae

$$MC \text{ et } AB \text{ ex formula } \frac{(dx^2 + dy^2) r (dx^2 + dy^2)}{-dxddy}.$$

Sit enim parabolae parameter $= a$; erit $yy = ax$, unde

$$2ydy = adx; dy = \frac{adx}{2y}, dy^2 = \frac{aadx^2}{4yy} = \frac{adx^2}{4x}.$$

Praeterea sumto dx constante fit $ddy = \frac{-adx^2}{4x r ax}$. Er-

$$\text{go } dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{adx^2}{4x} = \frac{(4x + a)dx^2}{4x}; r(dx^2 +$$

+

$$+ dy^2)' = \frac{dx \sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{x}}; (dx^2 + dy^2) \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$\frac{(4x+a)dx^2}{4x} \cdot \frac{dx \sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{x}} = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8x^{\frac{3}{2}}}; MC =$$

$$\frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}} dx^3}{8x^{\frac{3}{2}}} : \frac{adx^3}{4x \sqrt{ax}} = \frac{x(4x+a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{ax}}{2ax^{\frac{3}{2}}}. \text{ Ergo}$$

$$MC^3 = \frac{a^2 (4x+a)^3 ax}{4a^2 x^3} = \frac{(4x+a)^3}{4a} = 16x^3 + 12x^2$$

+ 3ax + $\frac{1}{4}aa$. Pro radio AB est $x=0$, unde $AB = \frac{1}{2}a$. Subnormalis PH est constans = $\frac{1}{2}a$. Fit itaque $ME =$

$$\frac{(4x+a)dx^2}{4x} : \frac{adx^2}{4a \sqrt{ax}} = \frac{(4x+a) \sqrt{ax}}{a} = \frac{4x \sqrt{ax}}{a} +$$

$$\sqrt{ax} = \frac{4x \sqrt{ax}}{a} + y. \text{ Ergo } PE = NC = u =$$

$$\frac{4x \sqrt{ax}}{a}. \text{ Deinde } y : \frac{1}{2}a = \frac{4xy}{a} + y : EC = 2x + \frac{1}{2}$$

a , ergo $BN = t = 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Ex hac æquatione $t = 3x$ fit $x = \frac{1}{3}t$, quo valore in æquatione

$$u = \frac{4x \sqrt{ax}}{a} \text{ substituto, habetur } u = \frac{\frac{4}{3}t \sqrt{\frac{1}{3}at}}{a}, 3au = 4t$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}at}, 9a^2 u^2 = \frac{16}{3}at^3; 27a^2 u^2 = 16at^3, \text{ vel } \frac{27}{16}au = t^3.$$

Ergo evoluta parabola Apollonianæ est parabola cubica, cujus parameter est $\frac{27}{16}$ parametri Apollonianæ.

§. 91.

Sit curva AMB cyclois ordinaria, et brevitatis gratia ponatur diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$,

$$PM = y, \text{ erit } QP = \sqrt{(x-xx)}, \text{ arcus } AQ = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-xx)}}$$

$$\text{et proinde } PM = PQ + QM = \sqrt{(x-xx)} + \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-xx)}}.$$

Qq q 2

Ergo

$$\text{Ergo } y = r(x - xx) + \frac{\int dx}{2r(x - xx)}, dy = \frac{dx - 2x dx + dx}{2r(x - xx)}$$

$$= \frac{2dx - 2x dx}{2r(x - xx)} = \frac{dx(1 - x)}{r(1 - x)r x} = \frac{dx r(1 - x)}{r x}, \text{ unde}$$

$$\text{si } dx \text{ sumatur constans, habetur } ddy = - \frac{dx^2 r x}{2x r(1 - x)}$$

$$\frac{dx^2 r(2 - x)}{2x r x} = \frac{-x dx^2 - dx^2 + x dx^2}{2x r(x - xx)} = - \frac{dx^2}{2x r(x - xx)}$$

$$\text{Ergo } dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{dx^2(1 - x)}{x} = \frac{x dx^2 + dx^2 - x dx^2}{x}$$

$$= \frac{dx^2}{x}, \text{ et } MC = \frac{(dx^2 + dy^2) r(dx^2 + dy^2)}{-dx ddy} =$$

$$\frac{2x dx^3 r(x - x^2)}{x dx^3 r x} = 2r(1 - x) = 2DQ. \quad \text{Quia enim}$$

$PD^2 = 1 - 2x + xx$ et $PQ^2 = x - xx$, erit $DQ^2 = 1 - x$, et $DQ = r(1 - x)$. Si $x = 0$, erit radius curvaturae $= 2r \cdot 1 = 2 = 2AD$. Si itaque fiat $DG = AD$, erit G in evoluta. Si $x = AD = 1$, erit radius osculi $= 2r(1 - 1) = 0$, ideo punctum B pariter est in evoluta. Ducatur BL ipsi QD vel MC parallela, et erit $LBD = BDQ$, et proinde arcus QD , BL , eorumque chordæ æquales. Ideo quoque $BL = EC$, et $LC = BE$. Præterea vero $AQ = QM = DE$, $AQD = DB$ et proinde $BE = QD = BL = CL$. Ergo evoluta cycloidis ipsa est cyclois priori similis et æqualis.

§. 92.

Quia radius curvaturæ CM semper æqualis est arcui evolutæ, vel eundem excedit data constante, omnes arcus evolutarum geometricè rectificantur, quarum radii per constructiones geometricè inveniri possunt. Sic patet ex §. præcedente, cycloidem geometricè rectificabilem esse; nimirum arcus $CB = CM = 2BL$. Posse-

mus

mus vero methodum generalem rectificandi curvam ope suæ evolutionis ex his colligere, qui sequentibus nititur ratiociniis. Data sit curva AC, cujus tangens in puncto B sit recta GB. Punctum A evolvendo describat curvam AD, erit $BM = \text{arculi AB}$. Tangens BG habetur methodis supra explicatis: ideo restat, ut inveniatur $GM = u$, quæ subtracta a tangente dabit $MB = \text{arculi AB}$. Crescat $AG = t$ differentia sua $GE = \Delta t$, atque per punctum E transeat nova tangens EC. Fiat $DH = MG$, erit $HE = \Delta u$. Ex puncto G ad CE cadat perpendicularis GF, atque ex A ad AE excitetur perpendicularis AL occurrens tangenti GB in L et tangenti EC in I, erit $EI = r + \Delta r$, si GL ponatur $= r$. Praeterea

$EG : EF = EI : EA$, atque $\frac{EG}{EH} : \frac{EF}{EH} = EI : EA$, id est

$$\frac{\Delta t}{\Delta u} : \frac{EF}{\Delta u} = r + \Delta r : t + \Delta t, \text{ vel } \frac{\Delta t : \Delta u}{EF : \Delta u} = \frac{r + \Delta r}{t + \Delta t}.$$

Decrescente jam GE vel Δt , simul decrescunt Δu , Δr , Δt , EF , ac evanescente Δt , simul Δu , Δr , Δt , EF , evanescent, et quidem Δu et EF in ratione æqualitatis.

Fit itaque $\frac{dt}{du} = \frac{r}{t}$, vel $\frac{du}{dt} = \frac{t}{r}$, et $u = \int \frac{t dt}{r} = GM$, quod subtractum a tangente relinquit $MB = \text{arculi AB}$.

§. 93.

Restat, ut quæramus methodum, ex data evoluta inveniendi curvam evolutione descriptam. Ubi in antecessum notari meretur, quod problema hoc diversas admittat solutiones, prouti initium evolutionis in hoc vel alio datæ curvæ puncto sumatur. Sit enim curva data ABCD, eidemque applicari concipiatur filum, cujus unus terminus fixus sit in D, alter vero protendatur ultra verticem A, usque ad E. Hoc filum si evolvi intelligatur, describet punctum E curvam EF et punctum A curvam AG, quæ duæ curvæ diversæ erunt naturæ.

Radius enim circuli osculantis curvam EF in E erit = EA, radius vero circuli osculantis curvam AG in A est = 0. Sic quoque eodem tempore quodlibet punctum intermedium B suam describet curvam particularem BH. Quodsi nunc terminus A fixus alter D vero mobilis concipiatur; manifestum est, punctum D et omnia intermedia C describere curvas DK, CI, tam inter se, quam a prioribus diversas, nisi curvæ ABCD ab utraque parte sit similis positio. Hanc ob causam curvarum tantum EF et AG natura quomodo invenienda sit, explicabimus, quia reliquarum, ut curvæ BH, natura simili reperitur methodo, considerando B tanquam verticem curvæ BCD, et BL ad curvam normalem.

§ 94.

1.345. Sit itaque AB curva data, A vertex, AC axis curvæ AB, AC = x, CB = y. Curvæ AB adplicatum sit filum, cujus terminus protenditur ultra verticem usque ad D, quique per evolutionem describit curvam DE. Producantur CA et DA, ad quas demittantur perpendiculares EG, EH, ac ultima EH producatur usque ad L. Sit AD = b, AB = s, DH = t, HE = u. Quia BF est tangens et FC subtangens evolutæ, erit BF =

$$\frac{yds}{dy}, AF = \frac{ydx}{dy}. \quad \text{Sed } BF : FC = EB : EL, \text{ id est}$$

$$\frac{yds}{dy} : \frac{ydx}{dy} = s + b : EL; \text{ ergo } EL = \frac{(s+b)dx}{ds}. \quad \text{Præterea}$$

$$BF : BC = BE : BL, \text{ five } \frac{yds}{dx} : y = s + b : BL, \text{ et}$$

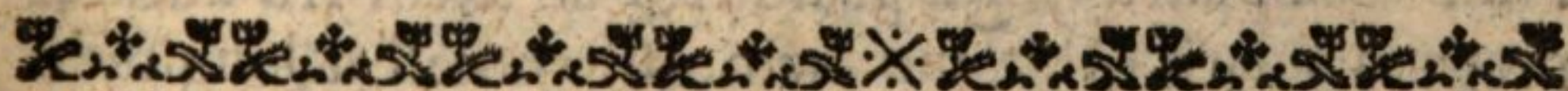
$$\text{proinde } BL = \frac{(s+b)dx}{ds}. \quad \text{Ergo } CL = AH = y -$$

$$\frac{(s+b)dx}{ds}, DH = t = b + y - \frac{(s+b)dx}{ds}, \text{ et } HE = u =$$

EL

$EL - AC = \frac{(s+b)dx}{ds} - x$. Quia igitur $ds = r(dx^2 + dy^2)$; invenitur $t = b + y - \frac{(s+b)dx}{r(dx^2 + dy^2)}$ et $u = \frac{(s+b)dx}{r(dx^2 - dy^2)} - x$. Si vero evolutio incipit in A, fiet $b = 0$, unde hoc casu erit $t = y - \frac{sdy}{r(dx^2 + dy^2)}$, et $u = \frac{sdx}{r(dx^2 + dy^2)} - x$. Valori itaque ipsius dy ubique sub-

stituto secundum naturam curvæ datæ AB invenitur quidem natura curvæ DE absque differentialibus; sed littera s non eliminabitur, quod indicio est, naturam curvæ DE pendere a rectificatione curvæ AB. Licet igitur data curva AB sit geometrica, tamen plerumque DE fit curva transcendens, atque tum solum algebraica est, si evoluta est rectificabilis.



SECTIO X.

DE

SUPERFICIEBUS, SOLIDIS ROTVNDIS
 ET CURVIS DVPLICIS CURVATVRAE.

§. 95.

Prouiti natura lineæ cujuscunque in eodem plano de-
 scriptæ exprimi potest æquatione inter duas variabi-
 les x et y ; sic natura superficiæ cujuscunque repræsen-
 tatur æquatione inter tres variabiles x , y et z , ita ut
 una earum z sit functio duarum reliquarum x et y . Sin-

gula nimirum lineæ curvæ in eodem plano descriptæ puncta referuntur ad duos axes, in dato puncto sub angulo quocunque, potissimum recto se intersecantes, ita ut ultimo casu ex æquatione pro curva data distantia cuiusvis ipsius puncti ab utroque axe definiatur. Licet vero locus puncti in dato plano perfecte determinetur, si cognita sit ipsius distantia a duabus rectis in eodem plano normaliter seinvicem decussantibus; tamen locus puncti M generatim non determinatus est, si cognita sit ipsius distantia a duabus planis se mutuo normaliter secantibus ut AQ et AR . Eum in finem opus est tertio plano Aq ad utrumque priorum normali. Quodsi enim ex puncto M ad plana AQ , Aq , AR demittantur perpendiculares MQ , Mq , MR ; hisce distantis locus puncti M penitus determinatur. Sit itaque punctum M in superficie quacunque, atque assumpto plano quodam AQ pro lubitu, ad quod singula illius superficie puncta referantur, demittatur ex puncto M ad hoc planum perpendicularis MQ . Praeterea in plano AQ assumatur recta quaedam AB pro axe et A pro initio abscissarum. Ex puncto Q in plano AQ ad axem AB ducatur perpendicularis QP : quo facto, si innotescat longitudo trium coordinatarum $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, situs puncti M determinatus erit.

§. 96.

Ex his patet, quod data æquatione inter tres variables x , y , z , natura superficie determinetur, sicut suntis pro lubitu binis variabilibus x et y , determinetur magnitudo tertiæ z , atque pro quavis superficie proposita variabilis z sit functio duarum variabilium x et y . Possunt itaque superficies dividi in *continuas* seu *regulares* et *discontinuas*, seu *irregulares*. Prioris generis illæ sunt, quarum omnia puncta per eandem æquationem inter z , y , et x exprimi possunt, seu ubi z est eadem functio variabilium x et y pro omnibus superficie punctis. Superficies vero irregulares sunt, quarum

rum variæ partes per diversas functiones exhibentur. De regularibus hic tantum sermo erit, quæ iterum subdividi possunt in *algebraicas* et *transcendentes*, prouti z erit vel algebraica vel transcendens ipsarum x et y functio. Denique ad id quoque respiciendum est, qualis sit functio z ipsarum x et y ratione numeri valorum, quos continet, prouti vel æquatione simplici $z = P$, vel quadratica, $zz - Pz + Q = 0$, vel cubica $z^3 - Pz^2 + Qz + R = 0$, vel altiore quadam determinatur, ubi P , Q , R , etc, sunt functiones variabilium x et y uniformes.

§. 97.

Quodsi in æquatione inter tres variabiles x , y , z , ea, quæ ad planum APQ est normalis, nempe z , ubique pares habeat dimensiones; tum geminos habebit valores absolute æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Proinde superficies ita erit comparata, ut ad utramque plani APQ partem sit sui similis et æqualis, ideoque solidum, quod ista superficie terminatur, sectione secundum planum AQ facta, in duas partes similes et æquales dividetur. Ideo hoc casu illud *planum* potest *diametræle* vocari. Eodem modo patet, planum Ap fore diametræle, si variabilis y ubique pares habet dimensiones. Planum AR vero diametræle erit, si variabilis x pares ubique habet dimensiones. Fieri quoque potest; ut duo, quin omnia hæc plana sint diametrælia. Sic pro superficie sphaere, cujus centrum est A , ob radius $AM = r(xx + yy + zz) = a$, erit $xx + yy + zz = a$. Ceterum, si punctum M fuerit in superficiei plana, assumpto plano AQ parallelo, z erit quantitas constans $= b$, ita ut æquatio pro hoc plano fiat $z = b$, atque z a variabilibus x et y non pendeat. Si fuerit M in plano, quod planum AQ in recta AB secet; invenietur $PQ : QM$, uti sinus totus vel radius ad tangentem anguli inclinationis eorum planorum. Quæ

ratio si fuerit $m : n$; foret aequatio pro superficie pla-

$$\text{na } z = \frac{n}{m} y.$$

§. 98.

Si in aequatione pro superficie quadam data ponatur $z = 0$; remanet aequatio inter x et y , quae exprimet lineam, in qua superficies proposita a plano AQ interfecatur. Pari modo suppositio $y = 0$ dabit aequationem inter x et z , quae exprimet intersectionem plani Aq cum data superficie. Denique si ponatur $x = 0$, aequatio residua inter y et z dabit intersectionem plani AR cum superficie. Haud absimili modo determinantur curvae, in quibus proposita superficies per planum uni trium principalium parallelum interfecatur. Si enim concipiatur planum ipsi AQ parallelum, ab eodem distans intervallo $= b$; omnia superficiei puncta, quorum ab eodem plano AQ distantia, quae per variabilem z indicatur est $= b$, sita erunt in isto plano parallelo, eorumque locus erit intersectio plani cum data superficie. Invenitur itaque pro hac intersectione aequatio, si in aequatione pro superficie ponatur $z = b$; hoc enim facto habetur aequatio inter binas variables x et y , naturam sectionis exprimens. Eodem quoque modo intersectiones, quae per plana vel ipsi Aq , vel ipsi AR parallela formantur, reperiri possunt, quod facile patet. Si itaque constanti arbitrariae b successive omnes valores positivi et negativi tribuantur, obtinebuntur omnes intersectiones plano AQ parallelae atque omnes istae sectiones unica aequatione inter x et y constantem arbitrariam involvente exprimentur, unde omnes istae sectiones erunt lineae vel similes, vel saltem affines,

§. 99.

Potissimum ex genere superficierum, in quibus omnes sectiones plano AQ parallelae sunt similes, notari merentur illae, in quibus omnes istae sectiones sunt circuli, quorum centra cadunt in eandem rectam ad planum

AQ

AQ normalem. *Solida* ejusmodi superficiebus termina-
ta *tornata* dicuntur, quia torno efformata esse concipi
possunt. Plano enim circuli CD in centro A normaliter F.347.
insistat recta AB, quæ sit axis lineæ BMS in plano NBA sitæ
et per circuli peripheriam in N transeuntis. Praeterea
ex puncto M ad planum circuli CD cadat perpendicu-
laris MQ, erit Q in recta NA communi planorum NBA
et circuli CD intersectione. Sumta recta AC quacun-
que in plano circuli CD pro axe, ad eandem ex puncto
Q cadat perpendicularis QP, et vocentur $AP = x$, PQ
 $= y$, $QM = z$. Si denique ex puncto M ad axem AB
lineae NMB ducta sit perpendicularis Mp, ea fit appli-
cata hujus lineae orthogonalis pro abscissa $Ap = QM =$
 z , et proinde erit $Mp = AQ$ functio ipsius z quacun-
que, quae si denotetur littera Z; ex triangulo APQ re-
ctangulo habetur $AQ^2 = ZZ = xx + yy$. Ergo ZZ
 $= xx + yy$ est aequatio generalis pro superficiebus om-
nium solidorum tornatorum, quae ortae esse concipi
possunt, plano NBA circa axem AB rotato. Si BMN
sit parabola, cujus latus transversum BA, parameter
 p et abscissa $Bp = x$, erit $Mp^2 = px$. Si $AN = a$, AB
 $= b$, erit $p = \frac{aa}{b}$, et $Mp^2 = \frac{aa}{b} x$. Si jam AP
 $= z$, erit $Ap = z = b - x$, atque $x = b - z$; unde Mp^2
 $= \frac{aa}{b} z = AQ^2$. Ergo aequatio $aa - \frac{aa}{b} z = xx +$
 yy est pro superficie solidi, quod revolutione parabolæ
circa axem transversum generatur, atque *Sphaeris para-*
bolica vocatur. Sit BMN ellipsis, cujus axes conjugati
sunt $AN = a$ et $AB = b$, centrum A, abscissa $Ap = z$, erit
 Mp^2 vel $AQ^2 = aa - \frac{aa}{bb} zz$, unde, æquatio $aa -$
 $\frac{aa}{bb} zz = xx + yy$ est pro solido revolutione ellipsos

circa axem generato, quod *sphæroidis elliptica* dicitur. Hæc æquatio ponendo $b = a$, fit $aa - zz = xx + yy$ pro sphaera. Si aa sit negativa quantitas, æquatio —

$$aa + \frac{aa}{bb} zz = xx + yy \text{ est pro superficie } \textit{sphæroidis}$$

hyperbolici, ubi a denotat axem conjugatum atque solidum revolutione circa axem transversum generatum esse intelligitur.

§. 100.

Prouti exposita methodo investigatur natura sectionis, quæ oritur, si superficies quæcunque a plano secatur; ita quoque investiganda sæpe proponitur natura sectionis, si superficies curva proposita ab alia quadam curva superficie interfecetur. Tum vero sectio non in eodem plano jacebit, et proinde ejus natura duabus coordinatis comprehendi nequit. Trium coordinatarum cum in finem opus est, quibus cujusvis puncti in tali curva distantia a tribus planis inter se normalibus determinatur, ita quidem, ut una earum pro lubitu determinata, binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas coordinatas non sufficit ad hoc præstandum, quia eadem esset pro universa superficie; sed duabus opus est æquationibus, quarum ope, si uni variabili datus valor tribuatur, simul reliquarum valores determinentur. Quocirca curvæ duplicis curvaturæ natura exprimi poterit duabus æquationibus inter tres variabiles x , y , z , quæ totidem coordinatas inter se normales repræsentant.

§. 101.

Sit igitur proposita linea duplicis curvaturæ, in qua sumtum est punctum M quodcunque. Assumantur tres axes inter se normales AB , AC , AD , quibus tria plana BAC , BAD , CAD sibi invicem normalia determinantur. Ex puncto curvæ M in planum BAC demittatur perpendiculum MQ , et ex puncto Q ad axem AD duca-

ducatur normalis QP, erunt AP, PQ et QM tres illæ coordinatae, inter quas si duæ dentur æquationes, natura curvae determinatur. Si jam ponatur $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, atque ex duabus æquationibus inter x , y et z propositis eliminando z formetur æquatio duas tantum variables x et y continens; ea determinabit locum puncti Q in plano BAC, qui erit curva quædam EF in plano BAC descripta, atque *projectio curvæ* GMH in planum BAC dicetur. Prouti autem hæc curvæ GMH projectio in plano BAC invenitur eliminando variabilem z , ita ejusdem curvæ projectio in plano BAC vel CAD habetur eliminando variabilem y vel x . Una projectio EQF non sufficit ad curvam GMH cognoscendam. Cognitis vero perpendicularis $QM = z$ pro singulis punctis Q natura curvæ GMH perfecte cognoscitur. Praeterea quoque ex duabus projectionibus curvæ GMH in duobus planis ipsa hæc curva cognoscitur. Vel quocunque si detur superficies, in qua linea curva CMH continetur, et praeterea ejus projectio in uno plano, pariter illa curva erit cognita. Excitatis enim ex singulis punctis projectionis perpendicularis QM, eorum puncta extrema, ubi superficiei occurrunt, erunt in curva GMH.

§. 102.

Intersecetur nunc superficies quaecunque ab alia, earumque communis intersectio erit vel linea recta vel curva, et posteriori casu vel simplicis vel duplicis curvaturæ. Utcunque autem hæc linea fuerit comparata, singula ejus puncta erunt in utraque superficiei, et proinde in æquatione utriusque superficiei continebuntur. Quodsi itaque ambæ superficies exprimantur æquationibus inter ternas coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter se normalia, vel ad eosdem tres axes inter se normales AB, AC, AD referantur, ambæ istæ æquationes conjunctæ naturam intersectionis expriment. Si ex hisce æquationibus una variabilium x , y , z , elimine-

minetur, aequatio inter binas reliquas definit projectionem intersectionis in plano, in quo istae coordinatae jacent. Si haec æquatio projectionis fiat impossibilis, ambae superficies se nusquam intersecant. Quodsi vero projectio in punctum evanescat, ipsa quoque intersectio erit punctum, seu potius ambae superficies se *in puncto contingent*. Praeterea quoque datur *contractus superficialium linearis*, ac ipsa linea contactus erit vel recta vel curva. Sic recta erit linea contactus, si planum tangat cylindrum vel conum. Conus rectus autem a sphaera intus tangitur in peripheria circuli. Iste contactus aequatione cognoscitur, si pro projectione ejusmodi invenitur aequatio, quae duas habet factores aequales. Si enim duae intersectiones coincidunt, contactus locum habet.

§. 103.

Methodus itaque generalis, vi cujus cognosci potest, utrum superficies quaecunque a plano vel alia superficie tangatur, an non? ad sequentia redibit. Eliminata ex ambabus æquationibus una variabili, dispiciendum est, utrum æquatio inventa resolvi possit in factores simplices, an secus. Si inveniantur duo factores simplices impossibiles, dabitur contactus in puncto, quod invenietur, ponendo utrumque factorem $= 0$. Si factores simplices inveniantur reales et aequales, superficies se mutuo secundum lineam rectam tangent. Si denique æquatio habeat duos factores non simplices aequales; vel si fuerit per quadratum divisibilis, ejus radix nihilo æquata, dabit projectionem lineae contactus. Unde simul patet, quod casu quatuor factorum simplicium impossibilium superficies se mutuo in duobus punctis contingant. Caeterum licet ex impossibilitate projectionis ad impossibilitatem intersectionis rite concludatur, vicissim a projectione reali tuto non concluditur ad intersectionem realem. Ut enim ipsa intersectio sit realis, non sufficit projectionem esse realem, sed insuper perpendi-

pendicula ex projectione ad intersectionem ducta realia esse debent. Licet igitur omnis curva realis habeat projectiones reales, tamen non vicissim ex realitate projectionis realitas curvae quaesitae sequitur,

§. 104.

Caeterum facilior modus inveniendi plani datam superficiem in dato puncto tangentis positionem deduci potest ex methodo inveniendi tangentes curvarum in eodem plano descriptarum supra explicata. Natura superficiei data sit aequatione inter tres coordinatas $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, atque si determinanda sit positio plani superficiem in puncto M tangentis, sic ratiocinandum erit. Si superficies secetur plano quocunque per punctum M transeunte, sectionis inde ortæ tangens in puncto M erit in plano tangente. Si itaque duarum ejusmodi sectionum tangentes in puncto M repertae sint, planum earum tangentium erit ipsum planum tangens, quod quaeritur. Ergo secetur superficies per punctum M plano per normalem MQ transeunte atque ad rectas PQ , AB , normali; erit idem hoc planum ad planum APQ normale, et intersectio QS ipsi AP parallela. Deinde alio plano pariter per QM transeunte ideoque ad APQ normali fiat intersectio secundum rectam QP ; erit hoc planum secans axi AP normale. Sit curva EM prior intersectio cum data superficie, FM vero altera. Quaeratur tangens MS curvae EM in M axi QS in S occurrens, ita ut QS sit subtangens curvae EM . Tum si eodem modo quaeratur tangens MT curvae TM , inventa subtangente QT ; planum SMT erit planum tangens quaesitum. Recta igitur ST erit intersectio plani tangentis et plani APQ . Praeterea si ex Q ad ST ducatur perpendicularum QR ; erit $QR : QM = 1 : \text{tang. } MRQ$, qui est angulus, sub quo planum tangens ad planum APQ inclinatur.

§. 105.

Quodsi per methodum tangentium supra explicatum

tam inventae sint subtangentes $QS = s$ et $QT = t$, erit

$$PT = t - y. \quad PX = s - \frac{sy}{t}, \quad AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

Ex his habetur punctum X, in quo recta ST axem AP secat. Deinde quia $AXS = TSQ$, erit *tang.* $AXS = \frac{t}{s}$, ex quo positio intersectionis plani tangentis in pla-

no APQ respectu axis AP innotescit. Praeterea habe-

$$\text{tur } ST = r(ss + tt), \text{ et proinde } QR = \frac{st}{r(ss + tt)},$$

ex quo concluditur tangens anguli inclinationis plani tan-

$$\text{gentis ad planum } APQ = \frac{zr(ss + tt)}{st}. \quad \text{Si per pun-}$$

ctum M transeat MN normalis ad planum tangens; ea quoque ipsae *superficie in M normalis* esse dicitur. Quia haec NM normalis est ad MR, ea erit in plano RQM ad planum SNT normali, ideo recta RQ producta, eidem in puncto quodam N occurrit, ut fiat $QN = \frac{zzr(ss + tt)}{st}$.

Ex puncto N, quod erit in plano APQ ducatur perpendicularis NV ad axem AP, secans rectam SQ productam in W; erit angulus QNV = QST et

$$PV = QW = \frac{zz}{s}, \text{ et } NW = \frac{zz}{t}. \quad \text{Proinde si}$$

ex his formulis definiatur positio puncti N in plano APQ; erit NM ad superficiem normalis.

§. 106.

Si data sit curva Mm duplicis curvaturae, ejusque tangens quaeratur in dato puncto M; ope projectionis curvae in subjecto plano res perfici potest. Vocatis enim coordinatis orthogonalibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, ponamus curvam Qq, esse ipsius Mm projectionem in plano APQ. Crescat AP differentia sua

Pp

$Pp = \Delta x$; coordinata PQ crescet differentia sua $rq = \Delta y$,
 atque z differentia $Rm = \Delta z$. Quia MQ et mq sunt pa-
 rallelae hae rectae erunt in eodem plano. Proinde si
 ducatur recta rQq secans projectionem in punctis Q et q ,
 atque praeterea recta SMm secans curvam datam in M et
 m ; ambae secantes in eodem erunt plano, atque in pun-
 cto quodam S concurrent. Erit itaque Ps subsecans
 projectionis, atque QS dicetur subsecans curvae Mm.

Est itaque $Ps = y \frac{\Delta x}{\Delta y}$; atque ob analogiam $Rm:RM =$

$MQ:QS$, vel $\Delta z:r(\Delta x^2 + \Delta y^2) = z:QS$, erit re-

cta $QS = \frac{zr(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\Delta z} = z\Delta x r(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}): \Delta z$. Eva-

nescente Δx , quando Qs abit in tangentem Qt, et Ps in

subtangentem $Pt = y \frac{dx}{dy}$; recta secans MS cadit in tan-

gentem MT, atque subsecans QS evadit Subtangens QT

$= zdx r(1 + \frac{dy^2}{dx^2}): dz$, vel $QT = \frac{zr(dx^2 + dy^2)}{dz}$. Fit

itaque $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } QtP$; atque ob $QT:QM = 1:\text{tang.}$

MTQ , invenitur $\text{tang. } MTQ = \frac{dz}{r(dx^2 + dy^2)}$. Ex his

quoque via patet ad inveniendam longitudinem arcus da-
 ti curvae Mm per calculum integralem. Est enim re-

cta $Mm = r(\Delta^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta x r(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2})$

quae evanescente differentia Δx et ab ea pendentibus Δy
 et Δz cum arcu ipsius evanescit in ratione aequalitatis,

ita ut vocato arcu $Mm = \Delta s$ fiat $\frac{ds}{dx r(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2})}$

$\frac{ds}{dx r(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2})} = 1$

$$= 1, \text{ et proinde } \frac{ds}{dx} = r \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} \right). \text{ Ergo } ds = \\ \int dx r \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2} \right), \text{ vel } ds = \int r (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

§. 107.

n.350. Solidum *cubare* est rationem solidi ad datum cubum pro unitate assumptum numero exprimere, five solidum mensurare. Solidi rotundi, revolutione curvae AM circa axem AP geniti mensura sic invenitur. Si AP = x crescat differentia sua Pp = Δx, atque in punctis P et p excitentur applicatae orthogonales PM = y, pm, ducta MR ipsi AP parallela, erit Rm = Δy, MR = Δx. Sed revoluta sic curva rectangulum PMRp describit cylindrum, cujus mensura habetur ex §. 25. *Cor. I. Calc. Ext.* Sit enim ratio radii ad peripheriam = r : p, erit peripheria circuli radio PM descripti = $\frac{py}{r}$, quae multiplicata per dimidium radii = $\frac{1}{2}y$ dat hujus circuli aream = $\frac{py^2}{2r}$. Hac iterum ducta in altitudinem cylindri ha-

betur soliditas ipsius = $\frac{py^2}{2r} \Delta x$. Jam iste cylindrus mi-

nor quidem est solido revolutione figurae PMmp genito; sed differentia horum solidorum minuitur decrescente Δx, et evanescit evanescente Δx. Unde patet ea solida evanescere in ratione æqualitatis, ita ut solido ex figurae APM revolutione genito littera S denotato fiat

$$\frac{\frac{dS}{\frac{py^2}{2r} dx}}{\frac{py^2}{2r}} = 1, \text{ atque } \frac{dS}{dx} = \frac{py^2}{2r}, \text{ unde erit ipsum so-}$$

$$\text{lidum } S = \int \frac{py^2}{2r} dx.$$

§. 108.

Sit curva AM circulus, ut solidum S fiat sphaera;
 erit

erit $yy = 2rx - xx$, unde $\frac{pyydx}{2r} = pxdx - \frac{pxxdx}{2r}$,

et $\int \frac{py^2 dx}{2r} = \frac{1}{2} px^2 - \frac{px^3}{6r}$, ex quæ formula habetur

cubatura indefinita segmenti sphærici, cujus diameter $2r$ et altitudo $= x$. Quodsi itaque ponatur $x = 2r$, in-

venitur sphærae integrae mensura $= 2pr^2 - 8\frac{pr^3}{6r} =$

$2pr^2 - \frac{4}{3} pr^2 = \frac{2}{3} pr^2$, quæ eadem est cum mensura

sphærae §. 25. Cor. 5. Calc. Ext. inventa. Quia etiam

$\frac{2}{3} pr^2 = 2rp \cdot \frac{1}{3} r$; sphæra æqualis erit pyramidi, cujus basis æqualis est rectangulo ex diametro sphærae in peripheriam circuli maximi, id est sphærae superficiei (§. 21. Cor. 7. Calc. Ext.) et altitudo radio sphærae.

§. 109.

Sit AM ellipsis, ut fiat spæroides ellipticum. Posita axe ellipseos $= a$ et parametro $= b$, erit $yy = bx - \frac{bxx}{a}$,

proinde $\frac{pyydx}{2r} = \frac{pbxdx}{2r} - \frac{pbx^2 dx}{2ar}$, et $\int \frac{pyydx}{2r}$

$= \frac{pbx^2}{4r} - \frac{pbx^3}{6ar}$. Posita itaque $x = a$, soliditas inte-

gri sphæroidis habetur $= \frac{pbaa}{4r} - \frac{pba^3}{6ar} = \frac{pbaa}{4r} - \frac{pbaa}{6r}$

$= \frac{6pba^2 - 4pba^2}{24r} = \frac{pba^2}{12r}$. Si $2r$ sit axi conjugato æ-

qualis, erit $4r^2 = ab$; ergo est $S = \frac{4par^2}{12r} = \frac{1}{3} par$,

atque spæroides ellipticum æquale est cono, cujus altitudo axi majori a , basis vero duplo circuli axe minore descripti æquatur. Praeterea quia cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, et ideo soliditas $= \frac{1}{2} apr$; erit spæroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum, ut $\frac{1}{3} apr$ ad $\frac{1}{2} apr$, id est ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu uti 2 ad 3.

Porro si diameter sphæræ = a , erit peripheria circuli maximi = $\frac{ap}{2r}$, et sphæra = $\frac{a^3 p}{12r}$. Ergo est sphæroides ellipticum ad sphæram, cujus diameter est axis major, ut $\frac{1}{3} apr$ ad $\frac{a^3 p}{12r}$, id est, dividendo per $\frac{1}{3} ap$, ut r ad $\frac{a^2}{4r}$, five ut $4r^2$ ad aa , vel ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris. Si vero diameter sphæræ = $2r$, erit soliditas = $\frac{1}{2} pr^2$; unde sphæroides ellipticum ad sphæram, cujus diameter est axis minor, ut $\frac{1}{3} par$ ad $\frac{1}{2} pr^2$, id est ut a ad $2r$, five ut axis major ad minorem. Quæ hic de sphæroide oblongo sunt demonstrata mutatis mutandis ad sphæroides compressum facile applicantur.

§. II. O.

Sit curva AM parabola et solidum S conoides parabolicum, erit $yy = x$, si in compendium calculi ponatur parameter = 1. Ergo $\frac{pyydx}{2r} = \frac{pxdx}{2r}$, et $\int \frac{pyydx}{2r} = \frac{px^2}{4r}$. Sit altitudo conoidis = a , diameter baseos = $2r$, erit ipsa basis = $\frac{1}{2} pr$, itaque si a pro x substituatur, invenitur soliditas conoidis = $\frac{pa^2}{4r} = \frac{praa}{4rr}$. Sed $\frac{a}{rr} = 1$, ideo soliditas conoidis = $\frac{1}{4} pra = \frac{1}{2} pr \cdot \frac{1}{2} a$. Basis itaque ducenda est in dimidiam altitudinem, atque ipsum conoides parabolicum est dimidium cylindri ejusdem basis et altitudinis.

Si AM est hyperbola, ut solidum S fiat conoides hyperbolicum; erit $yy = bx + \frac{bxx}{a}$, si b parametrum et a latus transversum denotat: est itaque $\int \frac{pyydx}{2r} = \frac{pbx^2}{2r}$

$$\frac{pbx^2}{4r} + \frac{pbx^3}{6r}, \text{ et pro hyperbola æquilatera } \int \frac{pyydx}{2r}$$

$$= \frac{apxx}{4r} + \frac{px^3}{6r}. \quad \text{Quare si altitudo conoidis est axi}$$

$$\text{transverso æqualis; in priori casu habetur } \frac{pbaa}{4r} + \frac{pba^3}{6ar}$$

$$= \frac{6pba^2 + 4pba^2}{24r} = \frac{10pba^2}{24r} = \frac{5pba^2}{12r}, \text{ et in casu}$$

$$\text{altero } S = \frac{spa^2}{12r}.$$

§. III.

Formula generalis pro dimetiendis superficiebus F.350.
 solidorum rotundorum similibus invenitur ratiociniis.
 Crescente $AP = x$ differentia sua $Pp = \Delta x$, si ductæ sint
 applicatae orthogonales PM, pm , curvæ AM , atque MR
 axi AP parallela, chorda Mm , si figura circa axem AP
 revolvatur, describit superficiem coni recti truncati,
 quæ superficies erit æqualis circulo, cujus radius est me-
 dius proportionalis inter $PM + pm$ et Mm (§. 356. *Geom.*
Elem.). Ergo hæc superficies = $\frac{p(2y + \Delta y) r(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{2r}$

$$= \frac{p(2y + \Delta y) \Delta x r \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}{2r}, \text{ si ratio radii ad periphe-}$$

riam = $r:p$. Eadem superficies minor erit superficiei ab ar-
 cu Mm descripta, quæ erit = ΔS , si superficies arcu AM de-
 scripta sit = S . Decrescente Δx ambæ superficies decrescunt,
 earumque differentia, quæ evanescit, ipsis superficiebus, eva-
 nescentibus; et proinde ratio, quacum evanescunt, est ratio

æqualitatis, ita ut fiat $\frac{2rdS}{p(2y + dy) dx r \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = 1$, atque

$$\frac{dS}{dx}$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{p(2y+dy)\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{2r} = \frac{py\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{r}. \text{ Ergo } 3$$

$$= \int \frac{pydx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{r} = \int \frac{py\sqrt{dx^2+dy^2}}{r}.$$

§. 112.

Si curva AM fuerit circulus, cujus diameter in compendium calculi posita sit = 1, habetur superficies segmenti sphærae, cujus altitudo est x , aequalis integrali $spdx = px$. Quare si $x = 1$, erit superficies sphærae integrae = 1. p , ut §. 360. *Geom. Elem.* jam inventa est. Est itaque superficies segmenti sphærae ad superficiem sphærae integram, ut px ad p . 1, id est, ut altitudo segmenti ad diametrum sphærae.

Curva AM existente parabola, cujus parameter est

a , ut sit $yy = ax$, et $2ydy = adx$; unde $dx^2 = \frac{4yydy^2}{a^2}$,

$$\text{et } \frac{py\sqrt{dx^2+dy^2}}{r} = \frac{py\sqrt{4yydy^2+aady^2}}{ar} = \frac{pydy\sqrt{4yy+aa}}{ar}.$$

Posito $\sqrt{4yy+aa} = u$, erit

$4yy+aa = uu$, $8ydy = udu$, $ydy = \frac{1}{4} udu$. Ergo

$$\frac{pydy\sqrt{4yy+aa}}{ar} = \frac{puudu}{4ar}, \text{ et } \int \frac{pydy\sqrt{4yy+aa}}{ar}$$

$$= \frac{pu^3}{12ar} = \frac{(4pyy+pa^2)\sqrt{4yy+aa}}{12ar}. \text{ Huic in-}$$

tegrali addenda est constans ex eo determinanda, quod posito $y = 0$, fiat integrale quæsitum = 0. Ergo super-

$$\text{ficies quæsitæ} = \frac{(4pyy+pa^2)\sqrt{4yy+aa}}{12ar}$$

$\frac{pa^2}{12r}$. Eodem modo invenitur mensura superficiei sphæ-

roidis elliptici vel conoidis hyperbolici, vel alius cujuscunque solidi ex genere tornatorum.

EMENDANDA.

Pag. 8. lin. 4. BD. *leg.* BC, lin. 28. et 29. EAM *leg.* DAM. Pag. 14. lin. 2. a fin. Cor. 2. *leg.* Cor. 3, p. 15. lin. 4. a fin. §. 52. *l.* 51. Pag. 24. lin. 15. AB, *l.* AD, p. 27. lin. 14. AF *l.* AE. Pag. 31. lin. 5. D *l.* CD. Pag. 35. lin. 9. S. *l.* V. Pag. 41. lin. 21. in atque *l.* in G, atque. Pag. 42. lin. 4. in marg. *l.* F. 46. Pag. 46. lin. 16. p. 47. lin. 25, et p. 48. lin. 14. §. 105. *l.* 107. Pag. 48. lin. 19. et 33. §. 112. *l.* 114. Pag. 50. lin. 11. ABC. *l.* ABD. Pag. 54. lin. 15. in marg. *l.* F. 67. lin. 31. CE *l.* GE et GF *l.* GE. Pag. 56. lin. 20. A *l.* B. Pag. 58. in marg. F. 53. *l.* 15. Pag. 59. lin. penult. DE *l.* DF. Pag. 60. lin. 24. AD *l.* AE. Pag. 61. lin. antepen. in marg. *l.* F. 72. Pag. 63. ad §. 153. in Fig. æn. 76. loco G *l.* F. et G. loco J. Pag. 69. lin. 7. A *l.* C. lin. 11. KL, LM, MH, *l.* KM, OM, OH. lin. 13. OR, *l.* QR. Pag. 70. lin. 4. in marg. *l.* F. 80. Pag. 76. lin. 3. *l.* et ex æquo. Pag. 77. lin. 23. A *l.* B. Pag. 81. lin. 1. F. 88. *l.* 89. Pag. 84. lin. 11. §. 181. *l.* 178. Pag. 99. lin. 9. Sect. II. *l.* VIII. Pag. 135. lin. 8. in marg. *l.* F. 135. Pag. 162. lin. 4. a fin. LM. *l.* LN. Pag. 246. in marg. F. 153. *l.* 351. Pag. 251. in marg. F. 156. *l.* 352. Pag. 253. lin. 9. in marg. *l.* F. 208. Pag. 254. lin. 7. in marg. *l.* F. 205. lin. pen. in marg. F. 159. *l.* 209. Pag. 160. lin. 17. IK *l.* SK. Pag. 162. lin. 32. LM *l.* LN. Pag. 256. lin. 17. in marg. *l.* F. 210. Pag. 272. lin. 5. §. 70. *l.* 10. Pag. 279. lin. 15. *l.* a quanto subtrahendo quantum. Pag. 345. lin. 15. et 18. $y = ax$ *l.* $y = a$. Pag. 361. *del.* prima linea verticalis $I. a + d +$. Pag. 363. lin. 11. B *l.* β . Pag. 365. lin. 16. nimirum *l.* minimum. Pag. 366. *l.* 20. et 21.

$\frac{b}{m}$ *l.* $\frac{b}{n}$ lin. ult. $\frac{a}{m}$ *l.* $\frac{\beta}{m}$. Pag. 372. lin. 12.

ϕ_{x^m-nti} *l.* $\psi_{x^m-nti} + \phi_{x^m-n}$. Pag. 375. lin. 2. contrariis *add.* pro n impari lin. 5. nti *l.* rti , lin. 6. n . *l.* r . P.

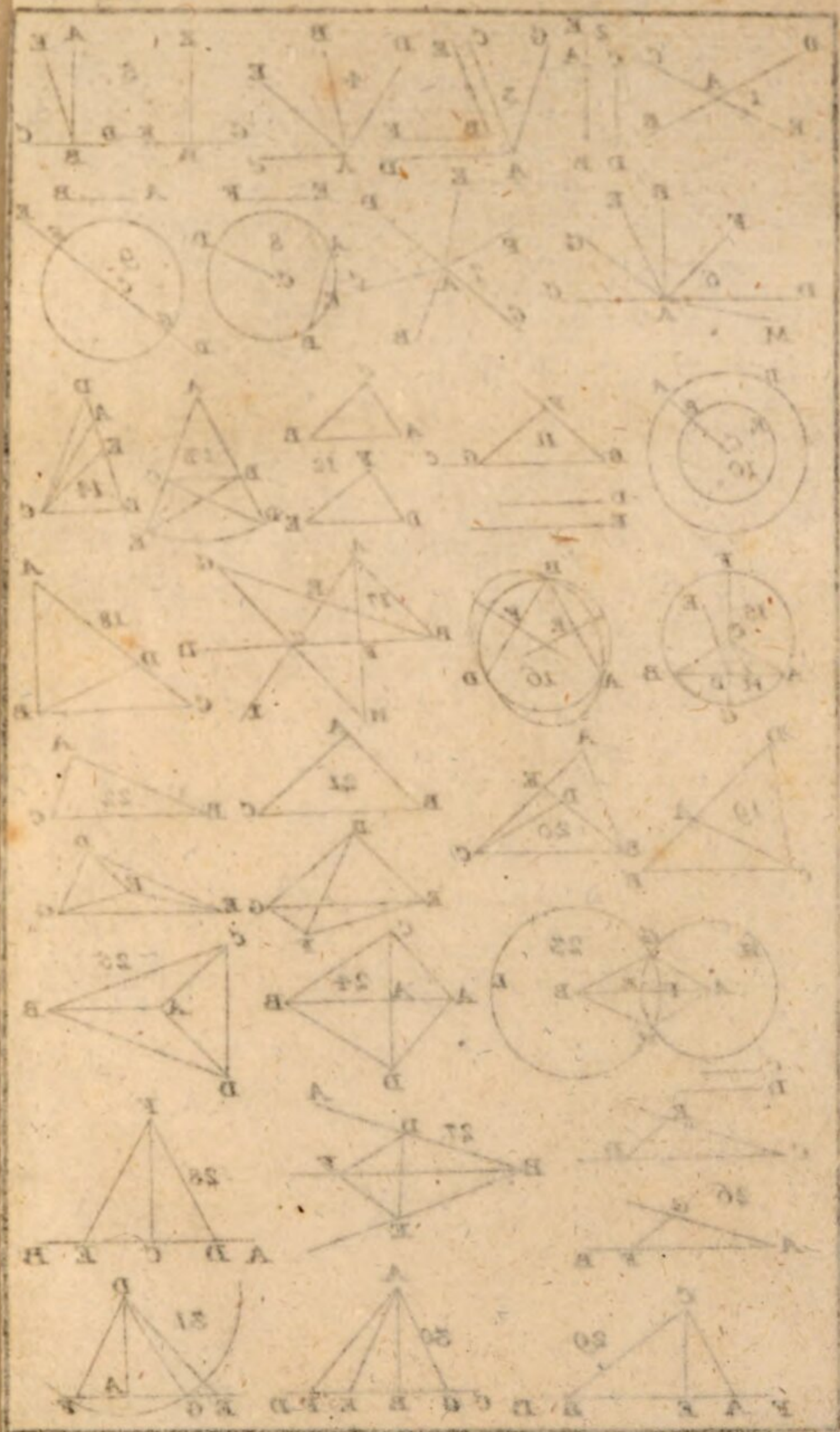
411. lin. 15. $\frac{bxAP}{\infty}$ *l.* $\frac{b \cdot AP}{\infty}$. Pag. 424. lin. 20. (y

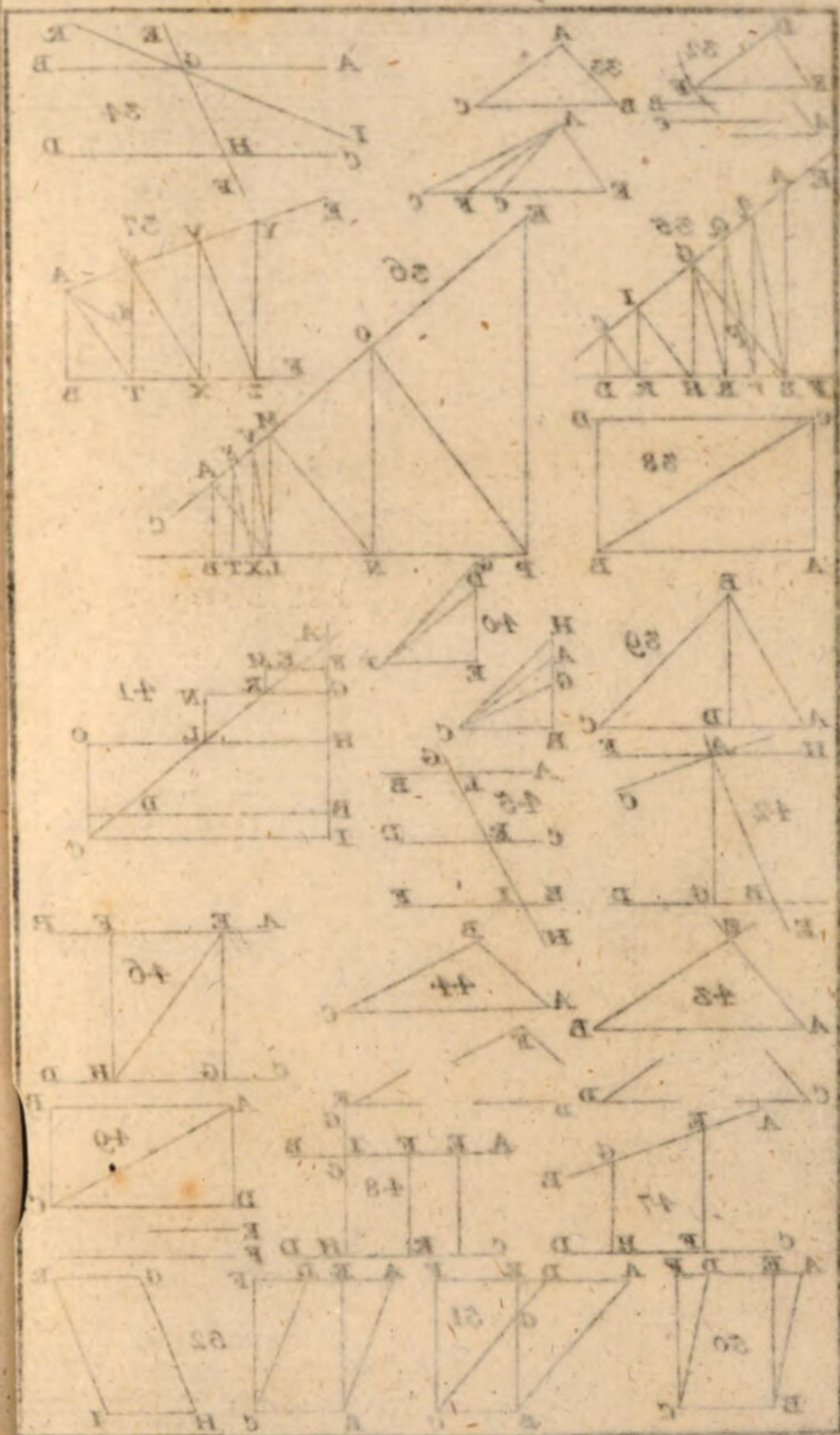
$+1$) q *l.* $(x+1)q$. P. 433. *l.* 2. $\frac{2^s}{d}$; $nn-$. lin. 3. $(2d +$

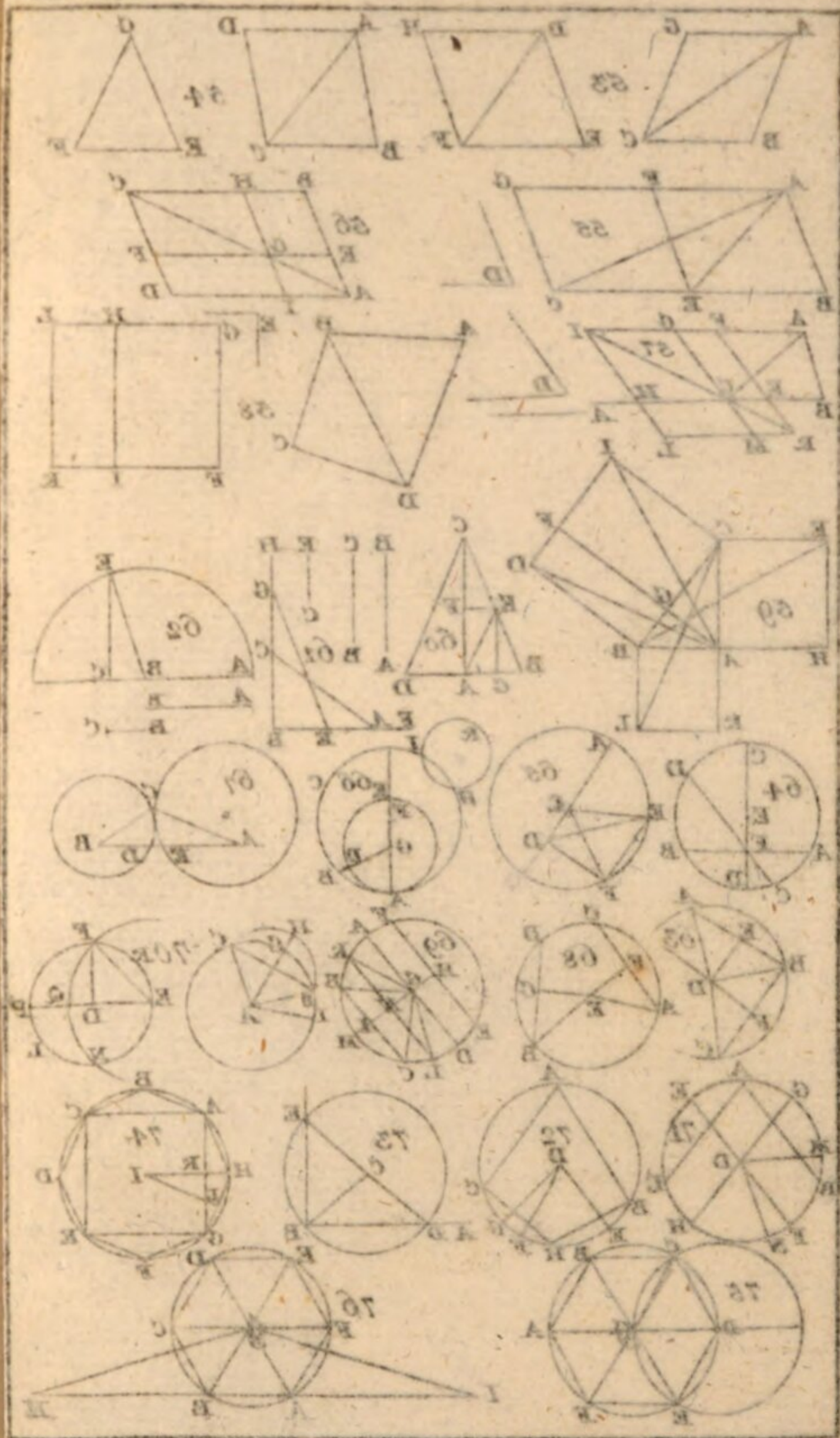
$2V)^2$

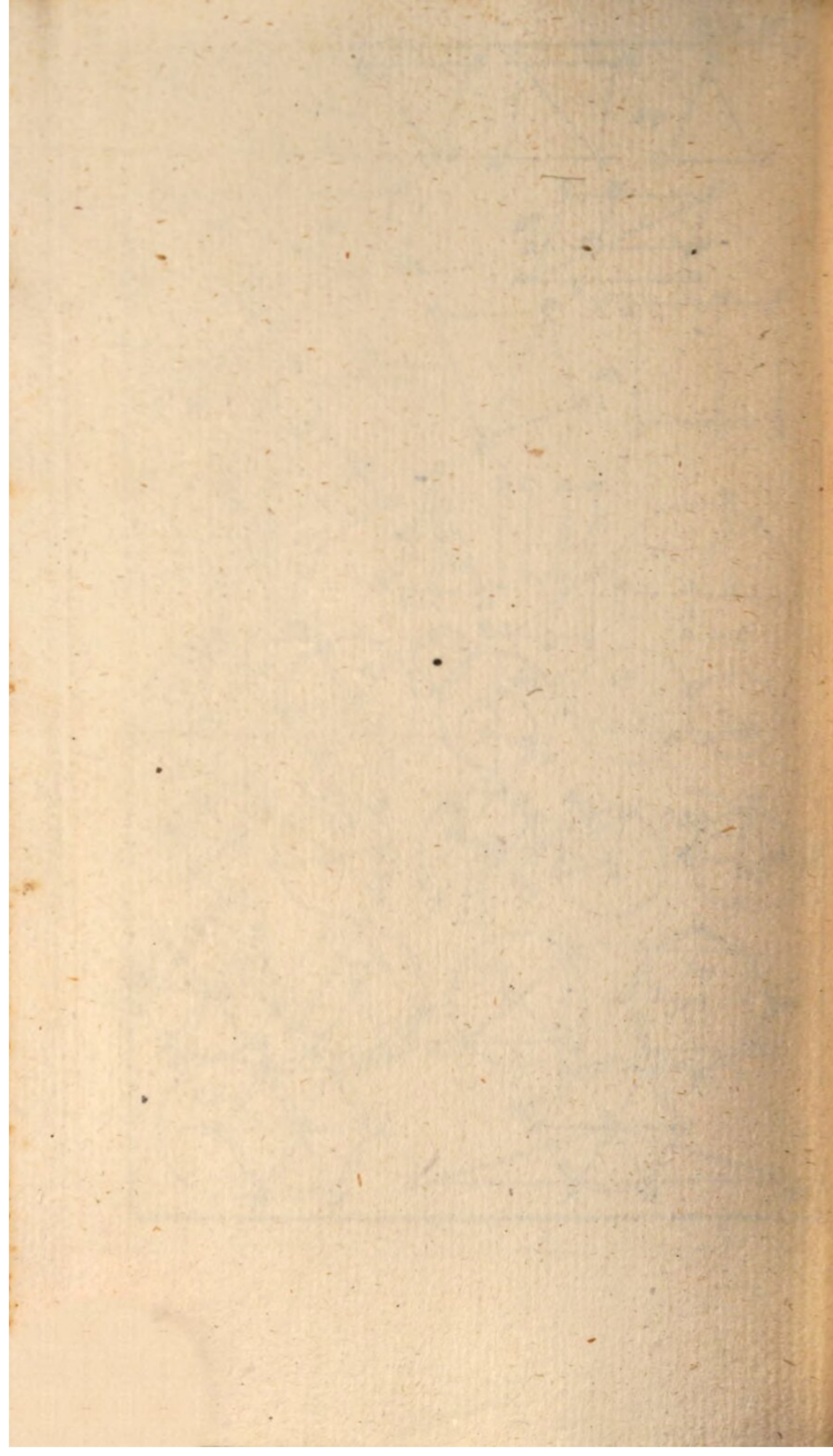
$2V)^2$ l. $(d+2V)^2$. P. 442. l. 1. 7. 28. ACB l. AMB. lin. 12. D l. C, et AD l. AC. lin. 14. AE l. AC. lin. 29. FC l. FG, H l. M. K, l. m. lin. 31. AHB l. AMB, AKB l. AmB. Pag. 445. lin. 5. I l. P. lin. 8. §. 120. l. 63. lin. 10. et penult. F. 10. l. 235. lin. 12. F. 11. l. 236. lin. 14. F. 12. l. 237. Pag. 446. lin. 9. in marg. l. F. 238. Pag. 448. lin. 15. GP l. GPI. Pag. 453. lin. 14. $r - \frac{1}{2}pa$ l. $r - \frac{1}{2}pa$ ad l. inter, tertia l. media. Pag. 454. lin. 5. $2a$ l. aa lin. 7. $(aa - ba)$ l. $(aa - bb)$ lin. 12. M l. fM. Pag. 459. lin. 22. F. 144. l. 244. Pag. 460. lin. 22. Dc, l. DO, Bc l. BC. Pag. 464. lin. 12. CRc l. CGc. Pag. 466. lin. 23. $\frac{ax}{C}$ l. $\frac{ax}{c}$. Pag. 467. lin. 12. AH l. KH. Pag. 470. lin. 24. F. 522. l. 252. lin. 30. AD l. Ad. Pag. 471. lin. 5. δa^2 l. δa^2 , lin. 8. δa l. δa . Pag. 474. lin. 17. $ex - \gamma$ l. $ex + \gamma$. Pag. 475. $+ pm$ l. $+ pm$. lin. ult. MK l. NK. Pag. 476. lin. 1. mk l. nk. Pag. 477. lin. 19. et 23. quia signum — integræ fractioni præpositum est legi debet $+ \mu\gamma + \nu\beta$. Pag. 478. lin. 12. $-\gamma^3$ l. $-\gamma\epsilon$. Pag. 479. lin. 7. $2ex\gamma\zeta + \gamma\zeta\zeta$ —, l. $2ex\gamma + \gamma\gamma$. lin. 8. $\epsilon\epsilon xx$, l. $\epsilon xx\gamma$, et $\gamma\zeta\zeta$ l. $\gamma\gamma\zeta$. Pag. 481. lin. 7. EP l. CP. Pag. 483. lin. 4. $(\mu n - \nu m)$ l. $(\mu n - \nu m)u$. lin. 12. = l. +, lin. ult. $2\gamma m (\mu n - \nu m)t$, l. $2\gamma m (\mu n - \nu m)tu$. Pag. 484. lin. 9. $t\phi -$ l. $t\phi =$, init. lin. 15. — l. +. Pag. 485. lin. 2. γn l. γm . Pag. 512. loco r lin. 6. l. r^2 , lin. 7. l. $(\cos z \pm \sin z \sqrt{r} - r)^3 : r^3$ lin. 9. et 11. r^n et lin. 12. 13. r^n loco r , lin. 14. $(\cos z \pm \sin \sqrt{r} - 1)^n : r^n$. Pag. 4. *Præf.* leguntur verba. Scriptum — nequeat, quæ pag. 10. post verbum: eripiunt, legi debuissent. Ead. pag. 4. acerrimam l. acerrimum.

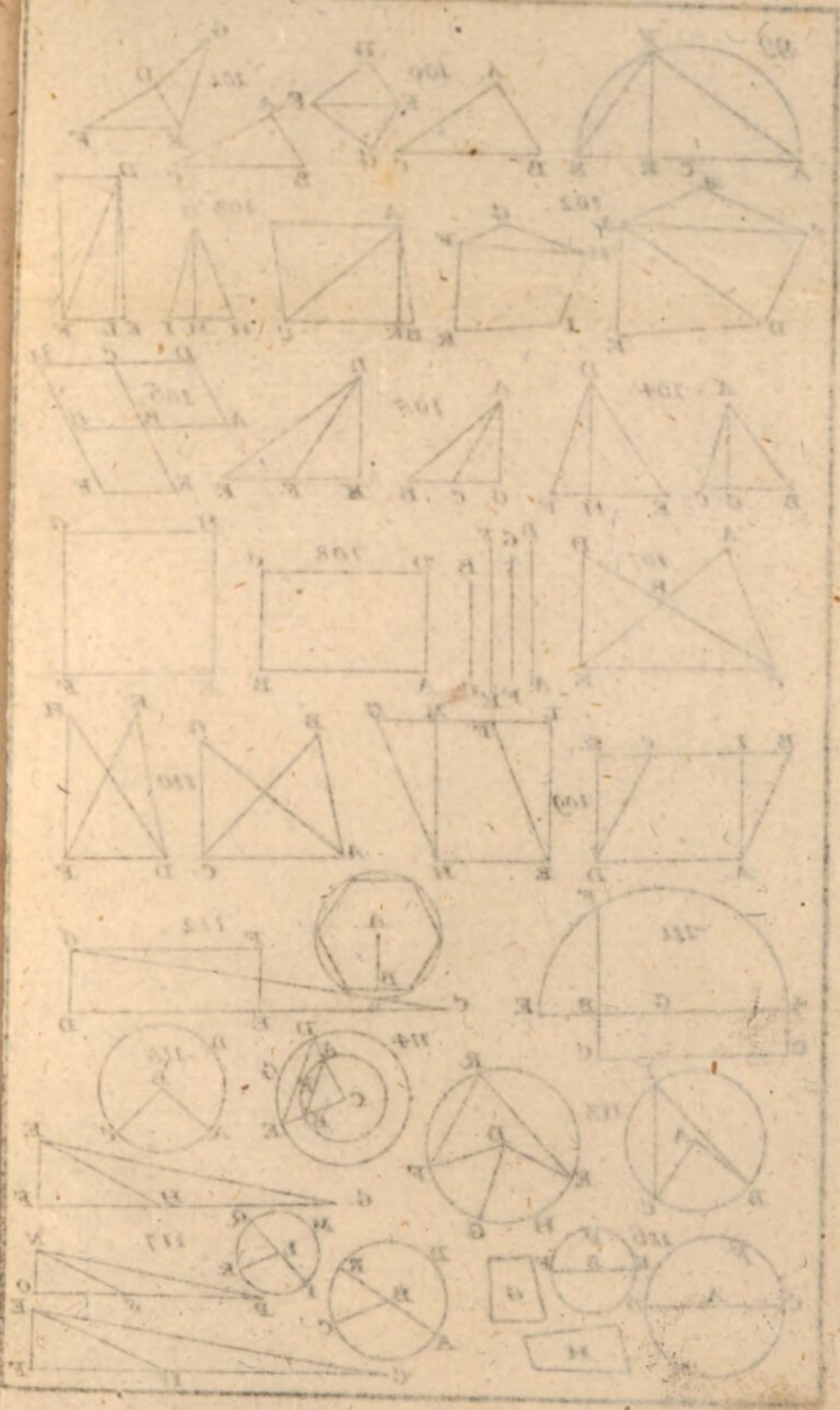


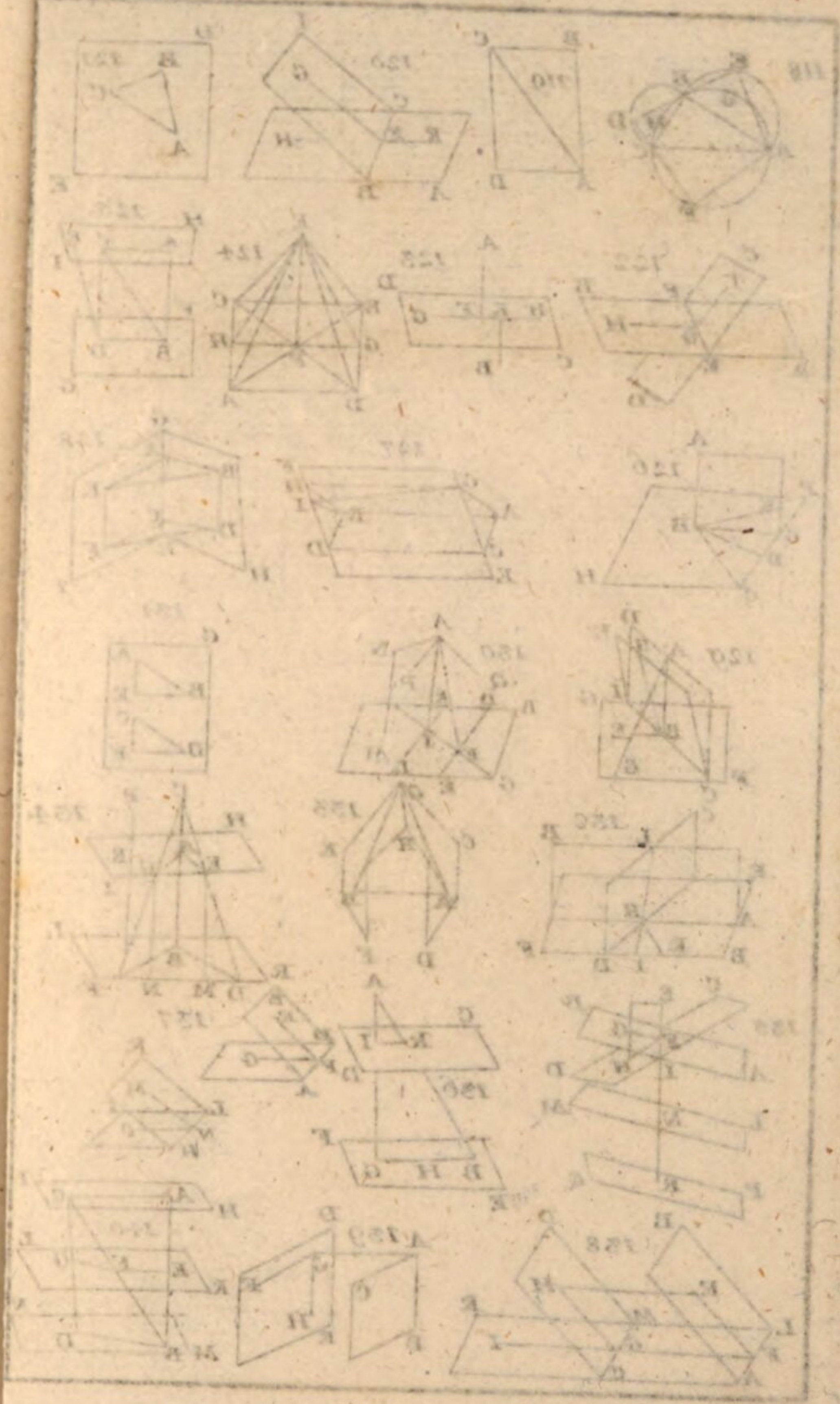


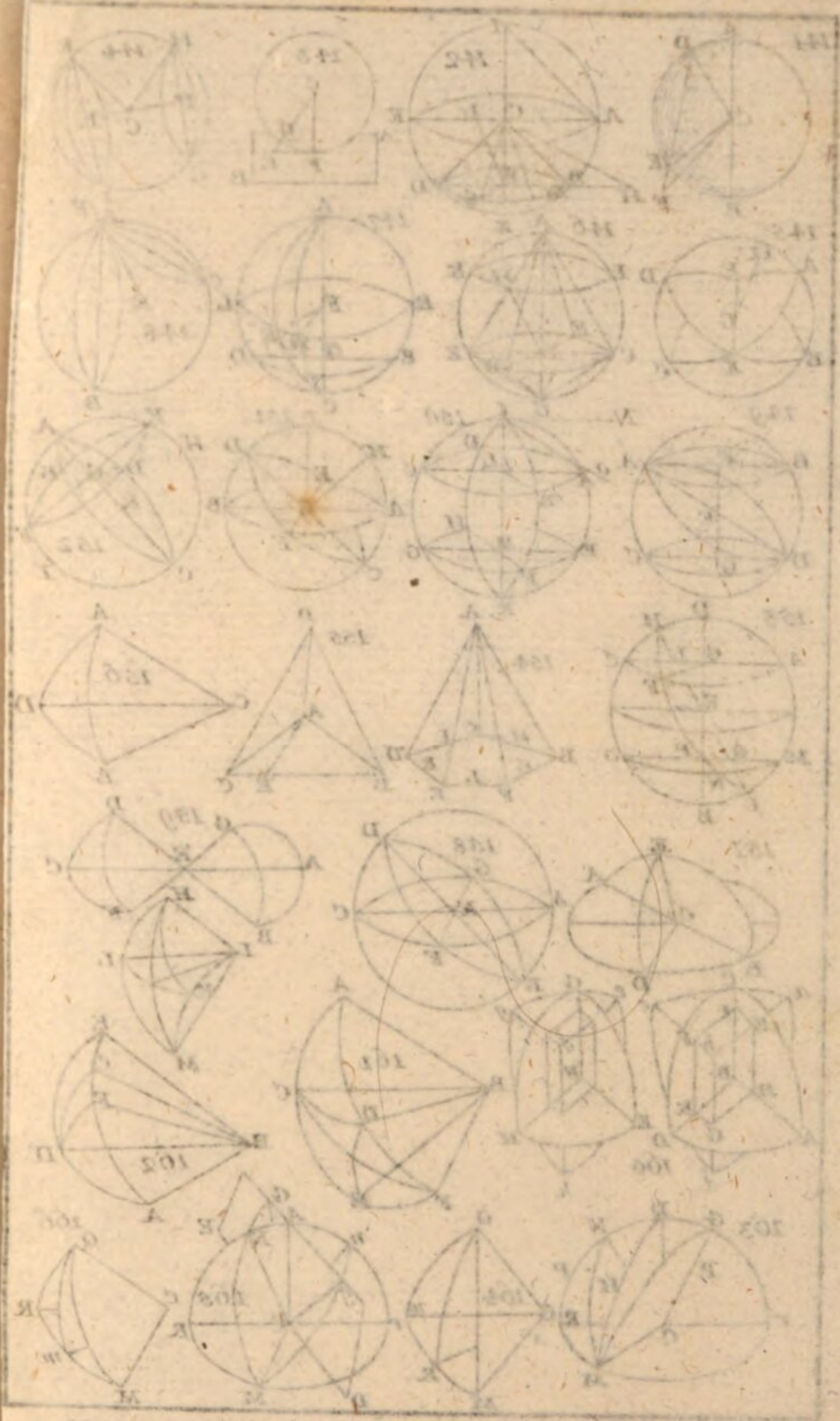


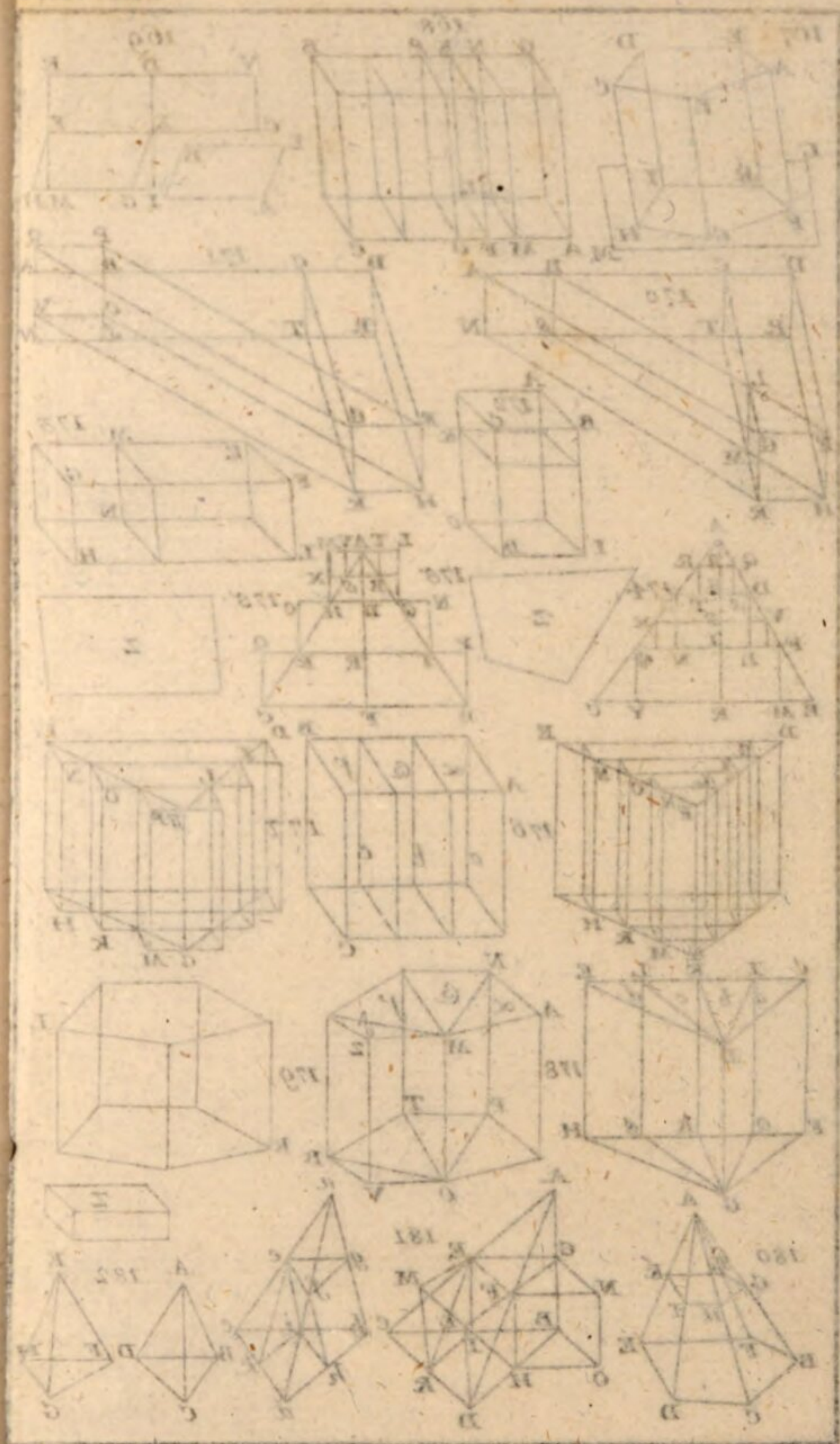


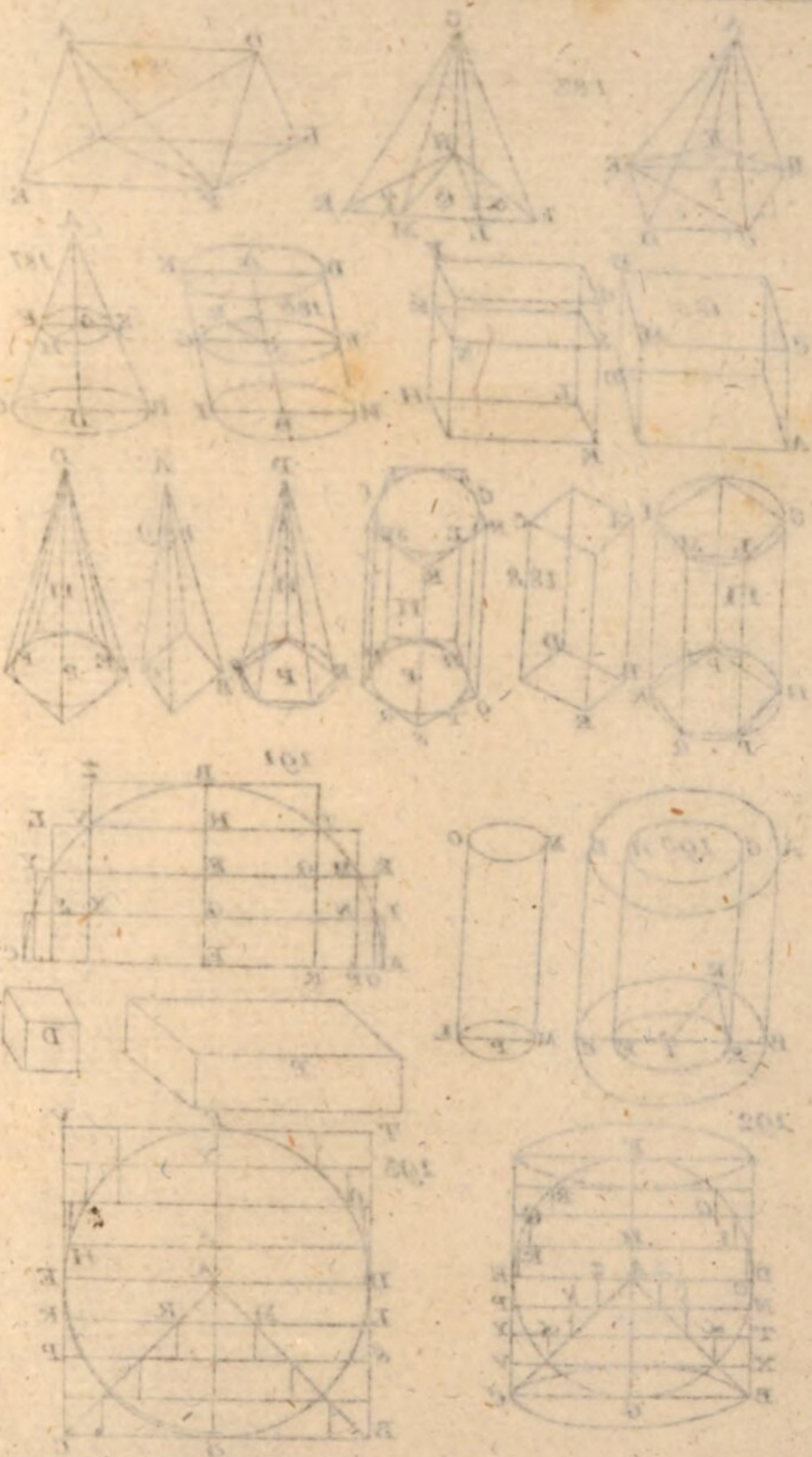


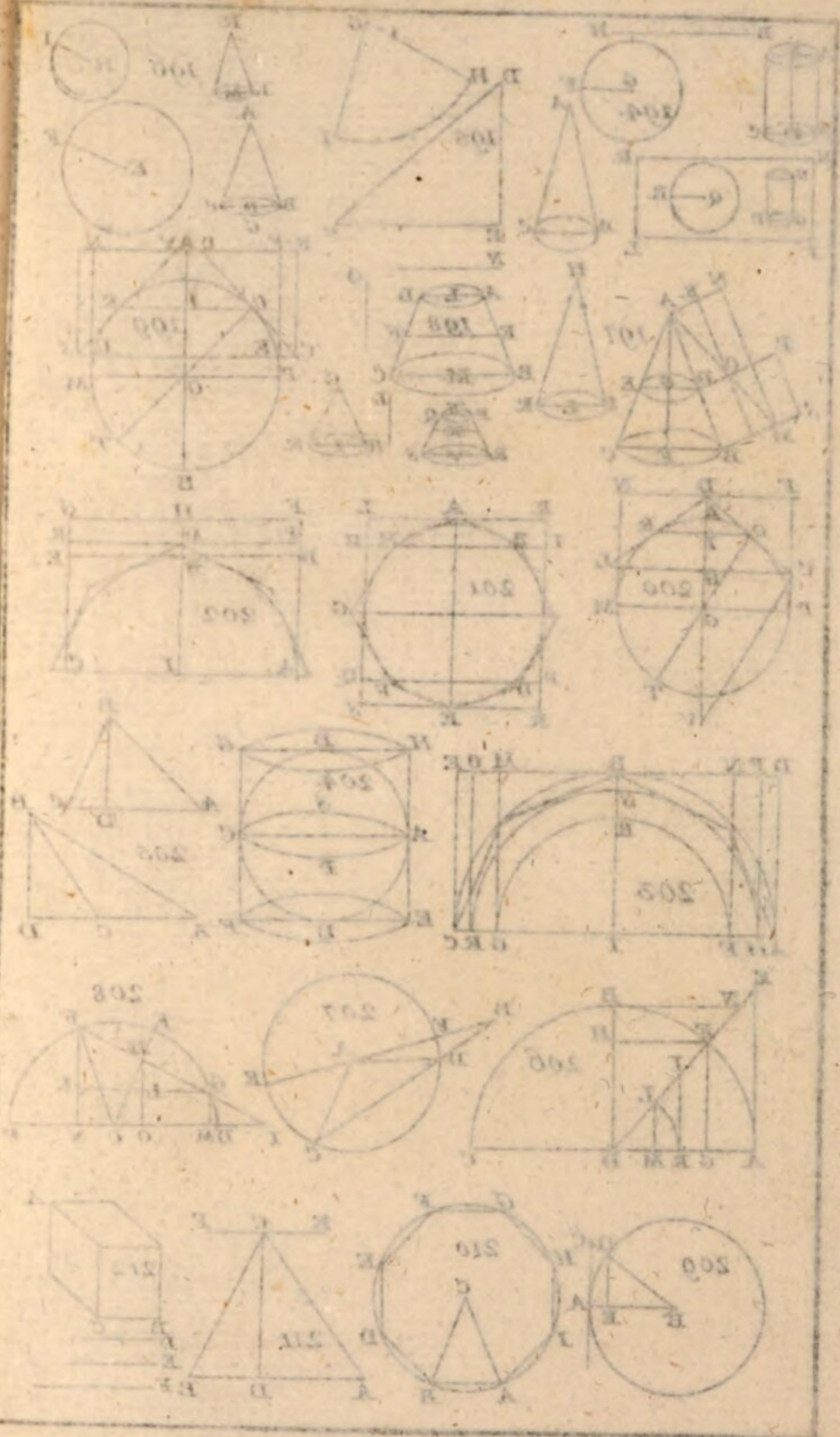


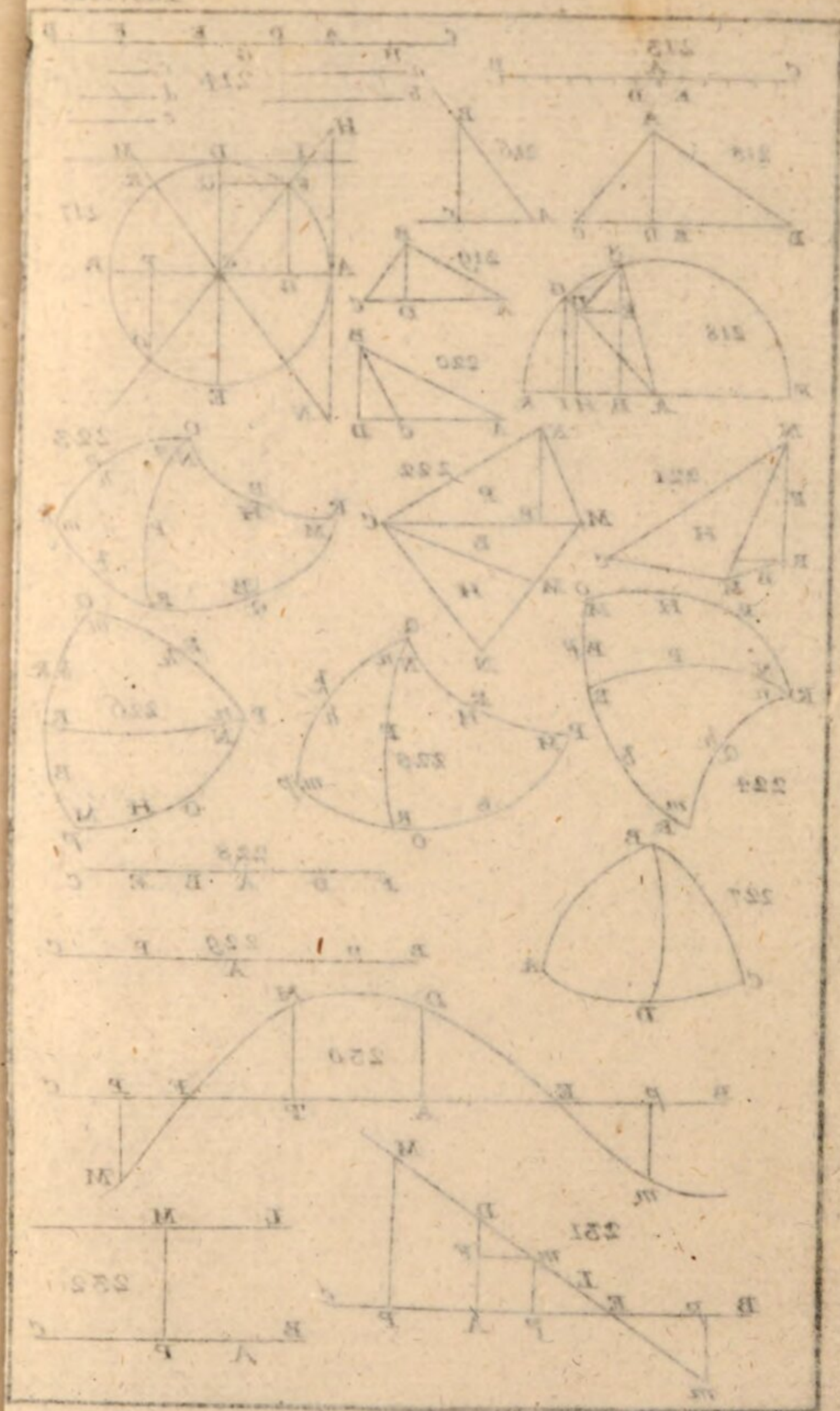


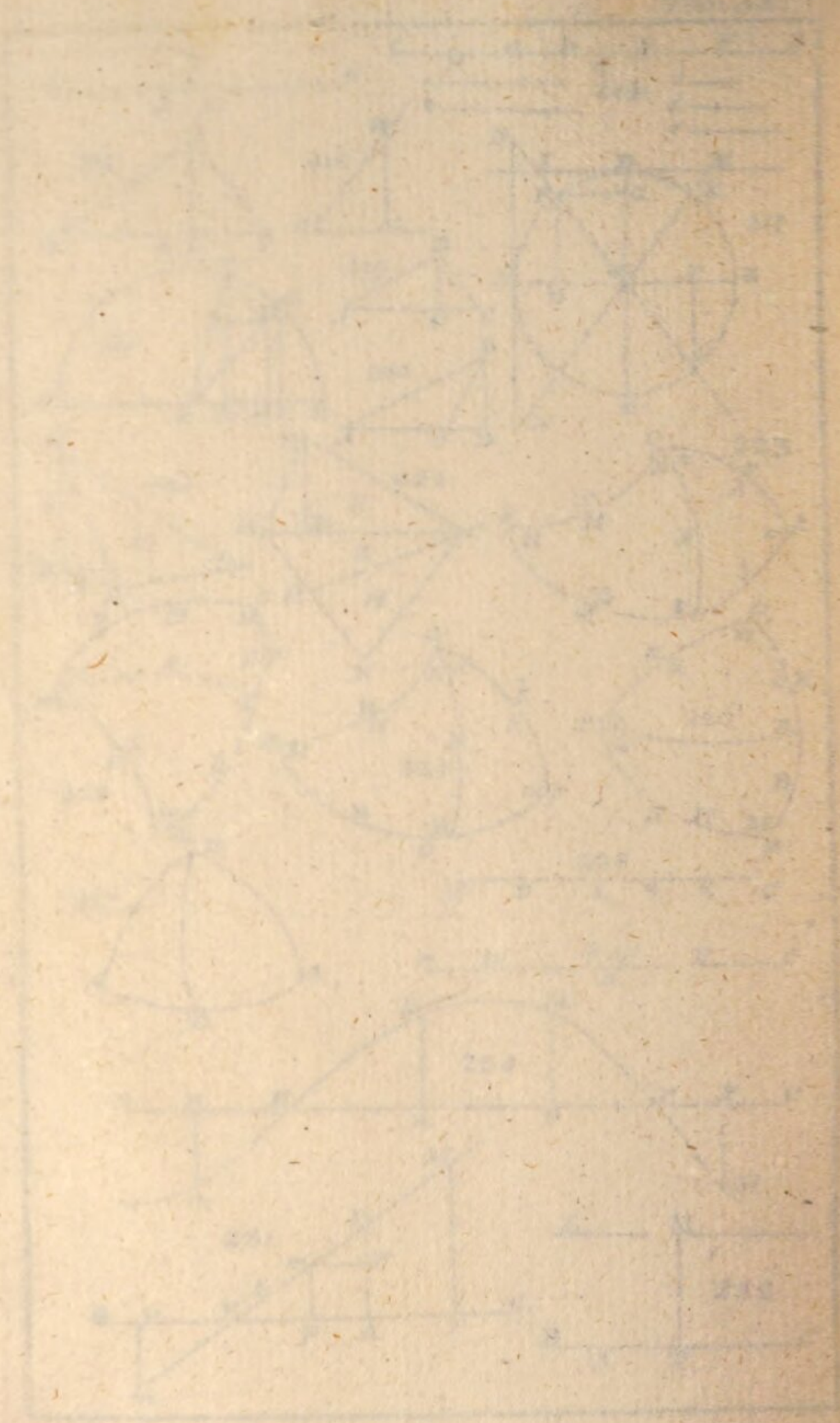


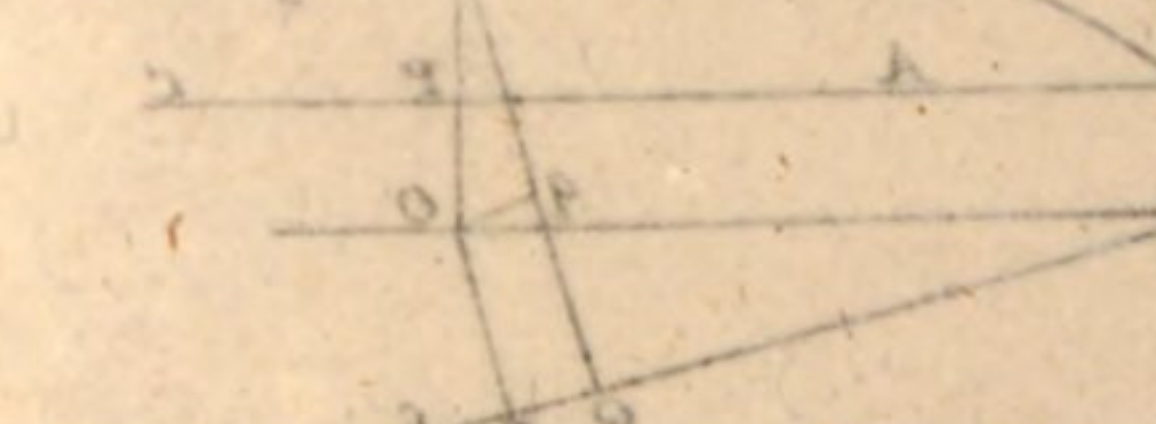
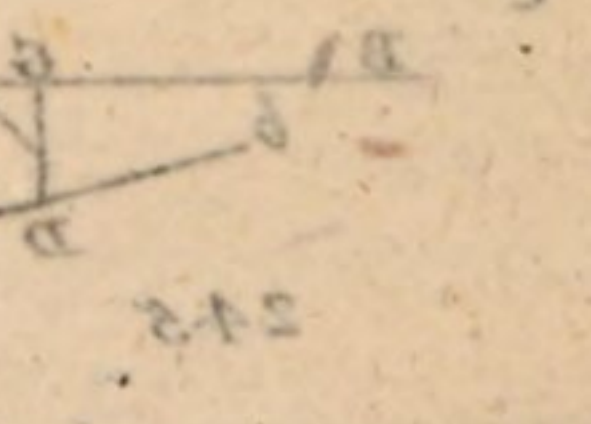
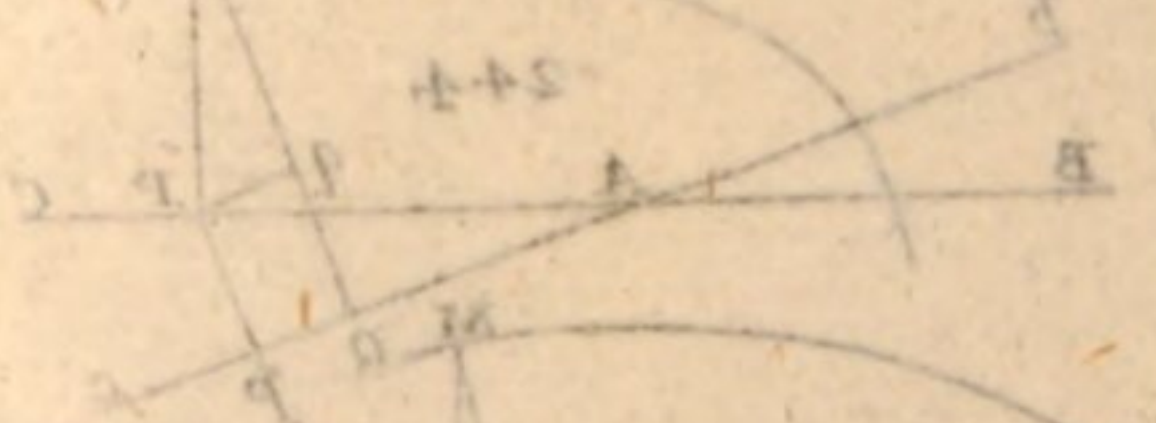
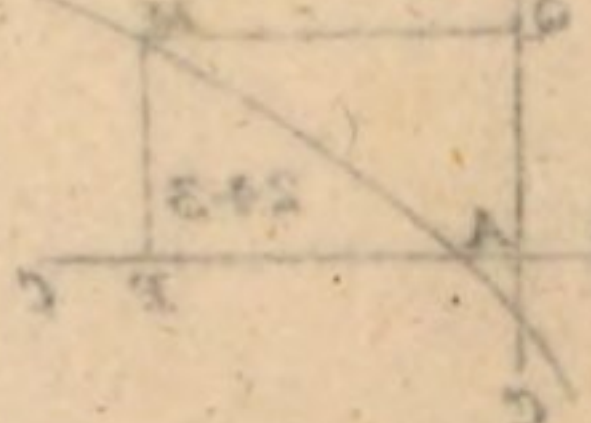
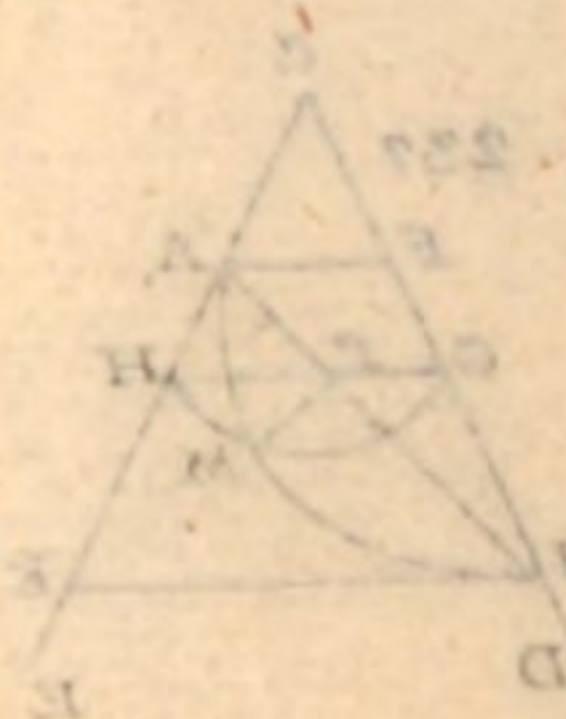
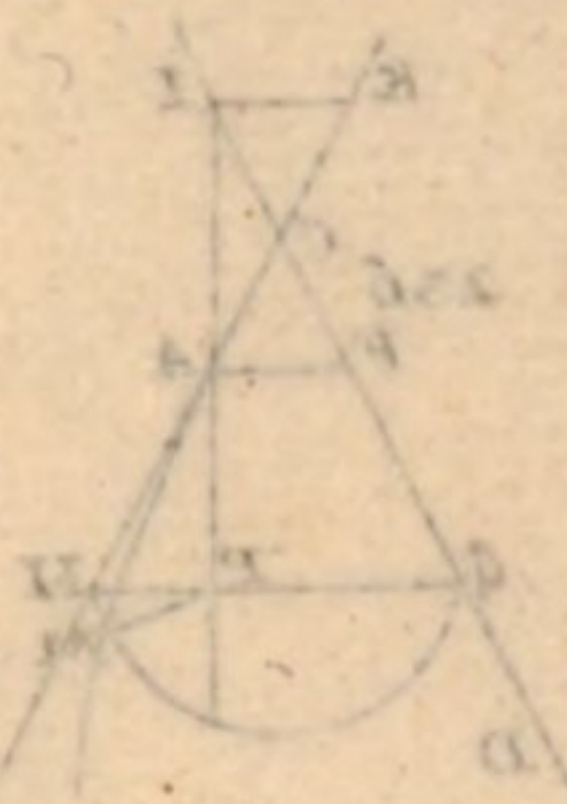
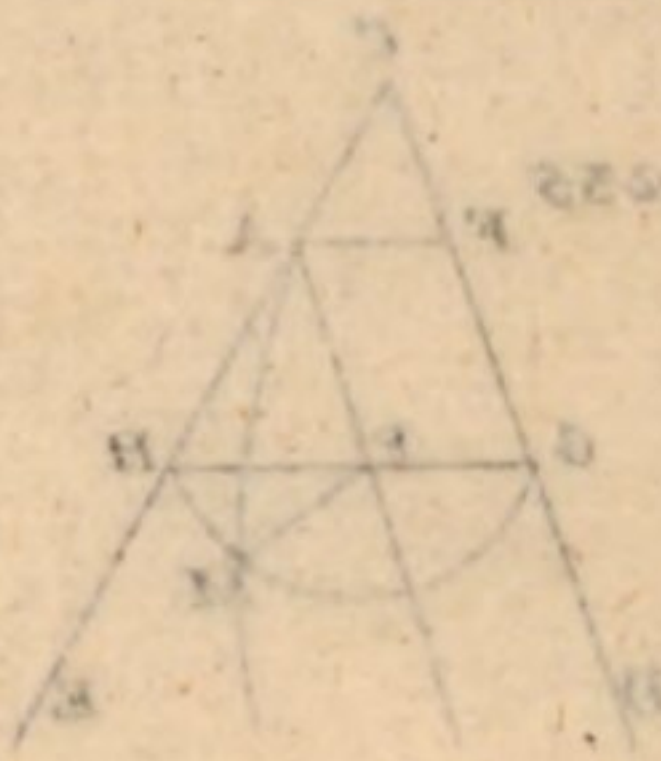
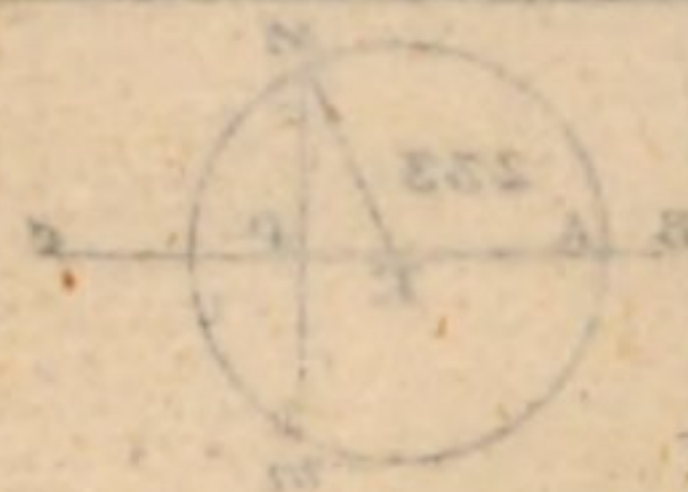


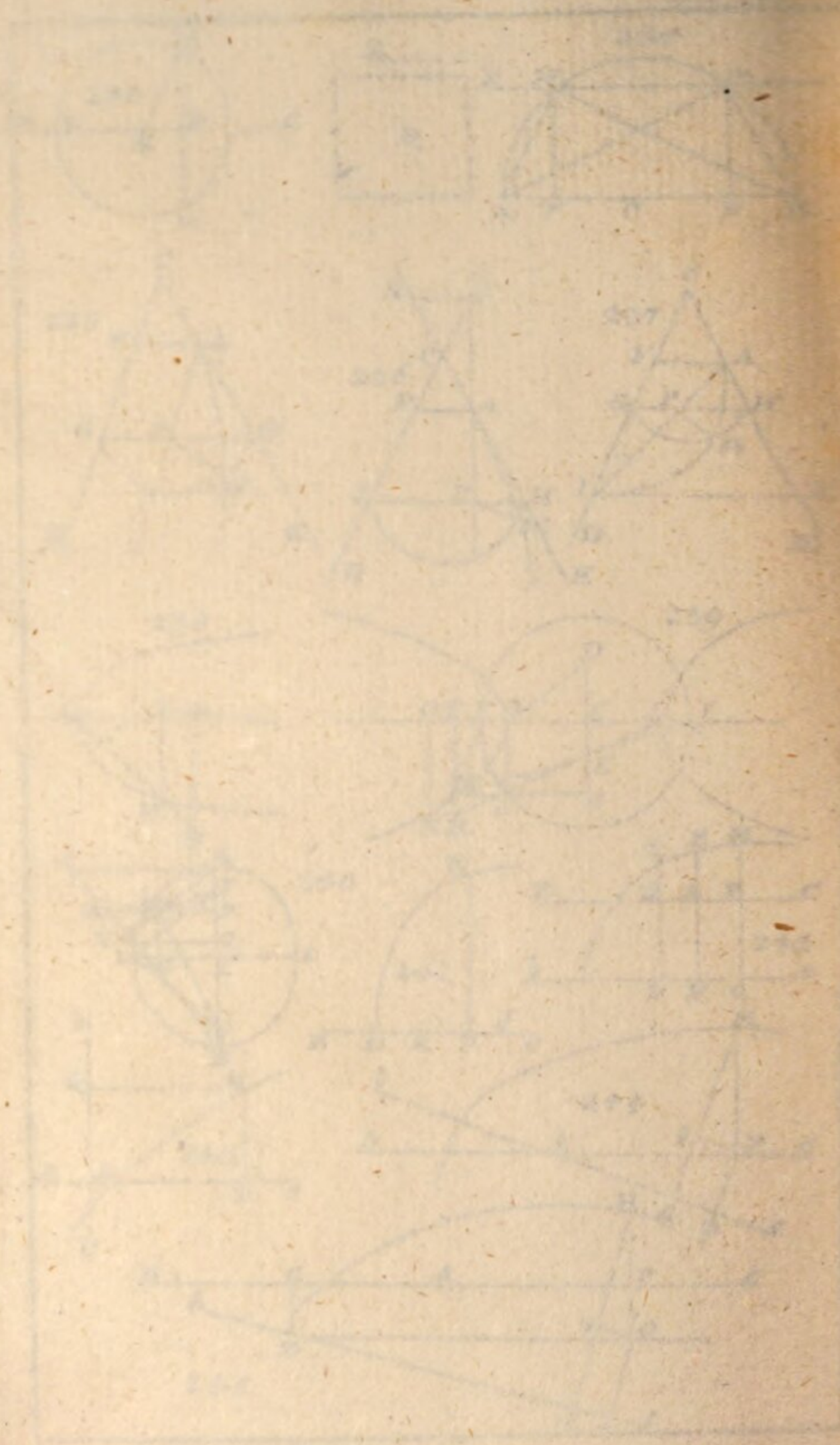


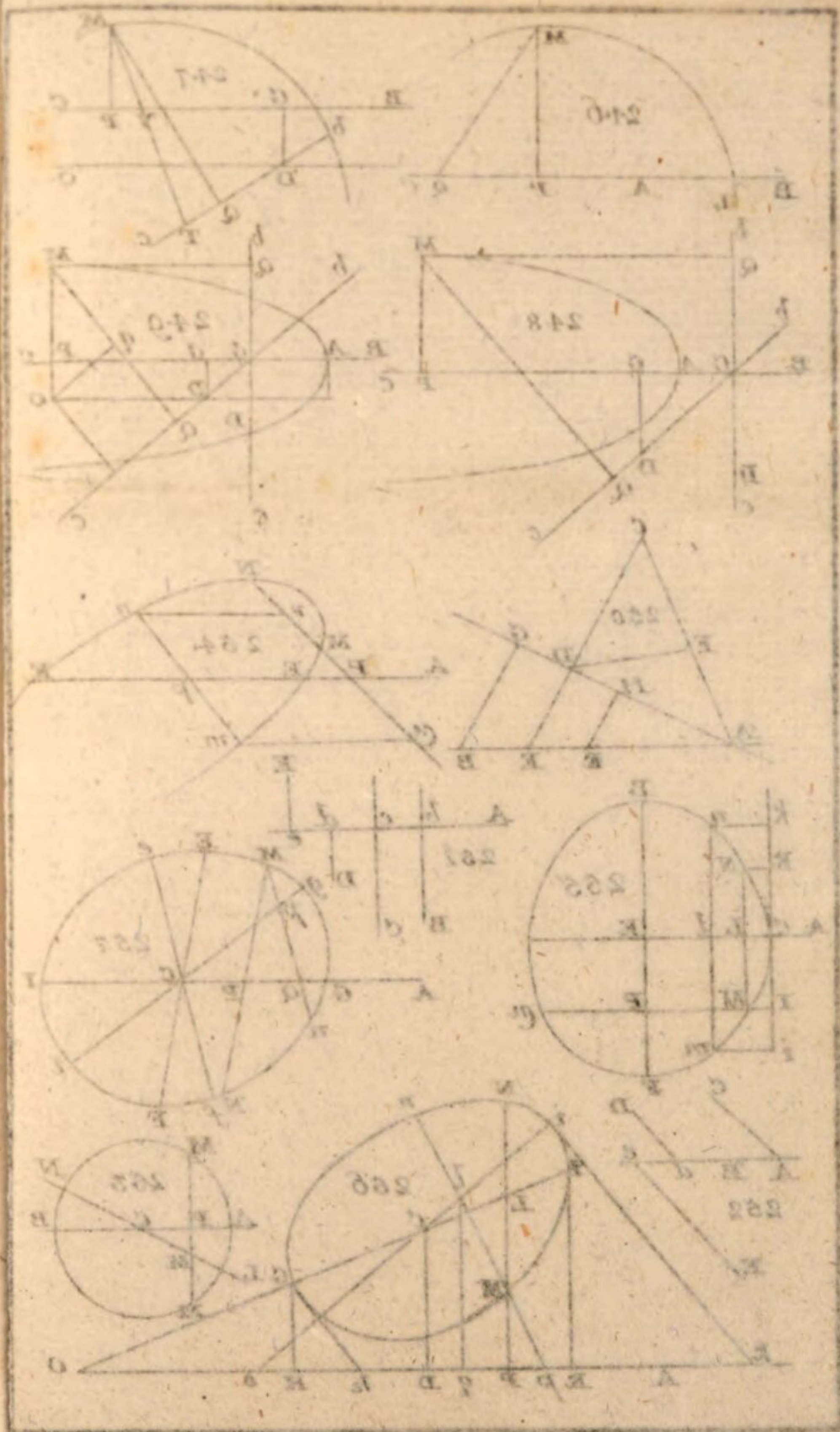


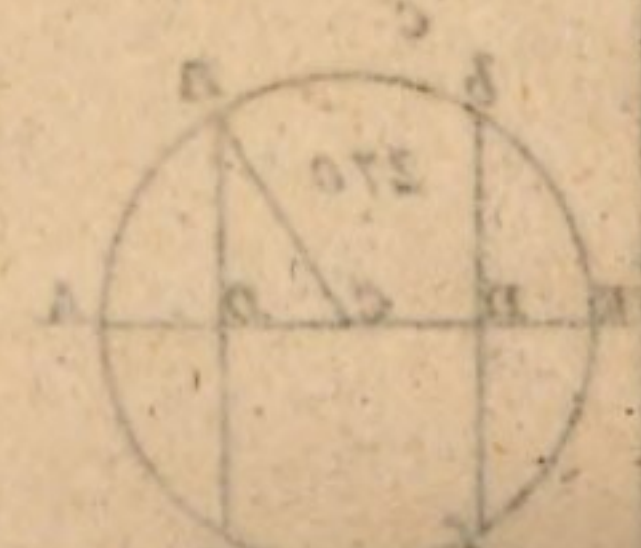
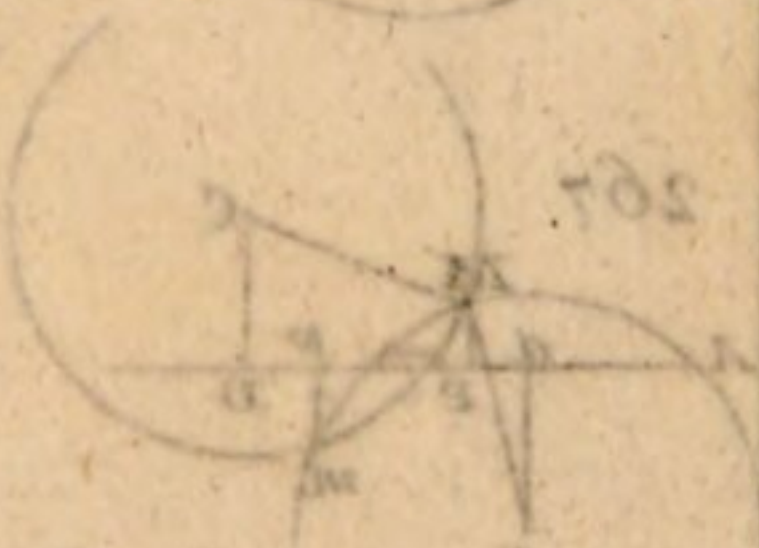
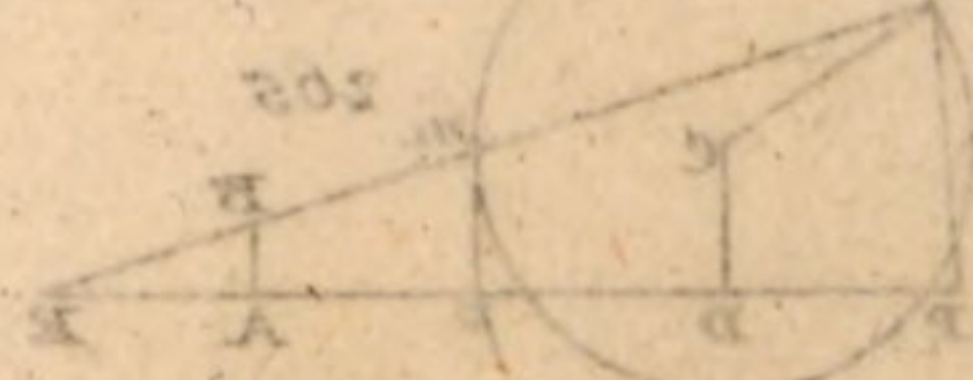
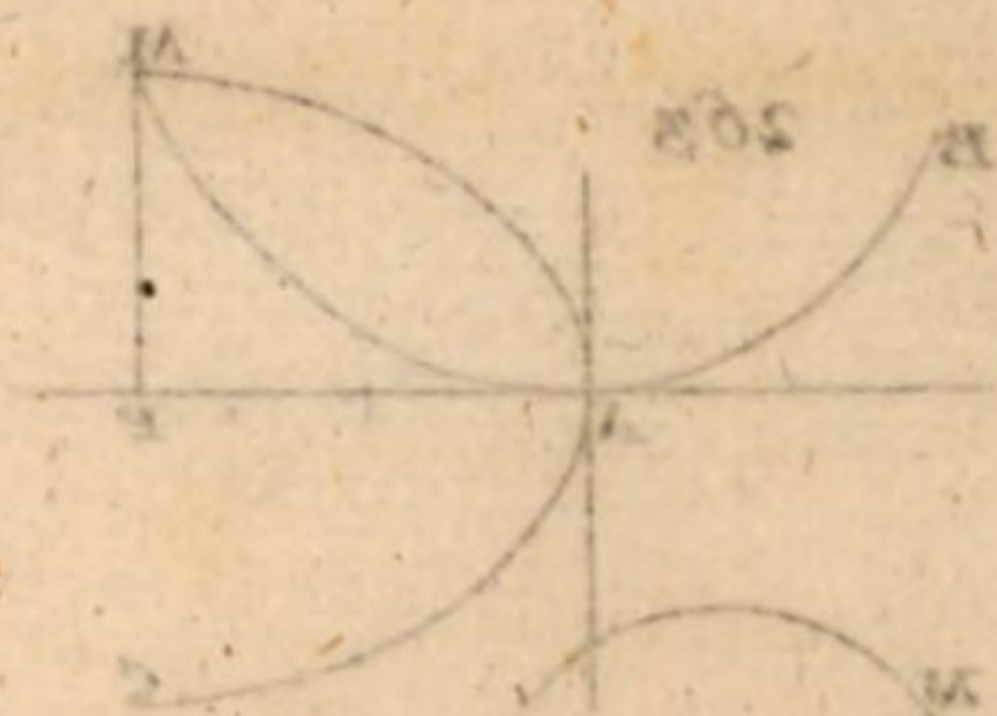
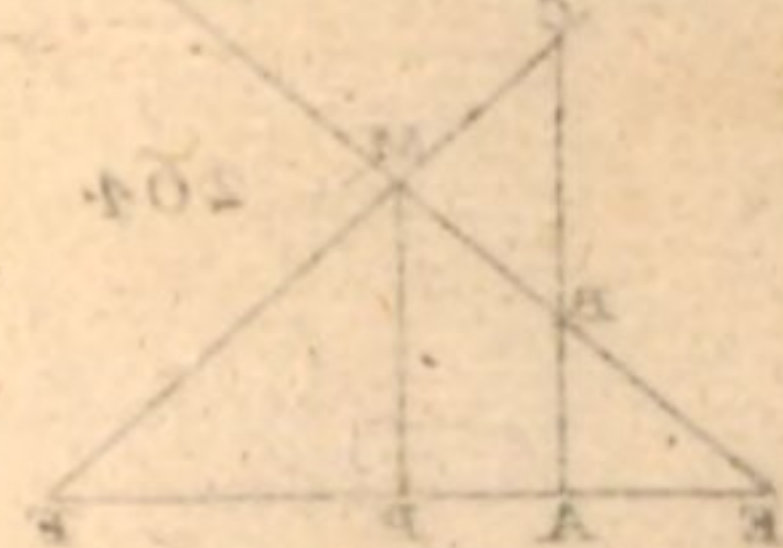
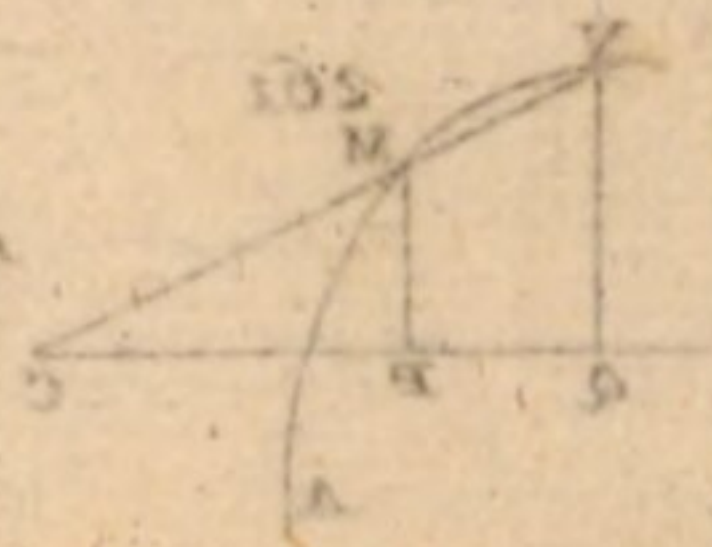
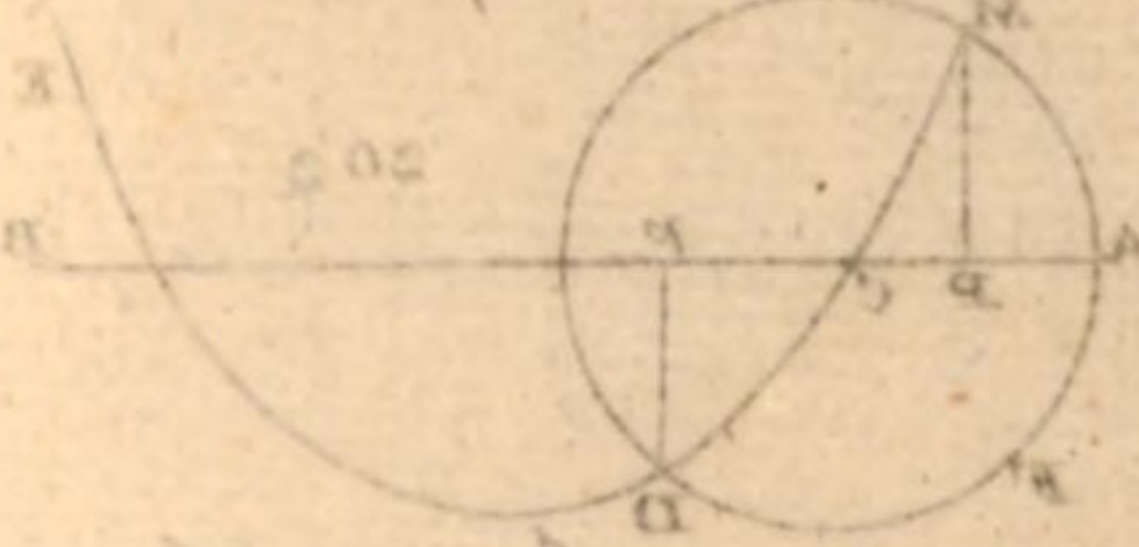
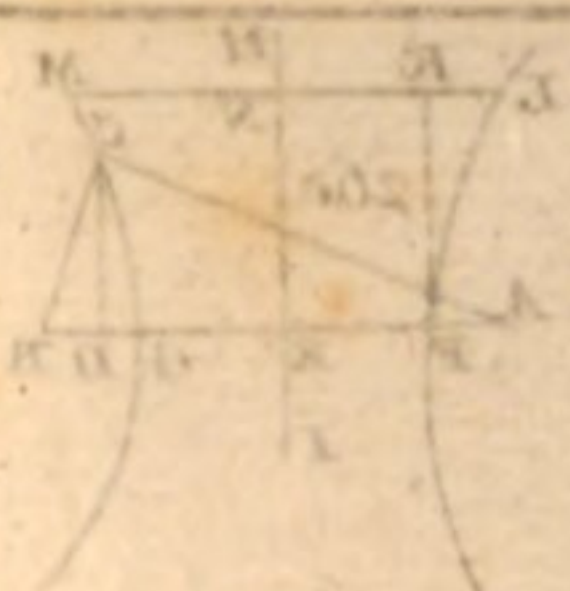


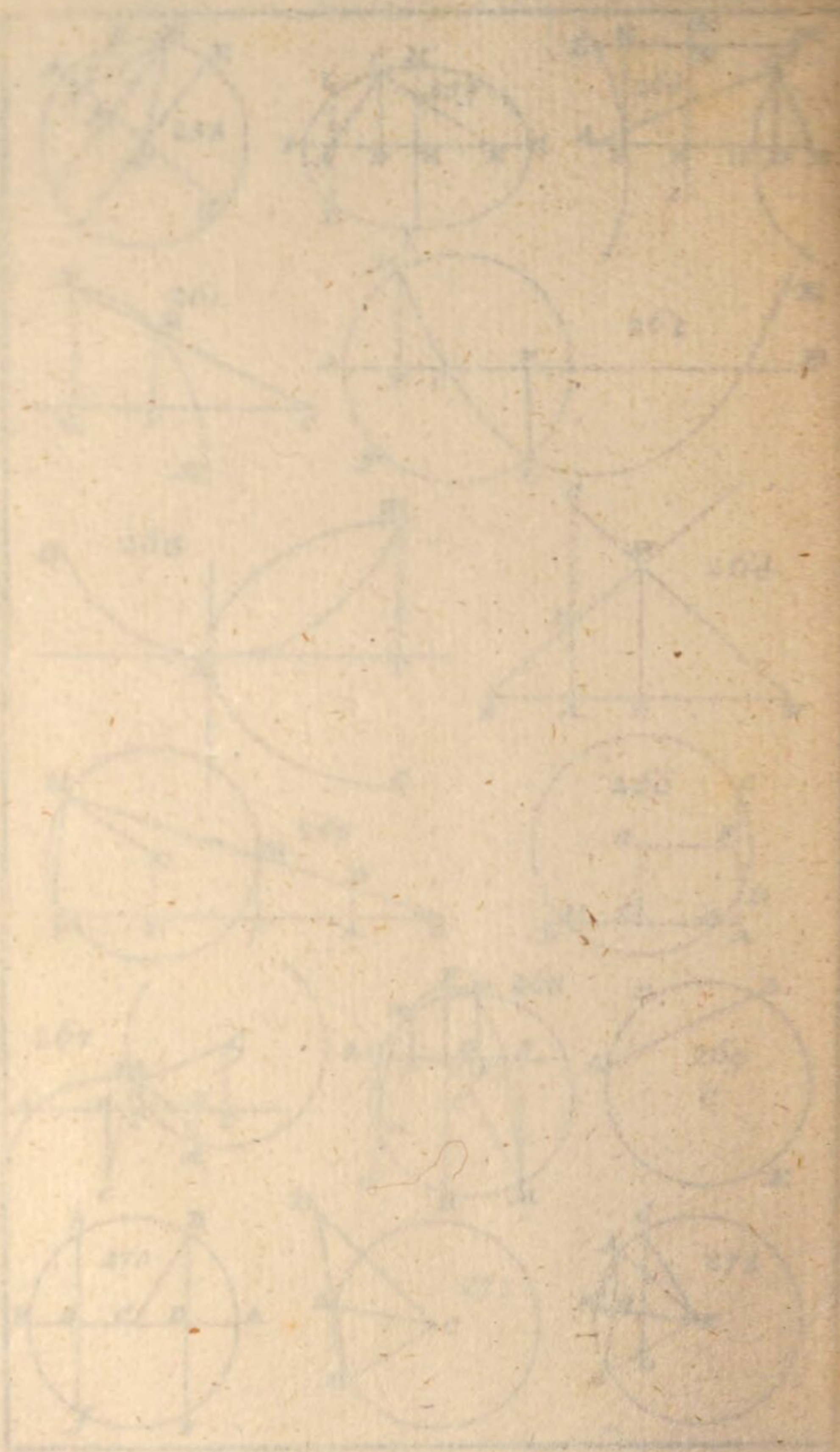


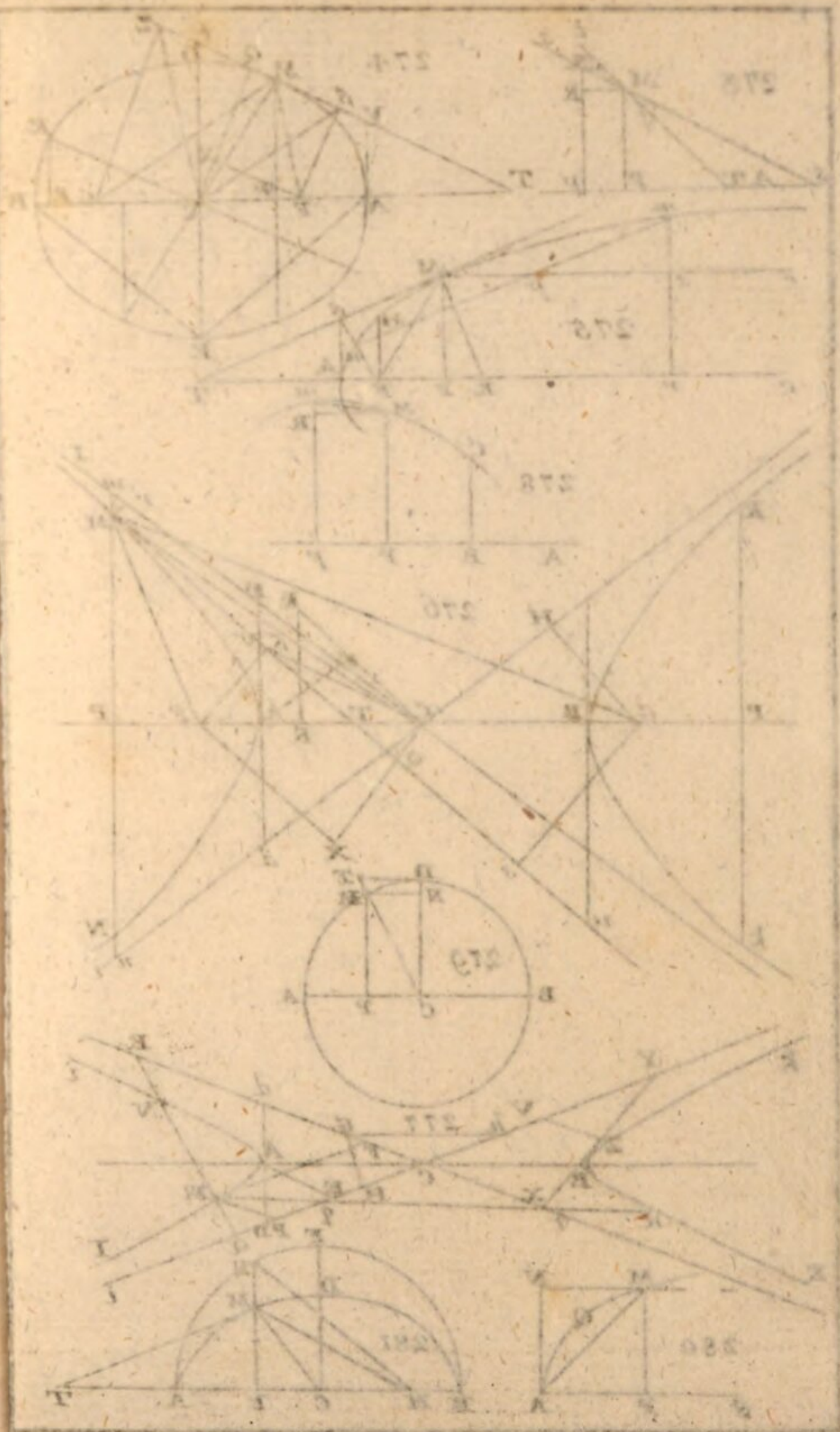


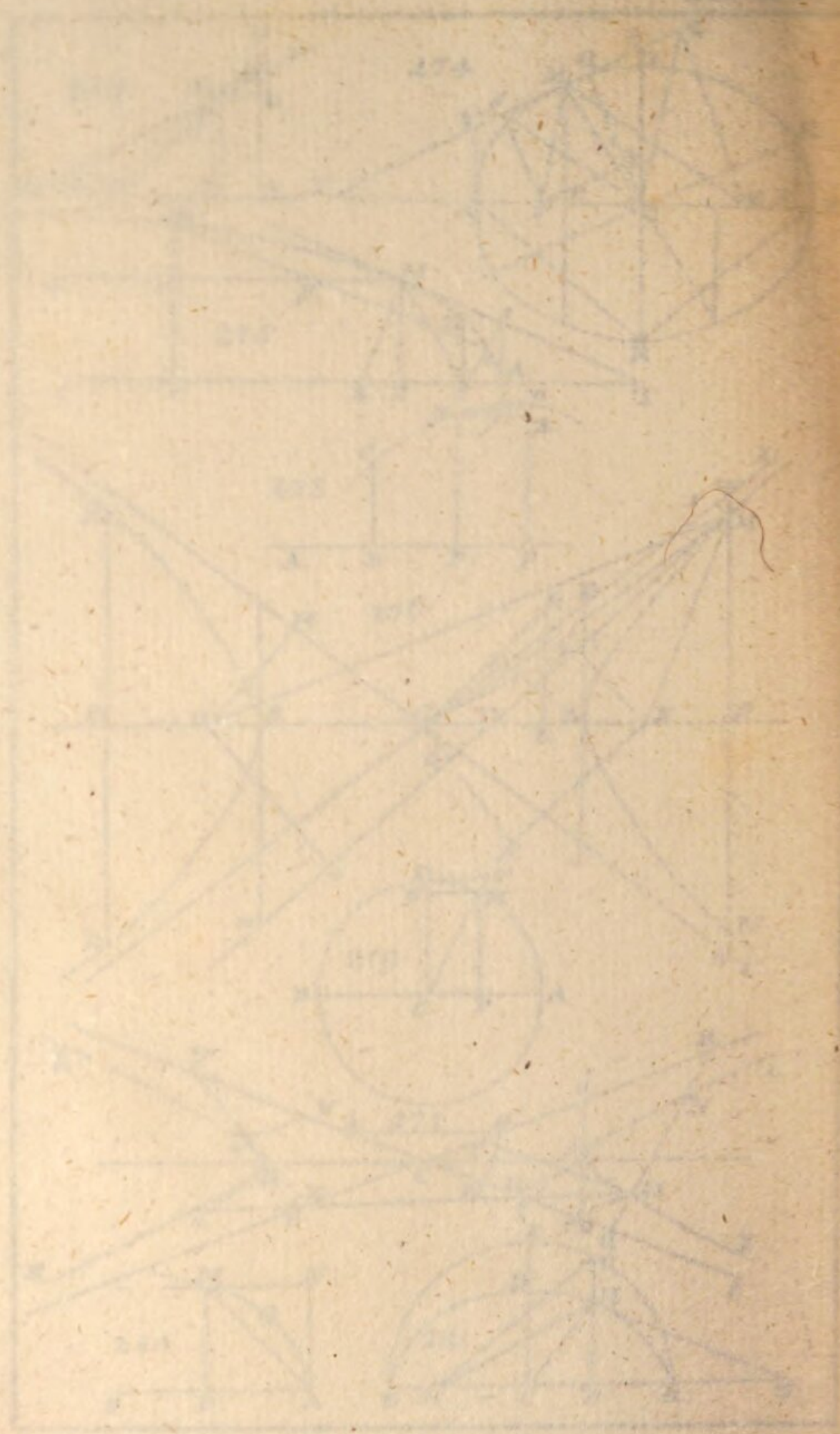


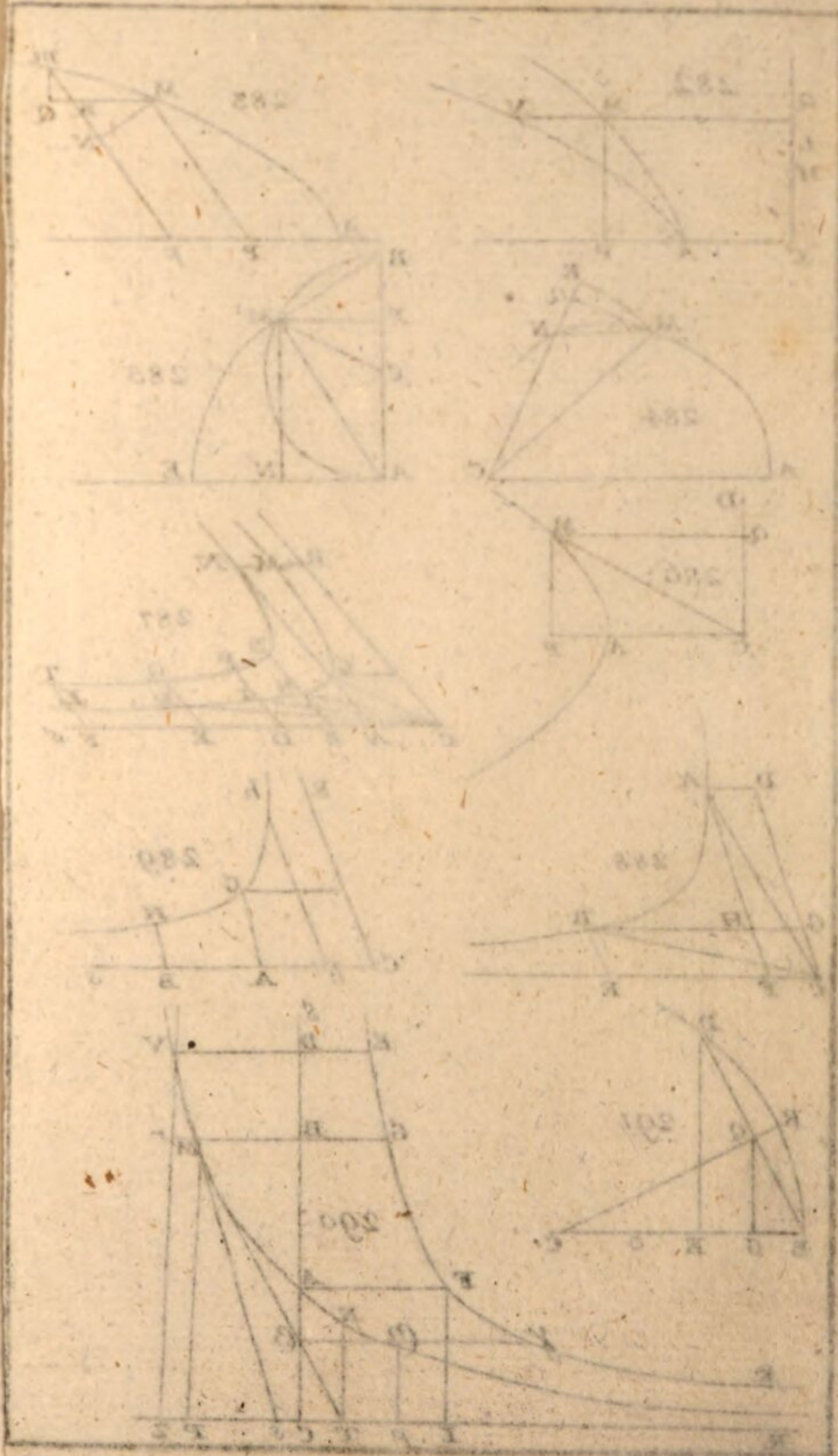


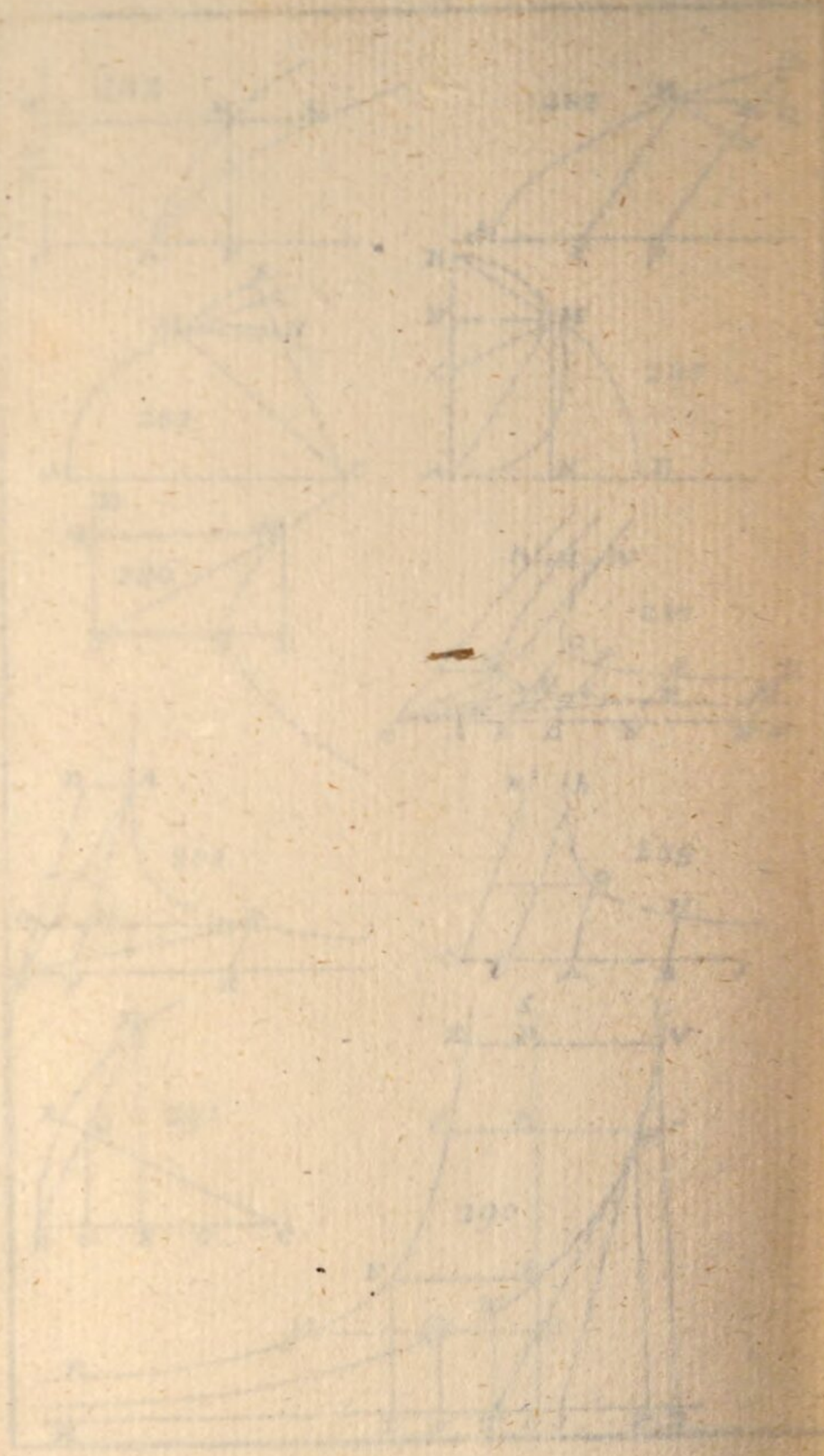


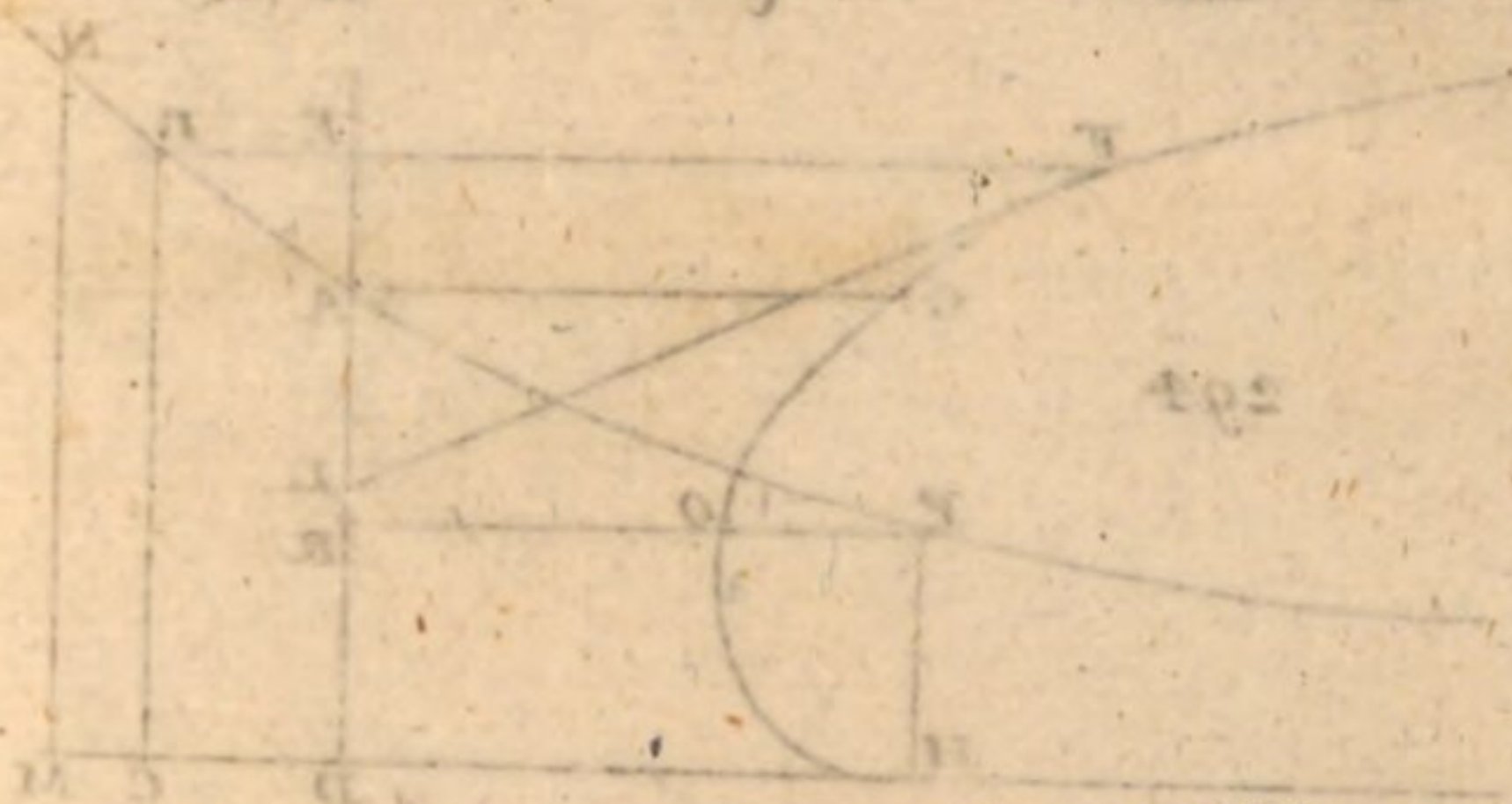
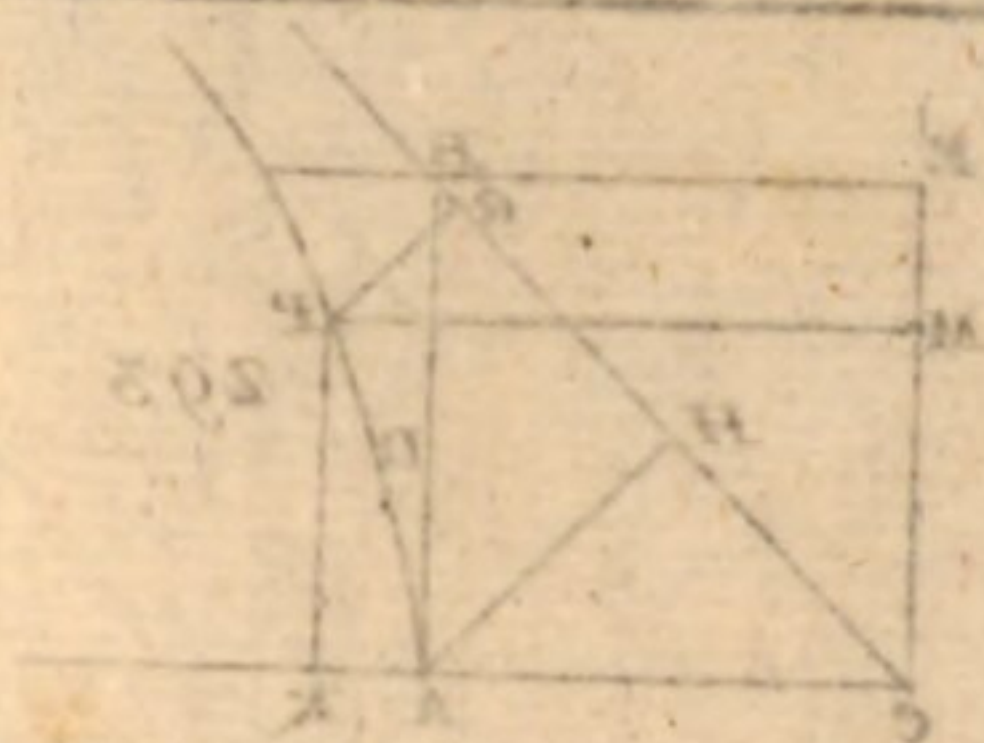




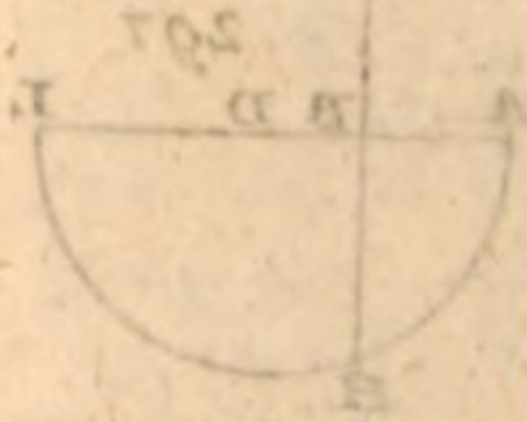
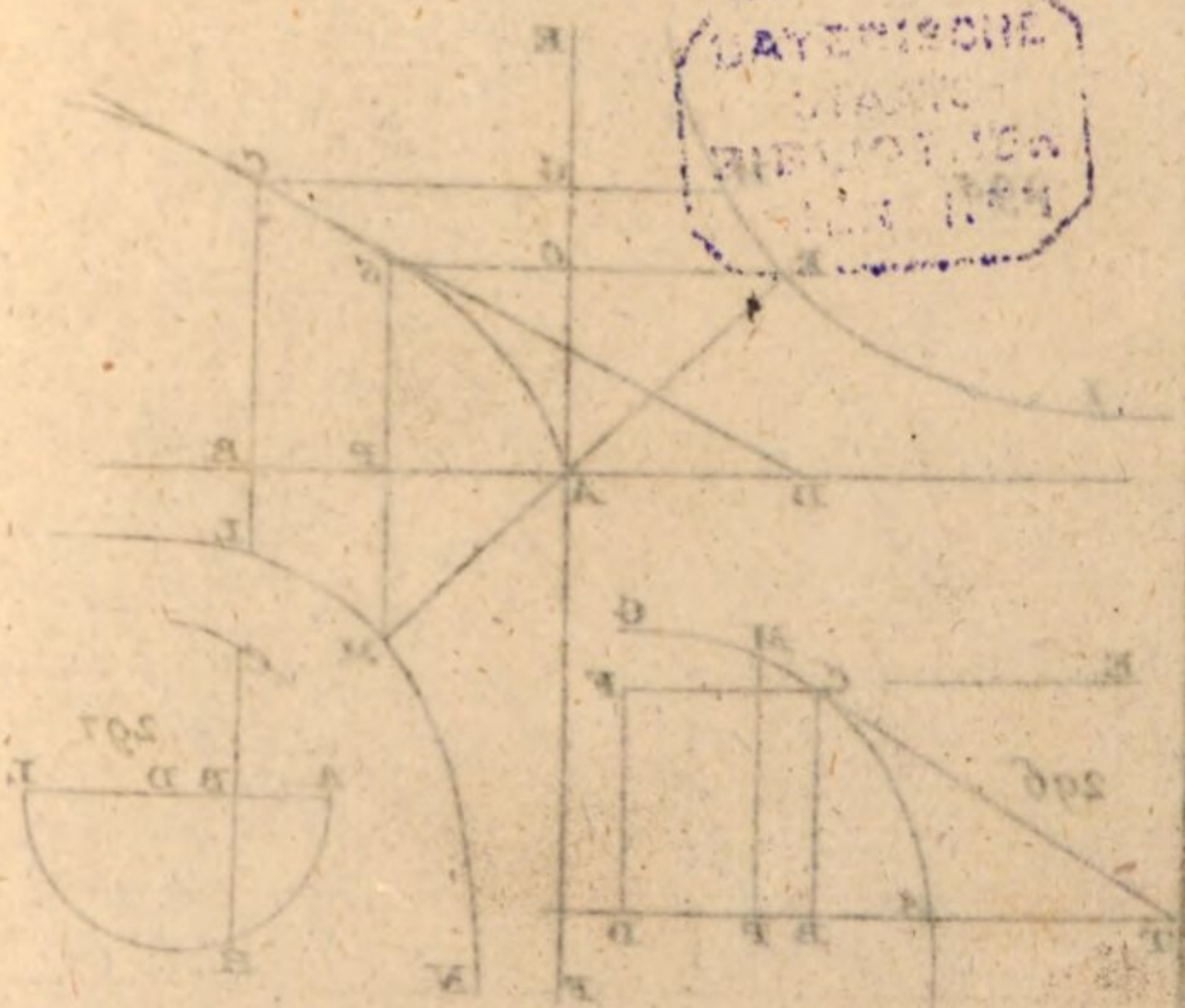


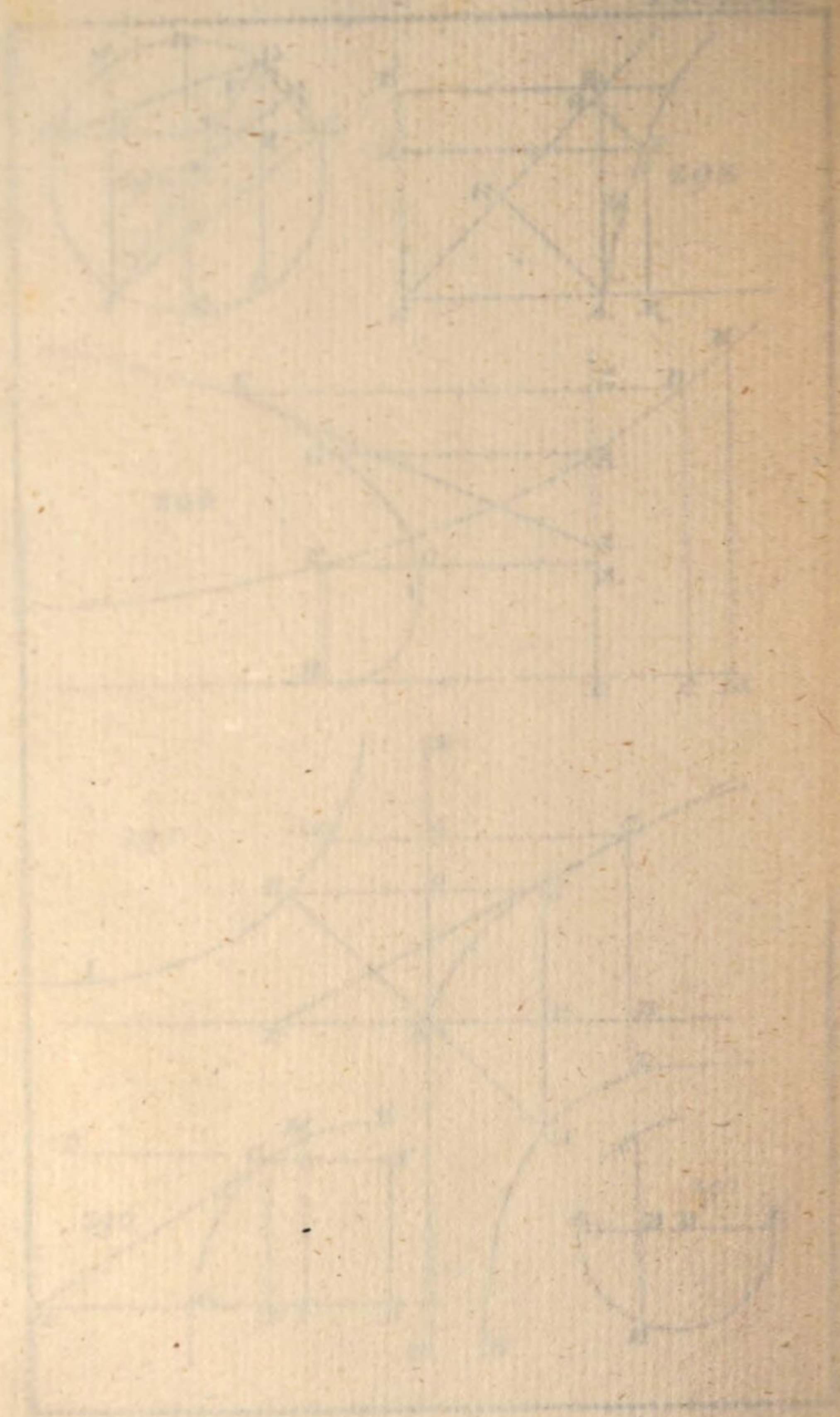


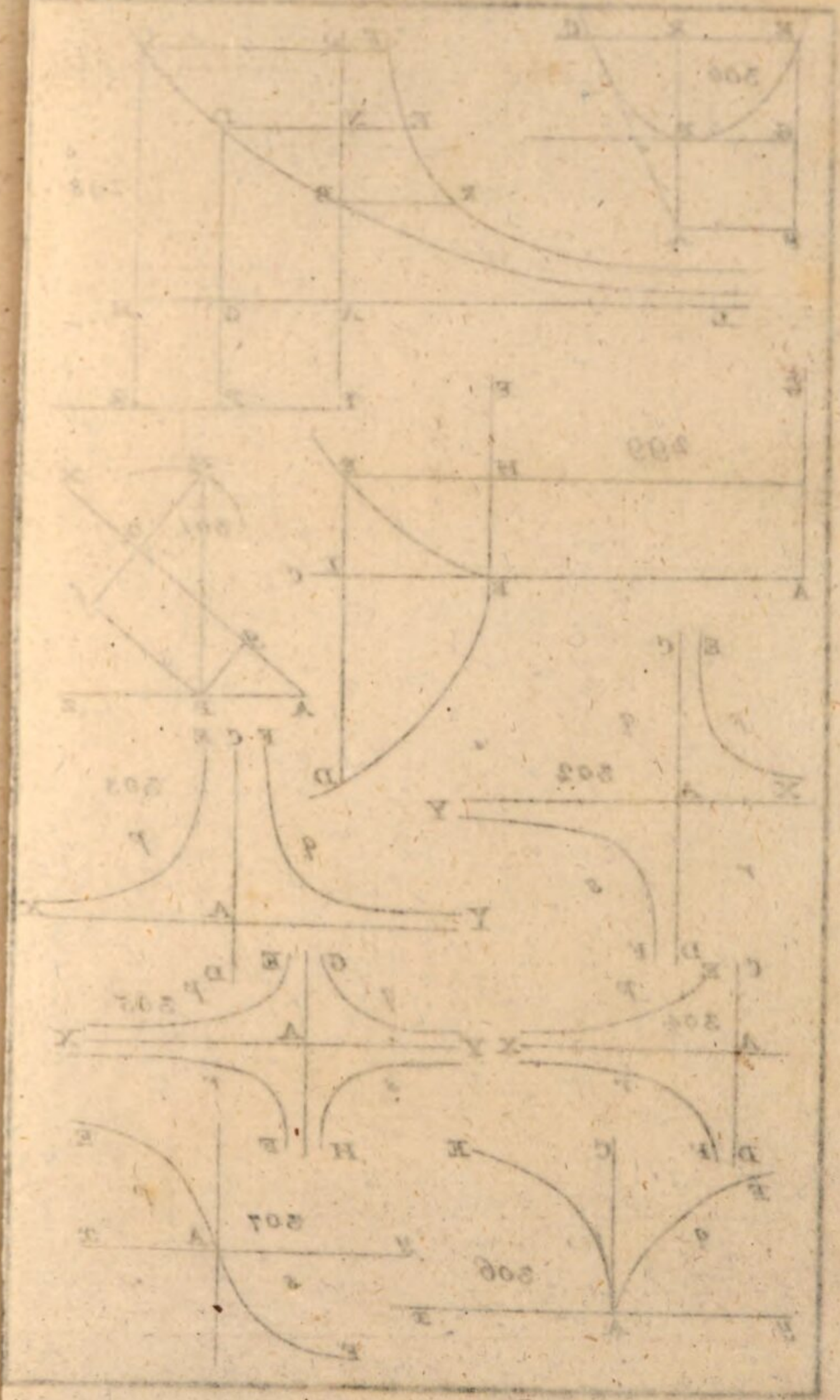


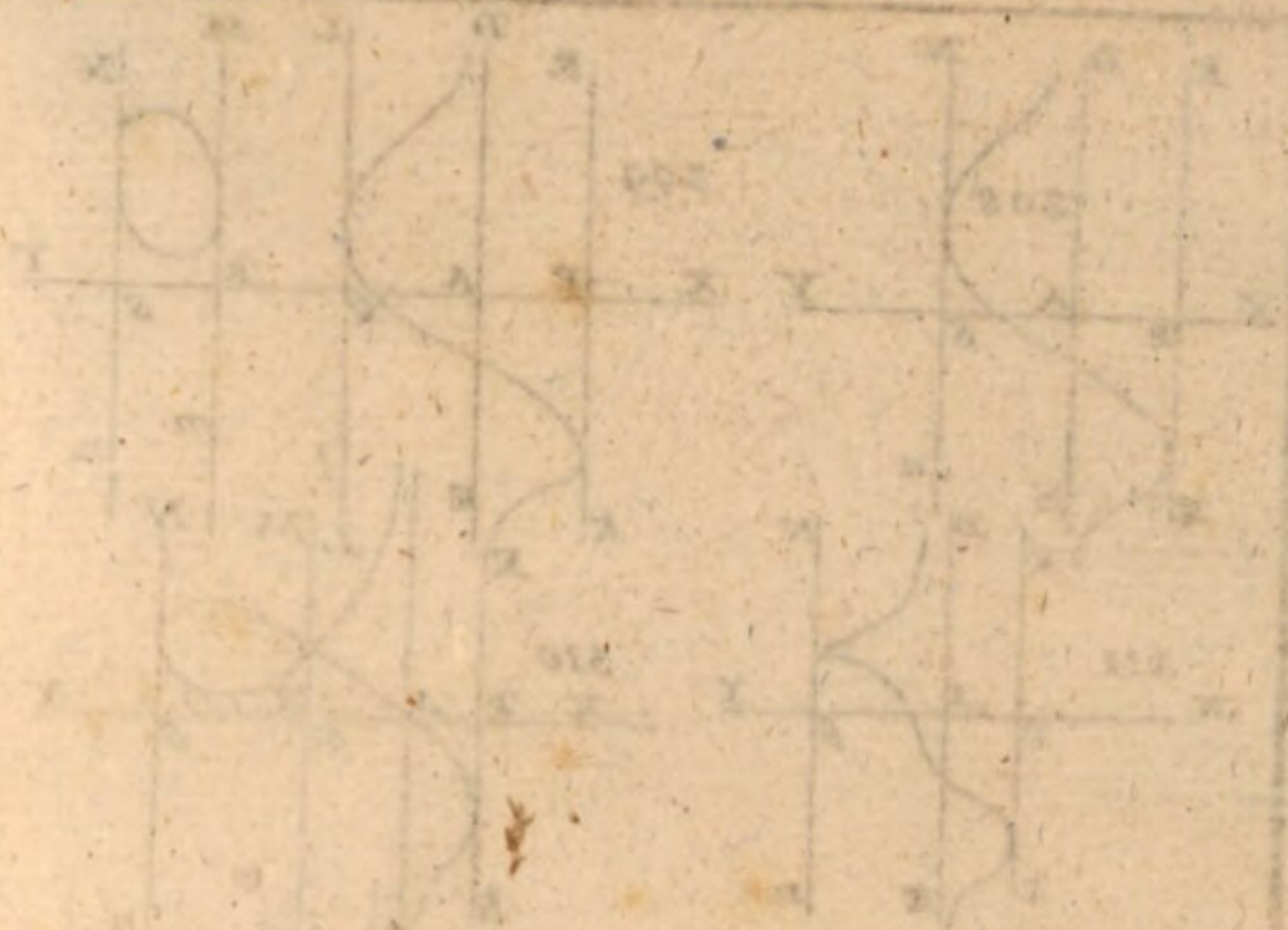


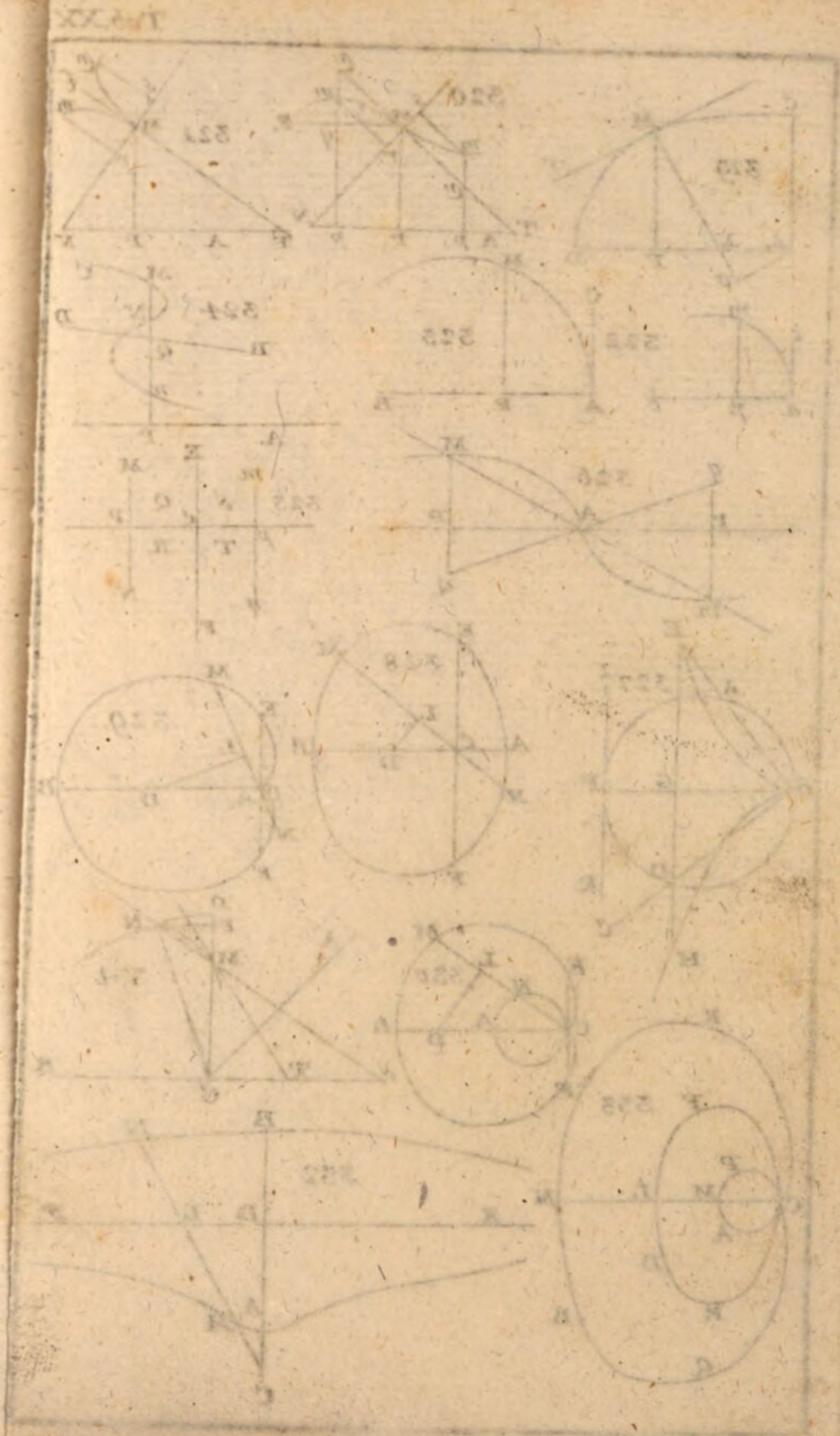
THE
LIBRARY OF
THE
MUSEUM OF
ART AND
ARCHAEOLOGY
OF
THE
CITY OF
NEW YORK

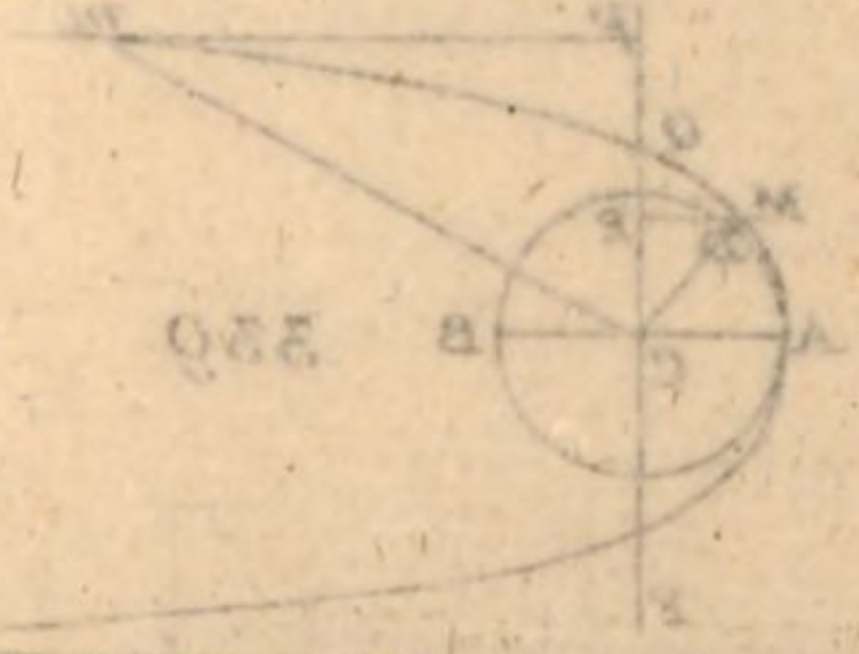
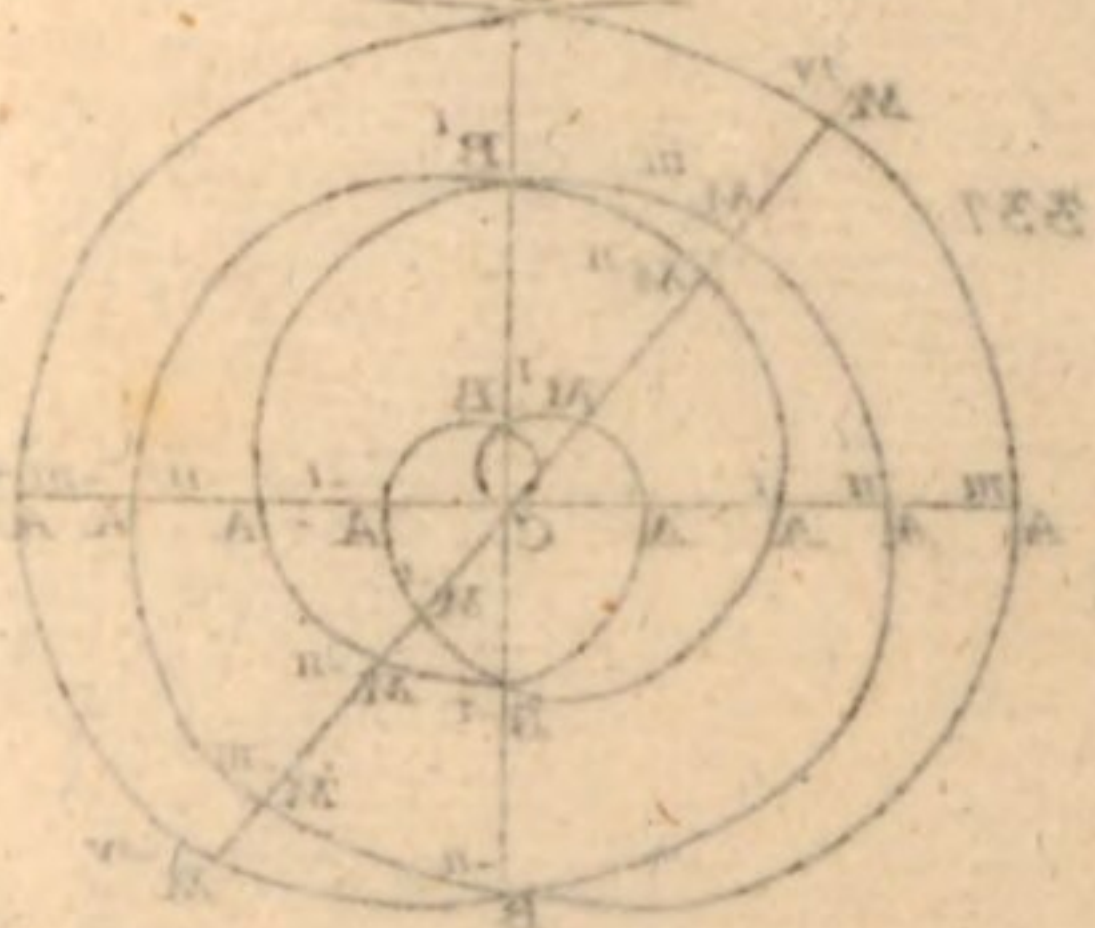
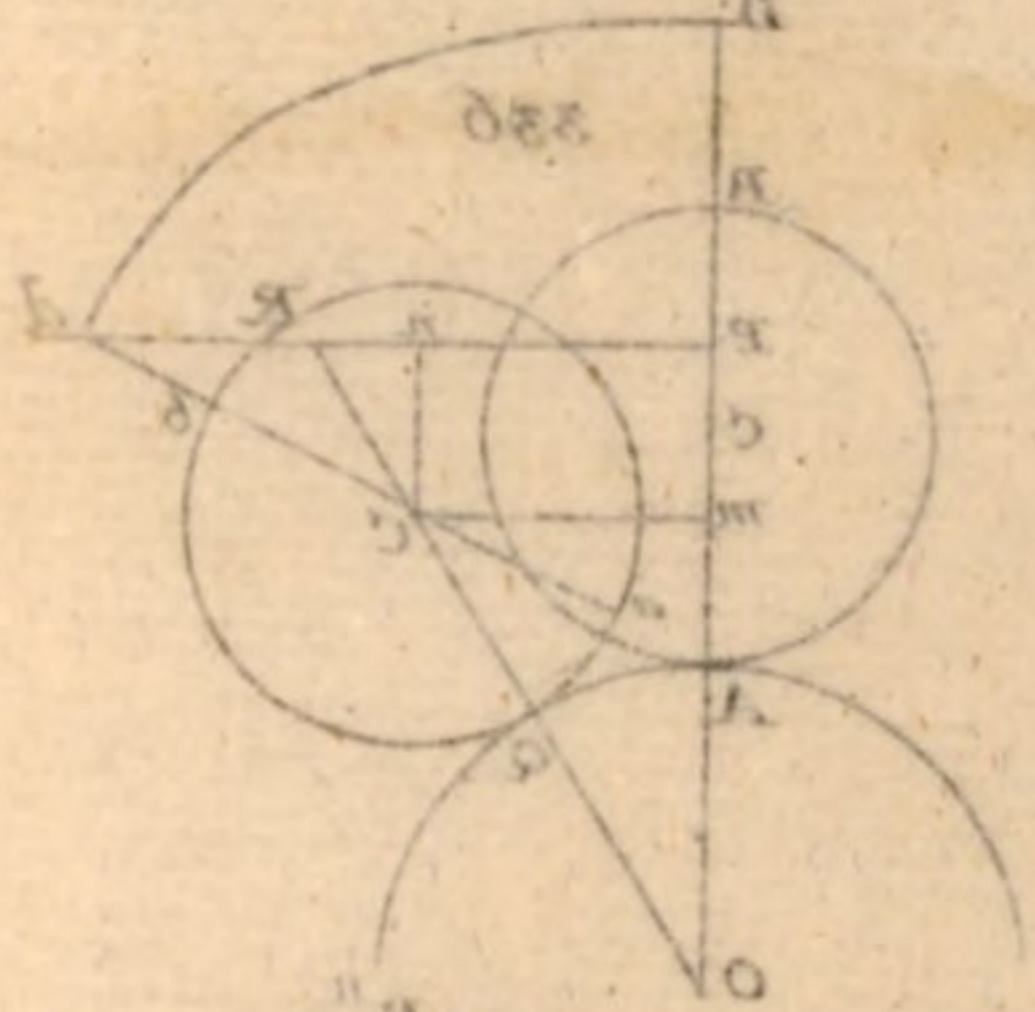
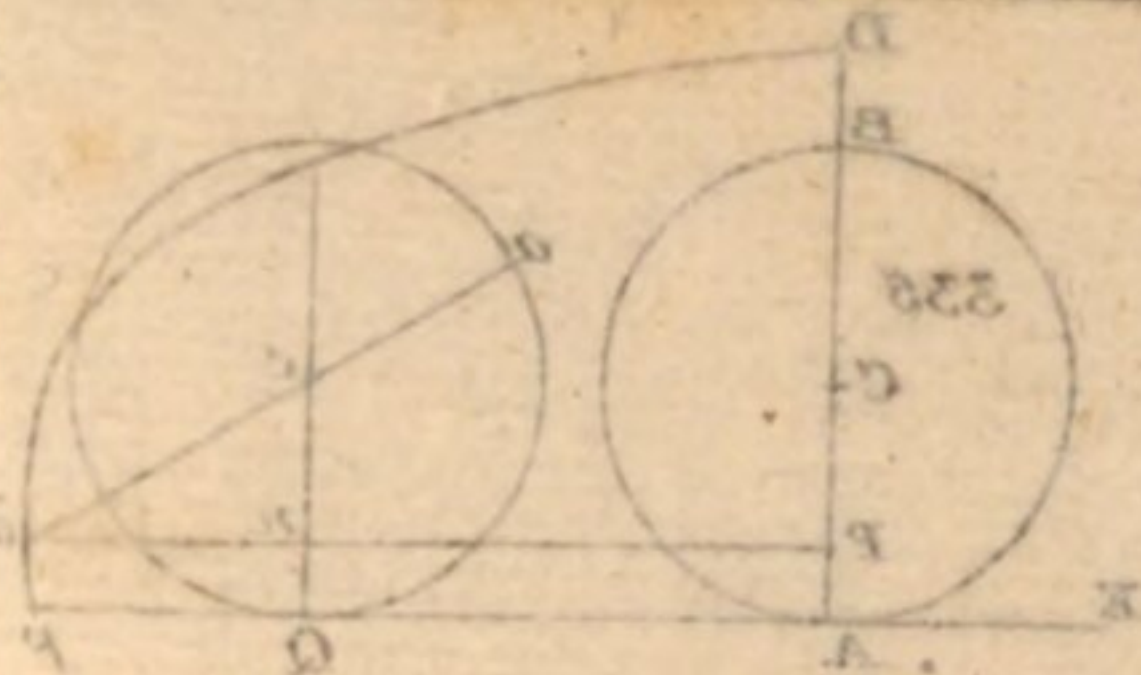
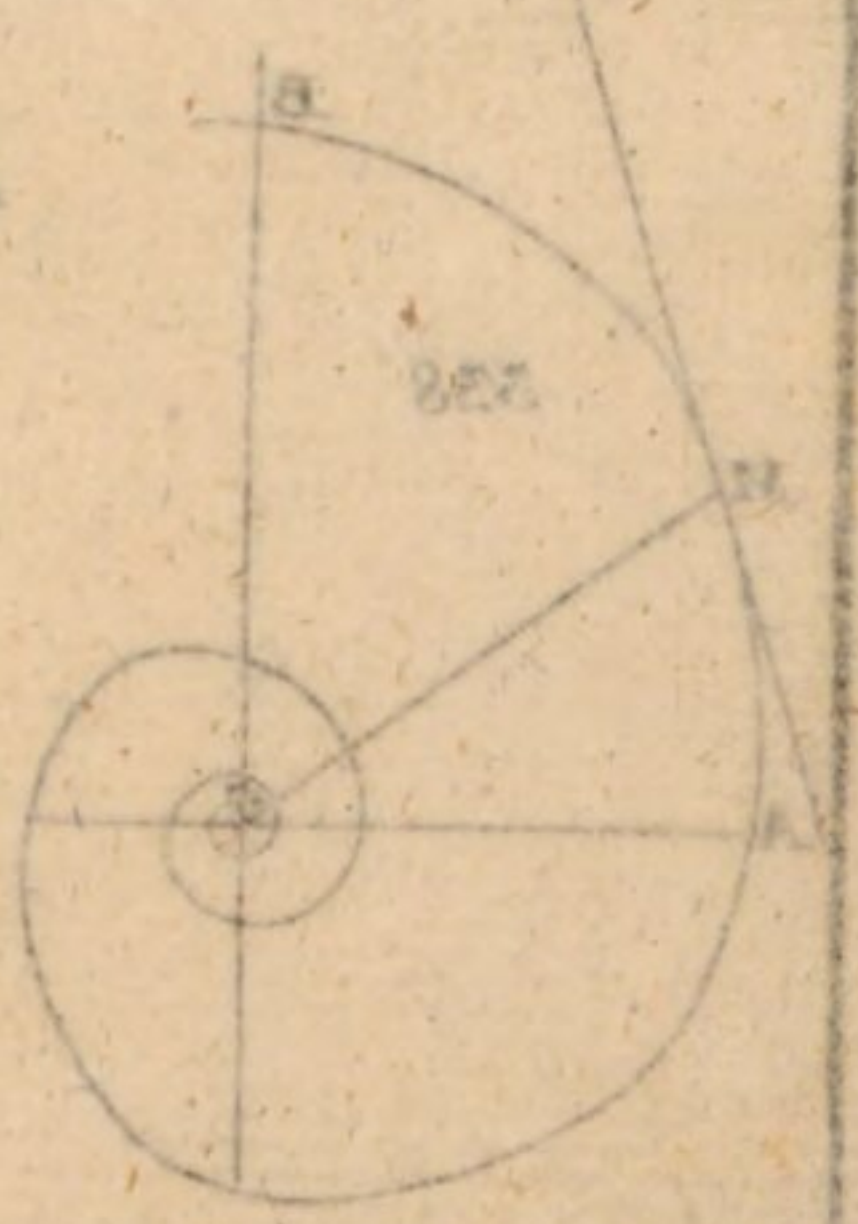
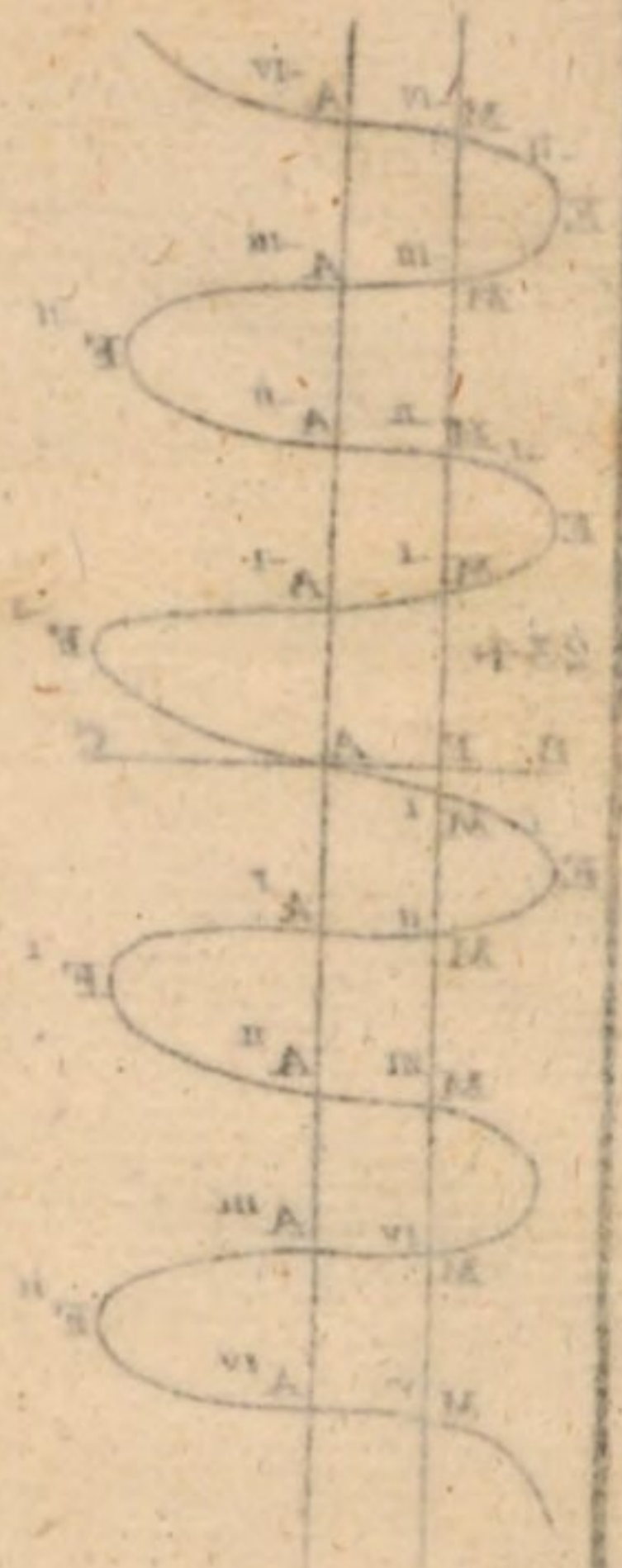


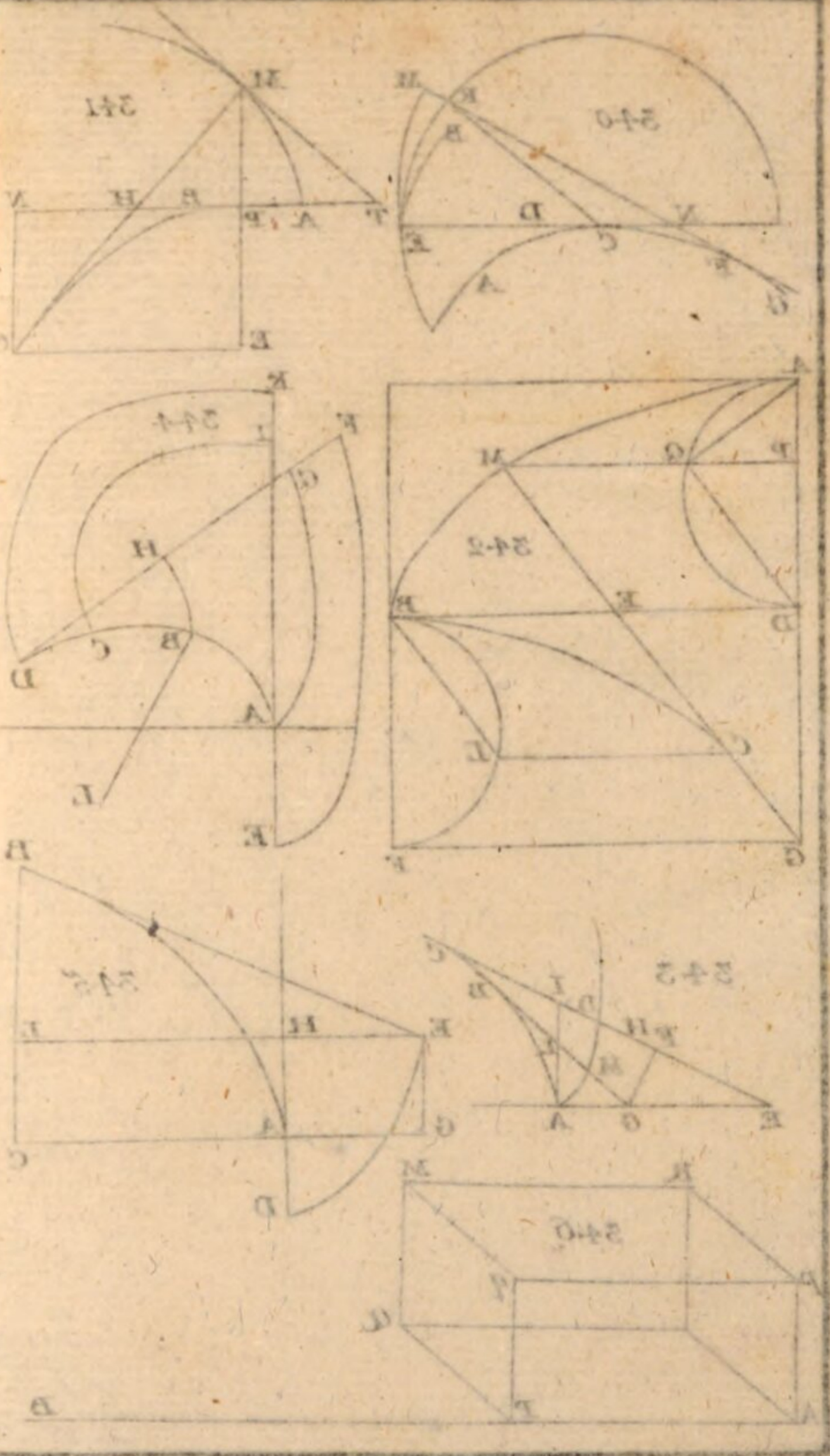


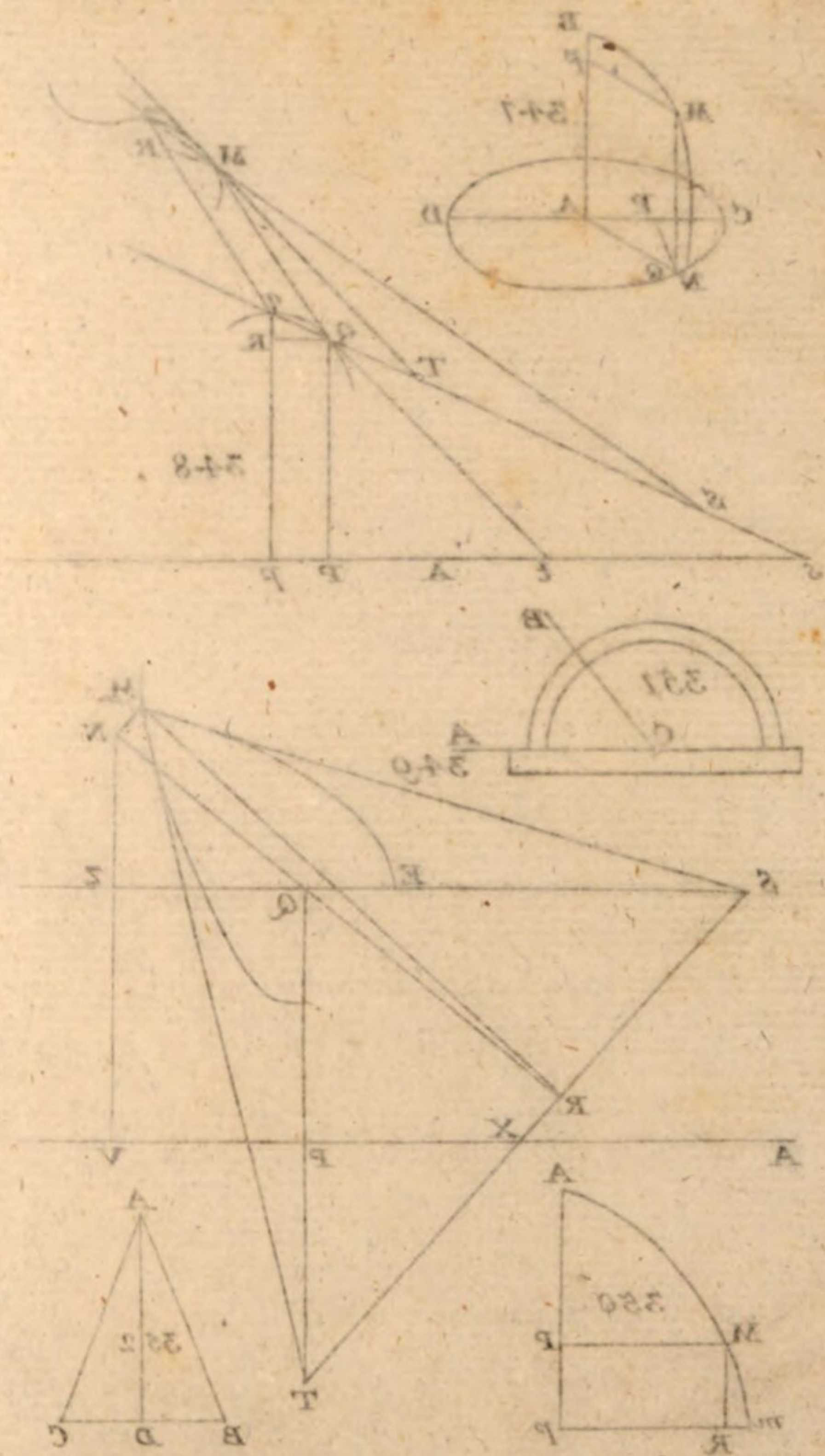














Karsten, Wenceslaus Johann Gustav,

Mathesis theoretica elementaris

Rostochium u.a. 1760

Math.u. 89

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594020-6

VD18 14483246-001